MỘT VÀI ĐIỀU KIỆN CHO TÍNH CO SUY RỘNG CỦA CÁC HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CÓ CHẬM

Trần Thế Anh[1], Nguyễn Thành Nghĩa[2] và Lê Trung Hiếu[3*]

[1]*Khoa Sư phạm, Trường Đại học Khánh Hòa, Việt Nam*

[2]*Phòng Công tác Đảng - Đoàn thể, Trường Đại học Đồng Tháp, Việt Nam*

[3]*Khoa Sư phạm Toán - Tin, Trường Đại học Đồng Tháp, Việt Nam*

[*]*Tác giả liên hệ: Lê Trung Hiếu, Email: lthieu@dthu.edu.vn*

Lịch sử bài báo

Ngày nhận: 26/7/2021; Ngày nhận chỉnh sửa: 07/9/2021; Ngày duyệt đăng: 08/9/2021

Tóm tắt

Trong bài báo này, chúng tôi mở rộng khái niệm co toàn cục thành co suy rộng của nghiệm đối với một lớp hệ phương trình vi phân phi tuyến có chậm, với các chậm là hàm phụ thuộc thời gian. Từ đó, chúng tôi trình bày một số điều kiện mới tường minh cho tính chất co suy rộng của lớp hệ này. Chúng tôi đưa ra một ví dụ nhằm minh họa cho kết quả đạt được.

Từ khóa: *Co suy rộng, co toàn cục, phương trình vi phân có chậm.*

SOME NEW CRITERIA FOR GENERALIZED CONTRACTION OF DIFFERENTIAL SYSTEMS WITH DELAYS

Tran The Anh[1], Nguyen Thanh Nghia[2], and Le Trung Hieu[3*]

[1]*Faculty of Pedagogical, Khanh Hoa University, Vietnam*

[2]*Office of Communist Party and Unions Affairs, Dong Thap University, Vietnam*

[3]*Faculty of Mathematics - Informatics Teacher Education, Dong Thap University, Vietnam*

[*]*Corresponding author: Le Trung Hieu, Email: lthieu@dthu.edu.vn*

Article history

Received: 26/7/2021; Received in revised form: 07/9/2021; Accepted: 08/9/2021

Abstract

In this paper, we generalize the concept contraction to generalized contraction of nonlinear differential systems with time-varying delays. Then we present some new sufficient conditions for generalized contraction of the mentioned systems. An example is given to illustrate the obtained results.

Keywords: *Generalized contraction, Global contraction, Delay differential system.*

DOI: https://doi.org/10.52714/dthu.12.2.2023.1027

Trích dẫn: Trần, T. A., Nguyễn, T. N., & Lê, T. H. (2023). Một vài điều kiện cho tính co suy rộng của các hệ phương trình vi phân có chậm. *Tạp chí Khoa học Đại học Đồng Tháp, 12*(2), 13-21. https://doi.org/10.52714/dthu.12.2.2023.1027.

1. Mở đầu

Năm 1998, bài toán co của các hệ động lực đã được Lohmiller và Slotine giới thiệu từ việc nghiên cứu một số mô hình thực tế về cơ học chất lỏng (Lohmiller & Slotine, 1998). Các tác giả đã trình bày một số điều kiện cho tính co của hệ phương trình sai phân và vi phân thường. Xa hơn, các tác giả còn áp dụng kết quả về tính chất co vào nghiên cứu bài toán điều khiển và thiết kế quan sát đối với một số hệ động lực. Gần đây, bài toán co của hệ phương trình sai phân, hệ phương trình vi phân tiếp tục được khai thác, mở rộng và phát triển. Năm 2018, Ngoc & Trinh (2018) đã dùng một phương pháp tiếp cận khác để nghiên cứu và đưa ra một số điều kiện cho tính co của các hệ phương trình vi phân phiếm hàm. Năm 2019, Ngoc & cs. (2019) đã đưa ra một số điều kiện đủ cho tính co của hệ phương trình sai phân phi tuyến phụ thuộc thời gian có chậm, với các chậm là các hàm phụ thuộc thời gian và bị chặn. Kết quả đạt được đã áp dụng vào nghiên cứu điều kiện co của một lớp hệ nơ ron rời rạc. Năm 2021, một số điều kiện co của cho lớp hệ động lực có yếu tố ngẫu nhiên cũng được nghiên cứu trong (Ky, 2021) & (Ngoc, 2021).

Một cách nôm na, một hệ động lực là co nếu khoảng cách giữa hai quỹ đạo của hai nghiệm bất kỳ của hệ tiến về không khi thời gian đủ lớn. Tuy nhiên, có một số trường hợp, khoảng cách giữa hai quỹ đạo bất kỳ không tiến về không mà chỉ biết rằng khoảng cách ấy luôn không vượt quá một số dương nhất định. Dạng này có thể được gọi là epsilon-co, một dạng co suy rộng. Năm 2020, các tác giả trong (Thuy & cs., 2020) đã nghiên cứu đưa ra một số điều kiện cho tính chất epsilon-co của hệ phương trình sai phân với biến liên tục đối với hệ không chịu nhiễu và có chịu nhiễu phi tuyến. Tiếp tục ý tưởng này, chúng tôi cải tiến kĩ thuật chứng minh trong Ngoc (2015) và Ngoc & Trinh (2018) để chứng minh nhiều điều kiện co suy rộng của nghiệm đối với một lớp hệ phương trình vi phân phi tuyến phụ thuộc thời gian có chậm rời rạc, với chậm là các hàm phụ thuộc thời gian. Chúng tôi nêu ra một ví dụ áp dụng cho kết quả đạt được, đồng thời chỉ ra rằng các kết quả đã có về điều kiện ổn định mũ và co trước đây đối với lớp hệ phương trình vi phân có chậm là không áp dụng được cho lớp phương trình được nêu trong ví dụ này.

Sau đây là một số quy ước và kí hiệu được sử dụng trong bài báo này. Với số nguyên dương *m*, kí hiệu $\underline{m}_0 := \{0,1,...,m\}, \underline{m} := \{1,2,...,m\}$. Kí hiệu $\mathbb{N} := \{1,2,...\}$ và gọi $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ lần lượt là trường các số thực và trường các số phức. Với hai số nguyên dương l, q, kí hiệu $\mathbb{R}^{l\times q}$, $\mathbb{R}_+^{l\times q}$ lần lượt là tập hợp các ma trận thực và tập hợp các ma trận thực không âm cỡ $l\times q$. Với hai ma trận thực $D=(d_{ij}), E=(e_{ij})\in\mathbb{R}^{l\times q}$, ta quy ước trị tuyệt đối của D là $|D|=(|d_{ij}|)\in\mathbb{R}_+^{l\times q}$. Bất đẳng thức giữa hai ma trận D và E được hiểu như sau: $D\geq(\leq,>>,<<)E$ tương đương với $d_{ij}\geq(\leq,>,<)e_{ij}$, với mọi $i\in\underline{l}, j\in\underline{q}$. Ta có cách hiểu tương tự, được áp dụng đối với các véctơ trong $\mathbb{R}^n$. Chuẩn của ma trận $D=(d_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n}$ được hiểu là chuẩn toán tử, được xác định bởi $\|D\| := \max_{\|x\|=1}\|Dx\|$. Cho $D\in\mathbb{R}^{n\times n}, E\in\mathbb{R}_+^{n\times n}$, nếu $|D|\leq E$ thì $\|D\|\leq\|E\|$. Với $E=(e_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n}$, hoành độ phổ của E được xác định bởi

$$\mu(E)=\max\{\mathrm{Re}\,\lambda:\ \lambda\in\mathbb{C},\ \det(\lambda I_n - E)=0\}.$$

Ma trận E được gọi là ma trận Metzler nếu tất cả các phần tử nằm ngoài đường chéo chính của E đều không âm. Cho E là ma trận Metzler, khi đó $\mu(E)<0$ tương đương với tồn tại véctơ $p\in\mathbb{R}^n, p\gg 0$ sao cho $Ep<<0$, xem (Ngoc, 2012, Theorem I.2).

2. Điều kiện co suy rộng của các hệ phương trình vi phân có chậm

Xét hệ phương trình vi phân phi tuyến có chậm có dạng sau đây

$$\begin{aligned}&\dot{x}(t) = \\ &F(t,x(t)) + G\big(t,x(t),x(t-h_1(t)), \qquad (2.1)\\ &x(t-h_2(t)),...,x(t-h_m(t))\big),\ t\geq t_0.\end{aligned}$$

Trong đó, $F(\cdot,\cdot)\in C(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$,

$G(\cdot,...,\cdot)\in C(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times...\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ là các hàm liên tục cho trước; $h_k(\cdot):\mathbb{R}\to\mathbb{R}, k\in\underline{m}$, là các hàm chậm liên tục và bị chặn, tức là tồn tại các số thực $h_k>0$ sao cho $0<h_k(t)\leq h_k,\ k\in\underline{m},\ \forall t\geq 0.$

Đặt $h:=\max\{h_i, i\in\underline{m}\}$ và $\mathbb{S}:=C([-h,0],\mathbb{R}^n)$. Với $t_0\in\mathbb{R}_+$ cố định cho trước và $\varphi\in\mathbb{S}$, tồn tại nghiệm địa phương của hệ phương trình (2.1), ta ký hiệu nghiệm này bởi $x(\cdot,t,\varphi)$. Nghiệm $x(\cdot,t,\varphi)$ thỏa mãn điều kiện đầu

$$x(s+t_0):=\varphi(s),\ \forall s\in[-h,0]. \qquad (2.2)$$

Nghiệm này được xác định và liên tục trên $[-h,\gamma)$ với $\gamma>t_0$ và thỏa mãn (2.1), đối với mỗi $t\in[t_0,\gamma)$, xem (Hale và Lunel, 1993, trang 43). Ngoài ra, nếu khoảng $[t_0-h,\gamma)$ là khoảng tồn tại nghiệm lớn nhất của nghiệm $x(\cdot,t_0,\varphi)$ thì $x(\cdot,t_0,\varphi)$ được gọi là nghiệm không thể kéo dài (noncontinuable). Sự tồn tại của nghiệm không thể kéo dài được suy ra từ Bổ đề Zorn và khoảng tồn tại nghiệm lớn nhất phải là khoảng mở.

Với mỗi $\varphi\in\mathbb{S}$, ta đặt $\|\varphi\|:=\max\{\|\varphi(s)\|: s\in[-h,0]\}$. Sau đây chúng tôi trình bày định nghĩa về co suy rộng.

Định nghĩa 2.1. Hệ (2.1) được gọi là *co suy rộng* (generalizedly contractive) nếu:

(i) Với bất kỳ $t_0\in\mathbb{R}$ và bất kỳ $\varphi\in\mathbb{S}$, $x(\cdot,t_0,\varphi)$ hoàn toàn xác định trên $[-h+t_0,\infty)$.

(ii) Tồn tại $M>0$, $\lambda>0, \eta>0$ sao cho

$$\begin{aligned}&\|x(t,t_0,\varphi)-x(t,t_0,\psi)\|\\ &\quad\le Me^{-\lambda(t-t_0)}\|\varphi-\psi\|+\eta,\end{aligned} \qquad (2.3)$$

với mọi $t\ge t_0$, $\varphi,\psi\in\mathbb{S}$.

Số η được xác định trong (2.3) được gọi là *biên co* của hệ (2.1).

Nhận xét 2.2. Chú ý rằng, khi bất đẳng thức (2.3) được thỏa mãn với $\eta=0$ thì hệ (2.1) được gọi là co toàn cục (globally contractive). Định nghĩa và tính chất về co toàn cục của hệ phương trình vi phân phiếm hàm, hệ phương trình sai phân có chậm đã được trình bày lần lượt trong các nghiên cứu của Ngoc & Trinh (2018), Ngoc & cs. (2019).

Hiển nhiên, nếu một hệ động lực co toàn cục thì nó co suy rộng với biên co $\eta>0$ tùy ý, nhưng điều ngược lại nói chung là không đúng.

Định lí sau đây cho ta một điều kiện đủ tường minh cho tính co suy rộng của hệ (2.1).

Định lí 2.3. *Cho $F(t,\cdot)$ là hàm khả vi liên tục với mỗi $t\in\mathbb{R}$. Giả sử rằng các điều kiện sau đây được thỏa mãn*

(i) Tồn tại các hàm ma trận liên tục $A_k(\cdot):\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^{n\times n}, k\in\underline{m}_0$ và hàm liên tục, bị chặn $v(\cdot):\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ sao cho

$$\begin{aligned}&|G(t,u_0,...,u_m)-G(t,w_0..,w_m)|\\ &\quad\le\sum_{k=0}^{m}A_k(t)|u_k-w_k|+v(t),\end{aligned} \qquad (2.4)$$

với mọi $t\in\mathbb{R}, u_k, w_k\in\mathbb{R}^n$, $k\in\underline{m}_0$.

(ii) Tồn tại $B:=(b_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n}$ và $C\in\mathbb{R}_+^{n\times n}$ sao cho

$$\begin{aligned}&\frac{\partial F_i}{\partial u_i}(t,u)\le b_{ii},\ \forall i\in\underline{n};\ \left|\frac{\partial F_i}{\partial u_j}(t,u)\right|\\ &\quad\le b_{ij},\ \forall i,j\in\underline{n},\ i\ne j,\end{aligned} \qquad (2.5)$$

với mọi $t\in\mathbb{R}, u\in\mathbb{R}^n$ và

$$\sum_{k=0}^{m}A_k(t)\le C,\ \forall t\in\mathbb{R}. \qquad (2.6)$$

Khi đó, nếu $\mu(B+C)<0$ thì hệ (2.1) là co suy rộng. Ngoài ra, nếu $v(\cdot)\equiv 0$ thì hệ (2.1) là co toàn cục.

Chứng minh. Từ (2.5), ta có B là ma trận Metzler. Từ (2.6), ta có C là ma trận không âm. Do đó, $B+C$ là ma trận Metzler. Vì $\mu(B+C)<0$ nên tồn tại véctơ $p\in\mathbb{R}^n, p>>0$ sao cho $(B+C)p<<0$, xem (Ngoc, 2015, Theorem I.2). Khi đó, tồn tại $\beta>0$ đủ bé sao cho bất đẳng thức sau đây được thỏa mãn

$$(B+e^{\beta h}C)p\le-\beta p, \qquad (2.7)$$

với $h:=\max\{h_i,\ i\in\underline{m}\}$.

Phép chứng minh phần còn lại của Định lí 2.3 được chia thành 2 bước như sau:

▪ **Bước 1:** Với $\varphi\in\mathbb{S}$ tùy ý, nghiệm $x(\cdot,t_0,\varphi)$ hoàn toàn xác định trên $[-h+t_0,\infty)$.

Với $\varphi\in\mathbb{S}$, gọi $x(t)=x(t,t_0,\varphi)$, $t\in[-h+t_0,\gamma)$ là nghiệm không thể kéo dài của (2.1) và (2.2).

Giả sử phản chứng rằng $\gamma < \infty$. Ta cần chỉ ra mâu thuẫn. Thật vậy, từ (2.4), ta có

$$\left|G\left(t,u_0,...,u_m\right)\right| \le \sum_{k=0}^{m} A_k\left(t\right)\left|u_k\right| + v\left(t\right) + \left|G\left(t,0,...,0\right)\right|, t\in[-h+t_0,\gamma).$$

Vì $G\left(t,0,...,0\right)$ liên tục trên $[-h+t_0,\gamma]$ nên tồn tại $q\in\mathbb{R}_+^n$ sao cho

$$\left|G\left(t,u_0,...,u_m\right)\right| \le \sum_{k=0}^{m} A_k\left(t\right)\left|u_k\right| + v\left(t\right) + q, \quad t\in[-h+t_0,\gamma). \tag{2.8}$$

Xét phương trình vi phân

$$\dot z\left(t\right) = Bz\left(t\right) + \sum_{k=0}^{m} A_k\left(t\right) z\left(t-h_k\left(t\right)\right) + v\left(t\right) + \alpha + q,\ t\ge t_0, \tag{2.9}$$

trong đó, $h_0(\cdot)\equiv 0$; B và $A_k(\cdot),\ k\in\underline{m}_0$; $v(\cdot)$ được xác định bởi (2.4) và (2.5); q được xác định tại (2.8); $\alpha = \left(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\right)^T \in \mathbb{R}^n$, với $\alpha_i = \sup\left\{\left|f_i\left(t,0\right)\right|, t\in[t_0,\gamma)\right\},\ i\in\underline{n}$.

Đặt $|\varphi|(s) := |\varphi(s)|, s\in[-h,0]$. Gọi $z(\cdot) := z(\cdot,t_0,|\varphi|)$ là nghiệm duy nhất của (2.9) với hàm điều kiện đầu $|\varphi|\in\mathbb{S}$. Vì B là ma trận Metzler và $A_k(t)\ge 0$, $k\in\underline{m}_0$, $\forall\in\mathbb{R}$, nên (2.9) là hệ dương, xem (Ngoc, 2012, Theorem II.2). Do đó, $z(t)\ge 0, \forall t\ge t_0$. Lấy $\varepsilon>0$ tùy ý và cố định ở các bước tiếp theo. Ta có $\left|x\left(t\right)\right| << \omega\left(t\right) := z(t)+\varepsilon p,\ \forall t\in\left[-h+t_0,t_0\right)$.

Ta cần chứng minh

$$\left|x\left(t\right)\right| \le \omega(t),\ \forall t\in\left[-h+t_0,\gamma\right). \tag{2.10}$$

Giả sử phản chứng rằng (2.10) không được thỏa mãn. Khi đó, tồn tại $t^*\in\left(t_0,\gamma\right)$ sao cho $\left|z\left(t^*\right)\right| \not\le \omega(t^*)$. Đặt $t_1 = \inf\left\{t^*\in\left(t_0,\infty\right) : \left|z\left(t^*\right)\right| \not\le \omega(t^*)\right\}$. Do tính liên tục của $z\left(t\right)$ và $\omega\left(t\right)$, ta có $t_1>t_0$ và tồn tại một chỉ số $i_0\in\underline{n}$ sao cho

$$\begin{cases}\left|x\left(t\right)\right| \le \omega\left(t\right), \forall t\in\left[t_0,t_1\right);\\ \left|x_{i_0}\left(t_1\right)\right| = \omega_{i_0}\left(t_1\right);\\ \left|x_{i_0}\left(\tau_j\right)\right| > \omega_{i_0}\left(\tau_j\right),\end{cases} \tag{2.11}$$

với $\tau_j\in\left(t_1,t_1+1/j\right), j\in\mathbb{N}$.

Đặt $A_k\left(t\right) := \left(a_{ij}^{(k)}\left(t\right)\right)_{n\times n}, k\in\underline{m}_0$.

Vì $\operatorname{sgn}(x)y\le|y|, \forall x,y\in\mathbb{R}$, nên khi áp dụng (2.5), (2.7) và định lí giá trị trung bình cho hàm véctơ, ta có với mỗi $i\in\underline{n}$,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left|x_i\left(t\right)\right| &= \operatorname{sgn}\left(x_i\left(t\right)\right)\dot x_i\left(t\right)\\
&= \operatorname{sgn}\left(x_i\left(t\right)\right)\left[F_i\left(t,x\left(t\right)\right)\right] + \operatorname{sgn}\left(x_i\left(t\right)\right)\times\\
&\quad\left[G_i\left(t,x(t),x\left(t-h_1\left(t\right)\right),...,x\left(t-h_m\left(t\right)\right)\right)\right]\\
&= \operatorname{sgn}\left(x_i\left(t\right)\right)\left[F_i\left(t,x\left(t\right)\right)-F_i\left(t,0\right)\right]\\
&\quad+\operatorname{sgn}\left(x_i\left(t\right)\right)F_i\left(t,0\right)\\
&\quad+\operatorname{sgn}\left(x_i\left(t\right)\right)\left[G_i\left(t,x(t),x\left(t-h_1\left(t\right)\right),...,x\left(t-h_m\left(t\right)\right)\right)\right]\\
&= \operatorname{sgn}\left(x_i\left(t\right)\right)\sum_{j=1}^{n}\left(\int_0^1 \frac{\partial F_i}{\partial x_j}\left(t,sx\left(t\right)\right)ds\right)x_j\left(t\right)\\
&\quad+\operatorname{sgn}\left(x_i\left(t\right)\right)F_i\left(t,0\right)\\
&\quad+\operatorname{sgn}\left(x_i\left(t\right)\right)\left[G_i\left(t,x(t),x\left(t-h_1\left(t\right)\right),...,x\left(t-h_m\left(t\right)\right)\right)\right]\\
&= \operatorname{sgn}\left(x_i\left(t\right)\right)\int_0^1 \frac{\partial F_i}{\partial x_j}\left(t,sx\left(t\right)\right)ds\, x_i(t)\\
&\quad+\operatorname{sgn}\left(x_i\left(t\right)\right)\sum_{j=1, j\ne i}^{n}\left(\int_0^1 \frac{\partial F_i}{\partial x_j}\left(t,sx\left(t\right)\right)ds\right)x_j\left(t\right)\\
&\quad+\operatorname{sgn}\left(x_i\left(t\right)\right)F_i\left(t,0\right)\\
&\quad+\operatorname{sgn}\left(x_i\left(t\right)\right)\left[G_i\left(t,x(t),x\left(t-h_1\left(t\right)\right),...,x\left(t-h_m\left(t\right)\right)\right)\right]\\
&\le \int_0^1 \frac{\partial F_i}{\partial x_j}\left(t,sx\left(t\right)\right)ds\left|x_j\left(t\right)\right|\\
&\quad+\sum_{j=1, j\ne i}^{n}\left(\int_0^1\left|\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\left(t,sx\left(t\right)\right)\right|ds\right)\left|x_j\left(t\right)\right| + \left|F_i\left(t,0\right)\right|\\
&\quad+\left|G_i\left(t,x(t),x\left(t-h_1\left(t\right)\right),...,x\left(t-h_m\left(t\right)\right)\right)\right|\\
&\le b_{ii}\left|x_i\left(t\right)\right| + \sum_{j=1, j\ne i}^{n} b_{ij}\left|x_j\left(t\right)\right| + \alpha_i\\
&\quad+\sum_{k=0}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(k)}\left(t\right)\left|x_j\left(t-h_k\left(t\right)\right)\right|\right) + v_i\left(t\right) + q_i,
\end{aligned}$$

đối với hầu khắp $t\in\left[t_0,\gamma\right)$. Do đó, với $t\in\left[t_0,\gamma\right)$, ta có

$$
\begin{aligned}
&D^+\left|x_i(t)\right| \\
&:= \limsup_{\delta\to 0^+} \frac{\left|x_i(t+\delta)\right| - \left|x_i(t)\right|}{\delta} \\
&= \limsup_{\delta\to 0^+} \frac{1}{\delta}\int_t^{t+\delta} \frac{d}{ds}\left|x_i(s)\right| ds \\
&\le b_{ii}\left|x_i(t)\right| + \sum_{j=1, j\ne i}^{n} b_{ij}\left|x_i(t)\right| + \alpha_i \\
&+\sum_{k=0}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(k)}(t)\left|x_j(t-h_k(t))\right|\right) + v_i(t) + q_i,
\end{aligned}
$$

trong đó D^+ là ký hiệu của đạo hàm Dini trên - phải.

Từ (2.7) và (2.11), ta có

$$
\begin{aligned}
&D^+\left|x_{i_0}(t_1)\right| \\
&\le b_{i_0 i_0}\left|x_{i_0}(t)\right| + \sum_{j=1, j\ne i_0}^{n} b_{i_0 j}\left|x_{i_0}(t)\right| + \alpha_{i_0} \\
&\quad +\sum_{k=0}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j}^{(k)}(t)\left|x_j(t-h_k(t))\right|\right) + v_{i_0}(t) + q_{i_0} \\
&\le b_{i_0 i_0}\omega_{t_0}(t_1) + \sum_{j=1, j\ne i_0}^{n} b_{i_0 j}\omega_j(t_1) + \alpha_{i_0} \\
&\quad +\sum_{k=0}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j}^{(k)}(t_1)\omega_j(t_1-h_k(t_1))\right) + v_{i_0}(t_1) + q_{i_0} \\
&\le b_{i_0 i_0} z_{i_0}(t_1) + \sum_{j=1, j\ne i_0}^{n} b_{i_0 j} z_j(t_1) + \alpha_{i_0} \\
&\quad +\sum_{k=0}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j}^{(k)}(t_1) z_j(t_1-h_k(t_1))\right) + v_{i_0}(t_1) + q_{i_0} \\
&+b_{i_0 i_0}\varepsilon p_{i_0} + \sum_{j=1, j\ne i_0}^{n} b_{i_0 j}\varepsilon p_j + \sum_{k=0}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j}^{(k)}(t_1)\varepsilon p_j\right) \\
&= \dot z_{i_0}(t_1) + \varepsilon\left(\sum_{j=1}^{n} b_{i_0 j} p_j + \sum_{k=0}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j}^{(k)}(t_1) p_j\right)\right) \\
&\le \dot z_{i_0}(t_1) + \varepsilon\left(\sum_{j=1}^{n} b_{i_0 j} p_j + \sum_{j=1}^{n} c_{i_0 j} p_j\right) \\
&\le \dot z_{i_0}(t_1) + \varepsilon\left(\sum_{j=1}^{n} b_{i_0 j} p_j + e^{\beta h}\sum_{j=1}^{n} c_{i_0 j} p_j\right) \\
&< \dot z_{i_0}(t_1) - \varepsilon\beta p_{i_0} \\
&< \dot z_{i_0}(t_1) = D^+ z_{i_0}(t_1).
\end{aligned}
$$

Mặt khác, (2.11) kéo theo điều sau

$$
\begin{aligned}
&D^+\left|x_{i_0}(t_1)\right| = \limsup_{t\to t_1^+} \frac{\left|x_{i_0}(t)\right| - \left|x_{i_0}(t_1)\right|}{t-t_1} \\
&\ge \overline{\lim_{j\to\infty}} \frac{\left|x_{i_0}(\tau_j)\right| - \left|x_{i_0}(t_1)\right|}{\tau_j - t_1} \ge \overline{\lim_{j\to\infty}} \frac{\omega_{i_0}(\tau_j) - \omega_{i_0}(t_1)}{\tau_j - t_1} \\
&= \lim_{j\to\infty} \frac{\omega_{i_0}(\tau_j) - \omega_{i_0}(t_1)}{\tau_j - t_1} = \dot\omega_{i_0}(t_1) \\
&= \dot z_{i_0}(t_1) = D^+ z_{i_0}(t_1).
\end{aligned}
$$

Điều này là mâu thuẫn với kết quả vừa chứng minh ở trên. Do đó,

$$
\begin{gathered}
\left|x(t)\right| \le \omega(t) = z(t) + \varepsilon p, \\
\forall t \in [-h+t_0, \gamma).
\end{gathered} \tag{2.12}
$$

Do tính đơn điệu của chuẩn véctơ, ta có

$$
\begin{aligned}
&\left\|x(t)\right\| \le \left\|\omega(t)\right\| \le \left\|z(t) + \varepsilon p\right\| \\
&\quad \le \left\|z(t)\right\| + \varepsilon\left\|p\right\|, \\
&\quad \forall t \in [-h+t_0, \gamma).
\end{aligned} \tag{2.13}
$$

Vì (2.13) đúng với mọi ε dương bé tùy ý nên khi cho $\varepsilon \to 0$ trong (2.12), ta có

$$
\left\|x(t)\right\| \le \left\|z(t)\right\|, \forall t \in [-h+t_0, \gamma). \tag{2.14}
$$

Do (2.14) nên $x(\cdot)$ bị chặn trên $[t_0, \gamma)$. Ngoài ra, từ (2.1) và (2.4) suy ra rằng $\dot x(\cdot)$ bị chặn trên $[t_0, \gamma)$. Khi đó, $x(\cdot)$ liên tục đều trên $[t_0, \gamma)$. Vì vậy, $\lim_{t\to\gamma} x(t)$ tồn tại và $x(\cdot)$ có thể mở rộng thành một hàm liên tục trên đoạn $[t_0, \gamma]$. Ngoài ra, bao đóng của $\{x_t : t \in [t_0, \gamma)\}$ là tập compact trong $\mathbb{S}$, do Định lí Arzela - Ascoli. Ta có, $\{(t, x_t) : t \in [t_0, \gamma)\} \subset [t_0, \gamma) \times \{x_t : t \in [t_0, \gamma)\}$. Vì vậy, bao đóng của $\{(t, x_t) : t \in [t_0, \gamma)\}$ là tập compact trong $\mathbb{R} \times \mathbb{S}$. Vì (γ, x_γ) thuộc vào tập compact này, chúng ta có thể tìm một nghiệm của (2.1) đi qua điểm này đến bên phải của γ. Điều này mâu thuẫn với giả thiết không thể kéo dài của nghiệm $x(\cdot)$ trên $[t_0, \gamma)$. Do đó, γ phải bằng ∞. Vậy nghiệm $x(\cdot)$ xác định với mọi $t \ge t_0$.

▪ **Bước 2:** Ta chứng minh rằng, tồn tại $M \ge 1, \lambda > 0, \eta > 0$ sao cho

$\left\|x(t,t_0,\varphi)-x(t,t_0,\psi)\right\| \le Me^{-\lambda(t-t_0)}\left\|\varphi-\psi\right\|+\eta,$ với mọi $t \ge t_0, \varphi \ne \psi; \varphi,\psi \in \mathbb{S}$. Khi đó, (2.1)-(2.2) là co suy rộng với biên co η.

Phép chứng minh của Bước 2 là tương tự chứng minh của Bước 1 với một số cải tiến phù hợp. Thật vậy, với $\varphi,\psi \in \mathbb{S}, \left\|\varphi-\psi\right\| \ne 0,$ đặt $x(t):=x(t,t_0,\varphi), y(t):=x(t,t_0,\psi), t \ge t_0-h,$ và $z(t):=x(t)-y(t), t \ge t_0-h.$ Với β và p được xác định trong (2.7), ta đặt

$$u(t):=e^{-\beta(t-t_0)}\left\|\varphi-\psi\right\|\frac{p}{p_{\min}}+\mu\frac{p}{p_{\min}},\ t \ge t_0,$$

trong đó $p_{\min}=\min\{p_i,\ i \in \underline{n}\}>0$ và

$$\mu=\max_{1\le i\le n}\left\{\frac{1}{\beta}\sup_{t\in\mathbb{R}} v_i(t)\right\}.$$

Với cách đặt như trên, ta có $|z(t)| << u(t), \forall t \in [-h+t_0,t_0].$ Ta cần chứng minh rằng,

$$|z(t)| \le u(t), \forall t \ge t_0. \qquad (2.15)$$

Sau đây, ta chứng minh (2.15) bằng phương pháp phản chứng. Thật vậy, giả sử ngược lại rằng tồn tại $t^*>t_0$ sao cho $|z(t^*)| \not\le u(t^*)$. Đặt

$$t_1=\inf\left\{t^* \in (t_0,\infty): |z(t^*)| \not\le u(t^*)\right\}.$$

Do tính chất liên tục của $z(t)$ và $u(t),$ ta có $t_1>t_0$ và tồn tại chỉ số $i_0 \in \underline{n}$ sao cho

$$\begin{cases} |z(t)| \le u(t), \forall t \in [t_0,t_1), \\ |z_{i_0}(t_1)| = u_{i_0}(t_1), \\ |z_{i_0}(\xi_j)| > u_{i_0}(\xi_j), \end{cases} \qquad (2.16)$$

với $\xi_j \in (t_1,t_1+1/j), j \in \mathbb{N}.$ Sử dụng (2.4) - (2.6) và định lí giá trị trung bình cho hàm véctơ, ta có, với mọi $i \in \underline{n},$

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}|z_i(t)| \\
&=\operatorname{sgn}(z_i(t))\dot{z}_i(t) \\
&=\operatorname{sgn}(z_i(t))(\dot{x}_i(t)-\dot{y}_i(t)) \\
&=\operatorname{sgn}(z_i(t))\left[F_i(t,x(t))-F_i(t,y(t))\right] \\
&+\operatorname{sgn}(z_i(t))\times \\
&\left[G_i(t,x(t),x(t-h_1(t)),\dots,x(t-h_m(t)))\right] \\
&-\operatorname{sgn}(z_i(t))\times \\
&\left[G_i(t,y(t-h_1(t)),\dots,y(t-h_m(t)))\right] \\
&\le \operatorname{sgn}(z_i(t))\times \\
&\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\int_0^1\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(t,y(t)+s(x(t)-y(t)))ds\right)\right] \\
&\times(x_j(t)-y_j(t)) \\
&+\Big|G_i(t,x(t),x(t-h_1(t)),\dots,x(t-h_m(t))) \\
&\qquad -G_i(t,y(t),y(t-h_1(t)),\dots,y(t-h_m(t)))\Big| \\
&=\operatorname{sgn}(z_i(t))\left(\int_0^1\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(t,y(t)+sz(t))ds\right)z_j(t) \\
&+\operatorname{sgn}(z_i(t))\sum_{j=1,j\ne i}^{n}\left(\int_0^1\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(t,y(t)+sz(t))ds\right)z_j(t) \\
&+\sum_{k=0}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{(k)}(t)|z_j(t-h_k(t))|\right)+v_i(t) \\
&\qquad=\left(\int_0^1\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(t,y(t)+sz(t))ds\right)|z_j(t)| \\
&\qquad+\sum_{j=1,j\ne i}^{n}\left(\int_0^1\left|\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(t,y(t)+sz(t))\right|ds\right)|z_j(t)| \\
&+\sum_{k=0}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{(k)}(t)|z_j(t-h_k(t))|\right)+v_i(t) \\
&\le b_{ii}|z_i(t)|+\sum_{j=1,i\ne j}^{n}b_{ij}|z_j(t)| \\
&+\sum_{k=0}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{(k)}(t)|z_j(t-h_k(t))|\right)+v_i(t),
\end{aligned}$$

đối với hầu khắp $t \ge t_0$. Điều này kéo theo

$$\begin{aligned}
&\le b_{ii}|z_i(t)|+\sum_{j=1,j\ne i}^{n}b_{ij}|z_j(t)| \\
&+\sum_{k=0}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{(k)}(t)|z_j(t-h_k(t))|\right)+v_i(t)
\end{aligned}$$

với $t \ge t_0$.

Với $p := (p_1, p_2, ..., p_n)^T, p_i > 0, i \in \underline{n}$, đặt $K := \|\varphi - \psi\| p_{\min}^{-1} > 0$. Từ (2.16), ta có

$$D^+ |z_{i_0}(t_1)| \le b_{i_0 i_0} u_{i_0}(t_1) + \sum_{j=1, j\ne i_0}^{n} b_{i_0 j} u_j(t_1)$$

$$+\sum_{k=0}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j}^{(k)}(t_1) u_{i_0}(t_1 - h_k(t_1))\right) + v_{i_0}(t)$$

$$= b_{i_0 i_0} K e^{-\beta(t_1 - t_0)} p_{i_0} + \sum_{j=1, j\ne i_0}^{n} b_{i_0 j} K e^{-\beta(t_1 - t_0)} p_j$$

$$+\sum_{k=0}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j}^{(k)}(t_1) K e^{-\beta(t_1 - h_k(t_1) - t_0)} p_j\right)$$

$$+ b_{i_0 i_0}\frac{\mu}{p_{\min}} p_{i_0} + \sum_{j=1, j\ne i_0}^{n} b_{i_0 j}\frac{\mu}{p_{\min}} p_j$$

$$+\sum_{k=0}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j}^{(k)}(t_1)\frac{\mu}{p_{\min}} p_j\right) + v_{i_0}(t_1)$$

$$= K e^{-\beta(t_1 - t_0)}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{i_0 j} p_j + \sum_{k=0}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j}^{(k)}(t_1) e^{\beta h_j(t_1)} p_j\right)\right)$$

$$+\frac{\mu}{p_{\min}}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{i_0 j} p_j + \sum_{k=0}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j}^{(k)}(t_1) p_j\right)\right) + v_{i_0}(t_1)$$

$$\le K e^{-\beta(t_1 - t_0)}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{i_0 j} p_j + \sum_{k=0}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j}^{(k)}(t_1) e^{\beta h} p_j\right)\right)$$

$$+\frac{\mu}{p_{\min}}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{i_0 j} p_j + \sum_{k=0}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j}^{(k)}(t_1) e^{\beta h} p_j\right)\right) + \frac{\mu}{p_{\min}} p_{i_0}$$

$$\le K e^{-\beta(t_1 - t_0)}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{i_0 j} p_j + e^{\beta h}\sum_{j=1}^{n} b_{i_0 j} p_j\right)$$

$$+\frac{\mu}{p_{\min}}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{i_0 j} p_j + e^{\beta h}\sum_{j=1}^{n} c_{i_0 j} p_j\right) + \frac{\mu}{p_{\min}} p_{i_0}$$

$$+\frac{\mu}{p_{\min}}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{i_0 j} p_j + e^{\beta h}\sum_{j=1}^{n} c_{i_0 j} p_j\right) + \frac{\mu}{p_{\min}} p_{i_0}$$

$$< -\beta K e^{-\beta(t_1 - t_0)} p_{i_0} + \frac{\mu}{p_{\min}}(-\beta p_{i_0}) + \frac{\mu}{p_{\min}}\beta p_{i_0}$$

$$= -\beta K e^{-\beta(t_1 - t_0)} p_{i_0} = \dot{u}(t_1).$$

Mặt khác, (2.16) kéo theo điều sau

$$D^+ |z_{i_0}(t_1)| = \limsup_{t \to t_1^+}\frac{|z_{i_0}(t)| - |z_{i_0}(t_1)|}{t - t_1}$$

$$\ge \overline{\lim_{j\to\infty}}\frac{|z_{i_0}(\xi_j)| - |z_{i_0}(t_1)|}{\xi_j - t_1}$$

$$\ge \overline{\lim_{j\to\infty}}\frac{u_{i_0}(\xi_j) - u_{i_0}(t_1)}{\xi_j - t_1}$$

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{u_{i_0}(\xi_k) - u_{i_0}(t_1)}{\xi_k - t_1} = \dot{u}_{i_0}(t_1)$$

$$= \dot{z}_{i_0}(t_1) = D^+ z_{i_0}(t_1).$$

Điều này là mâu thuẫn với kết quả vừa được chứng minh ở trên. Do đó, $z(t) \le e^{-\beta(t-t_0)}\|\varphi - \psi\|\frac{p}{p_{\min}} + \mu\frac{p}{p_{\min}}, t \ge t_0.$

Do tính đơn điệu của chuẩn véctơ trong $\mathbb{R}^n$ nên,

$$\|z(t)\| = \|x(t) - y(t)\|$$

$$\le M e^{-\beta(t-t_0)}\|\varphi - \psi\| + \eta, t \ge t_0,$$

với $\eta = \mu p_{\min}^{-1}\|p\|$. Vậy (2.1) là co suy rộng.

Ngoài ra, khi $v(\cdot) \equiv 0$ kéo theo $\mu = 0$ và $\eta = \mu p_{\min}^{-1}\|p\| = 0$. Khi đó, hệ (2.1) là co toàn cục.

Ta có hệ quả sau đây về tính co suy rộng của hệ phương trình vi phân nửa tuyến tính.

Hệ quả 2.4. *Cho $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là ma trận Metzler và $F(t,x) \equiv Bx,\ t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n$. Giả sử tồn tại $A_k \in \mathbb{R}_+^{n\times n}, k \in \underline{m}_0$ và hàm liên tục, bị chặn $v(\cdot): \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ sao cho*

$$|G(t, u_0, ..., u_m) - G(t, w_0 .., w_m)| \le \sum_{k=0}^{m} A_k |u_k - w_k| + v(t), \quad (2.17)$$

với mọi $t \in \mathbb{R}, u_k, w_k \in \mathbb{R}^n, k \in \underline{m}_0$. Khi đó, nếu $\mu\left(B + \sum_{k=0}^{m} A_k\right) < 0$ thì hệ (2.1) là co suy rộng. Ngoài ra, nếu $v(\cdot) \equiv 0$ thì hệ (2.1) là co toàn cục.

Xét hệ phương trình vi phân tuyến tính có chậm

$$\dot{x}(t) = A_0(t)x(t) + \sum_{k=1}^{m} A_k(t)x(t-h_k(t)) + \chi(t),\ t \geq t_0, \quad (2.18)$$

trong đó, $A_k(\cdot):\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{n\times n}, k\in \underline{m}_0$ là các hàm ma trận cho trước; $\chi(\cdot):\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ là hàm véctơ liên tục, bị chặn.

Với $D=(d_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n}$, ta đặt ma trận Metzler hóa của ma trận D là ma trận Metzler, ký hiệu bởi $Met(\mathrm{D})$, được xác định như sau $Met(D)=(\bar{d}_{ij})_{n\times n}$, với $\bar{d}_{ii}=d_{ii}, \bar{d}_{ij}=|d_{ij}|,\quad i\neq j, i,j\in\underline{n}$. Sau đây là điều kiện cho tính co của (2.18).

Hệ quả 2.5. *Giả sử tồn tại ma trận Metzler* $B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ *và các ma trận không âm* $C_k\in\mathbb{R}_+^{n\times n}, k\in\underline{m}$, *sao cho*

$$Met(A_0(t))\leq B;\ |A_k(t)|\leq C_k,\quad \forall k\in\underline{m}, t\in\mathbb{R}. \quad (2.19)$$

Khi đó, nếu $\mu\left(B+\sum_{k=0}^{m}C_k\right)<0$ *thì hệ* (2.18) *là co toàn cục.*

Ví dụ 2.6. Xét phương trình vi phân vô hướng

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (-1-e^{t^2})x(t) + e^{-\cos^2(\frac{2tx(t)}{1+t^2})}\\ &+ \arctan\left(\frac{2}{5}\sin(tx(t))x(t-h_1(t)) + \frac{1}{5+2t^2}x(t-h_2(t))\right)\\ &+ 3\alpha\cos(tx(t)), \end{aligned} \quad (2.20)$$

với $t\in\mathbb{R}_+$, $h_1(\cdot)$, $h_2(\cdot):\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ là những hàm liên tục, bị chặn cho trước; α là hằng số.

Ta thấy (2.20) là phương trình vi phân phi tuyến phụ thuộc thời gian có dạng (2.1), với hàm $F(\cdot,\cdot), G(\cdot,...,\cdot)$ là các hàm liên tục, được xác định bởi

$$F(t,u) := (-1-e^{t^2})u + e^{-\cos^2(\frac{2tu}{1+t^2})},\quad t\in\mathbb{R}_+, u\in\mathbb{R};$$

$$G(t,x_0,x_1,x_2) := \arctan\left(\frac{2}{5}\sin(tx_0)x_1 + \frac{1}{5+2t^2}x_2\right) + 3\alpha\cos(tx_0),\quad t\in\mathbb{R}_+, x_1,x_2\in\mathbb{R}.$$

Ta có,

$$\frac{\partial F}{\partial u}(t,u) = -1-e^{t^2} + \frac{2t}{1+t^2}\sin(\frac{4tu}{1+t^2})\mathrm{e}^{-\cos^2(\frac{2tu}{1+t^2})} \leq B := -1,$$

với mọi $t,u\in\mathbb{R}$ và

$$\begin{aligned}|G(t,x_0,x_1,x_2)-G(t,y_0,y_1,y_2)| &\leq \frac{e^{-t^2}}{2}|x_0-y_0| + \frac{2}{5}|x_1-y_1|\\ &+ \frac{1}{5+t^2}|x_2-y_2| + 6|\alpha|,\end{aligned}$$

với mọi $t\in\mathbb{R}_+, x_0,x_1,x_2,y_0,y_1,y_2\in\mathbb{R}$.

Vậy (2.4) được thỏa mãn với $A_1(t)=\frac{e^{-t^2}}{3}$, $A_2(t)=\frac{2}{5}$, $A_3(t)=\frac{1}{5+2t^2}$ và $v(t)=6|\alpha|$, với mọi $t\in\mathbb{R}$.

Mặt khác, ta có

$$A_0(t)+A_1(t)+A_2(t)\leq C := \frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=\frac{14}{15}$$

và $\mu(B+C) = -1+\frac{14}{15} = -\frac{1}{15} < 0$.

Do đó, theo Định lí 2.3, phương trình vi phân (2.21) là co suy rộng. Ngoài ra, khi $\alpha=0$ thì $v(\cdot)\equiv 0$, khi đó (2.21) là co toàn cục.

Nhận xét 2.7. Các kết quả trong (Ngoc, 2015) và (Ngoc & Trinh, 2018) cũng như trong các tài liệu tham khảo trong bài báo này là không áp dụng được để kiểm tra điều kiện co suy rộng của phương trình vi phân (2.20).

3. Kết luận

Bài báo đã đưa ra khái niệm co suy rộng, một khái niệm tổng quát hơn của khái niệm co của nghiệm đối với hệ phương trình vi phân có chậm rời rạc, các chậm là hàm phụ thuộc thời gian. Bài báo cũng đã phát triển kĩ thuật trong (Ngoc, 2015) và (Ngoc & Trinh, 2018) để chứng minh nhiều điều kiện cho tính co suy rộng của hệ phương trình vi phân phi tuyến có chậm. Hướng phát triển của bài báo là nghiên cứu các điều kiện co suy rộng của lớp hệ phương trình vi phân trong một số không gian trừu tượng, điều kiện co suy rộng của lớp hệ phương trình vi phân dạng trung hòa, hệ phương trình vi tích phân, hệ có yếu tố ngẫu nhiên. Tìm điều kiện cực tiểu hóa biên co của lớp hệ co suy rộng cũng là một số vấn đề mở cần được khai thác trong thời gian tới.

Lời cảm ơn: Bài báo được hỗ trợ bởi đề tài khoa học và công nghệ cấp bộ của Bộ Giáo dục và Đào tạo mã số B2020.SPD.04.

Tài liệu tham khảo

Aminzare, Z., & Sontag, E. D. (2015). Contraction methods for nonlinear systems: A brief introduction and some open problems. *Proceedings of 53rd IEEE Conference on Decision and Control*, 3835-3847.

Hale, J. K., & Lunel, S. M. V. (1993). *Introduction to functional differential equations*. New York: Springer.

Ky, T. Q. (2021). Exponential contraction of switching jump diffusions with a hidden Markov chain. *Statistics and Probability Letters*, 109191.

Lohmiller, W., & Slotine, J. J. E. (1998). On contraction analysis for nonlinear systems. *Automatica*, *34*, 683-696.

Ngoc, P. H. A. (2021). Contraction of stochastic differential equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, *95*, 105613.

Ngoc, P. H. A. (2015). Novel criteria for exponential stability of nonlinear differential systems with delay. *IEEE Transactions on Automatic Control* , *60*, 485-490.

Ngoc, P. H. A. (2012). Stability of positive differential systems with delay. *IEEE Transactions on Automatic Control*, *58*(1), 203-209.

Ngoc, P. H. A., Trinh, H, Hieu, L. T., & Huy, N. D. (2019). On contraction of nonlinear difference systems with time-varying delays, *Mathematische Nachrichten*, *292*(4), 859-870.

Ngoc P. H. A., & Trinh, H. (2018). On contraction of functional differential equations. *SIAM Journal on Control and Optimization*, *56*(3), 2377-2397.

Thúy, Đ. L., Tình, C. T, Hiếu, L. T., & Vân, L. H. M. (2020). Điều kiện đủ cho tính chất epsilon-co của một lớp hệ phương trình sai phân phi tuyến với biến liên tục. *Science and Technology Development Journal - Natural Sciences*, *3*(3), 213-224.