PHƯƠNG PHÁP TÌM SỐ HẠNG TỔNG QUÁT CỦA MỘT DÃY SỐ

• ThS. Vương Vĩnh Phát(*)

Tóm tắt

Trong một số bài toán về dãy số, học sinh thường gặp dạng toán cho dãy số $\left(a_n\right)$ bằng công thức, từ đó yêu cầu học sinh tính số hạng thứ nhất, thứ hai... của dãy số. Đây là bài toán không khó đối với học sinh. Tuy nhiên, bài toán sẽ khó hơn khi cho trước một vài số hạng của dãy số và yêu cầu tìm số hạng tổng quát của dãy. Trong bài báo này, chúng tôi không chỉ giới thiệu cách tìm số hạng tổng quát của dãy số dựa vào phương pháp sai phân mà còn nêu ứng dụng cách tìm số hạng tổng quát vào bài toán tính tổng của một dãy số.

Từ khóa: Dãy số, sai phân, qui nạp.

1. Đặt vấn đề

Xuất phát từ bài toán "Cho tập hợp $B = \left\{2, 6, 12, , 20, 30\right\}$. Hãy xác định B bằng cách chỉ ra một tính chất đặc trưng cho các phần tử của nó" [1, tr. 13] và bài toán "Viết mỗi tập hợp sau bằng cách chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của nó: $A = \left\{2; 3; 5; 7\right\}$, $B = \left\{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\right\}$, $C = \left\{-5; 0; 5; 10; 15\right\}$" [2, tr. 21].

Vấn đề đặt ra là: Nếu cho bài tập tương tự nhưng đổi tập hợp là: $E = \left\{6; 24; 60; 120; 210\right\}$, $F = \left\{-2; 2; 18; 52; 110\right\}$... thì làm thế nào để học sinh tìm được tính chất đặc trưng cho các phần tử của các tập hợp đó?

Mặt khác, trong [3, tr. 105] có bài toán "Cho dãy số $\left(u_n\right)$ với $u_n = \dfrac{2n^2 - 3}{n}$. Hãy tìm 5 số hạng đầu của dãy số $\left(u_n\right)$".

Khi đó học sinh chỉ cần cho n = 1, n = 2, n = 3, n = 4, n = 5 thì các em dễ dàng tìm được 5 số hạng đầu của dãy số $\left(u_n\right)$ là: $u_1 = -1$, $u_2 = \dfrac{5}{2}, u_3 = 5, u_4 = \dfrac{29}{4}, u_5 = \dfrac{47}{5}$.

Nhưng nếu ta cho trước dãy số $\left(u_n\right)$ biết $u_1 = -1, u_2 = \dfrac{5}{2}, u_3 = 5, u_4 = \dfrac{29}{4}, u_5 = \dfrac{47}{5}$. Yêu cầu học sinh tìm số hạng tổng quát của dãy số trên. Đây chính là một tình huống khó đối với học sinh. Vậy làm thế nào để tìm ra được số hạng tổng quát của dãy số?

Ta có thể xem các phần tử của tập hợp là các số hạng $u_1, u_2, ..., u_n ...$ của một dãy số. Vậy để tìm được tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp ta tìm số hạng tổng quát thứ n của dãy số theo n.

2. Nội dung chính

2.1. Chỉ ra tính chất đặc trưng của tập hợp

Ví dụ 1 [2, tr. 21]. Cho tập hợp $A = \left\{-5; 0; 5; 10; 15\right\}$. Hãy chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp A.

Giải

-5		0		5		10		15	Dòng 1 (1)
	5		5		5		5		Dòng 2 (2)

Khi ta lấy số hạng đứng sau trừ số hạng đứng ngay trước nó của dòng (1) thì ta được dòng (2).

Do chỉ có một dòng khác nhau nên số hạng tổng quát của các phần tử của A có dạng bậc nhất.

Giả sử $u_n = an + b$.

Ta có:

$$\begin{cases} u_1 = -5 \\ u_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a.1 + b = -5 \\ a.2 + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = -10 \end{cases}$$

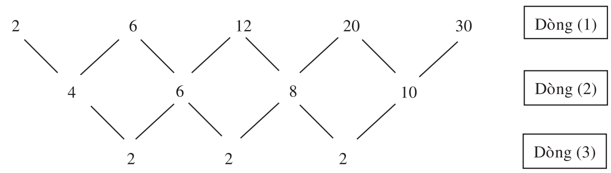
Vậy số hạng tổng quát là: $u_n = 5n - 10$.

Nên $A = \left\{5n - 10 \middle| n \in \mathbb{N}, 1 \le n \le 5\right\}$.

(*) Khoa Sư phạm, Trường Đại học An Giang.

Ví dụ 2 [1, tr. 13]. Cho tập hợp $B = \{2; 6; 12; 20; 30\}$. Hãy chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp B.

Giải



Do có hai dòng khác nhau (dòng 1 và dòng 2) nên số hạng tổng quát của các phần tử của B có dạng bậc hai.

Giả sử $u_n = an^2 + bn + c$.

Ta có:

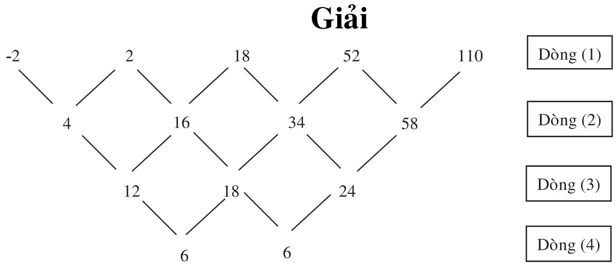
$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_2 = 6 \\ u_3 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a.1^2 + b.1 + c = 2 \\ a.2^2 + b.2 + c = 6 \\ a.3^2 + b.3 + c = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 0. \end{cases}$$

Vậy $u_n = n^2 + n$ nên

$$B = \left\{ n^2 + n \,\middle|\, n \in \mathbb{N}, 1 \le n \le 5 \right\}.$$

Ví dụ 3 [5, tr. 383]. Cho tập hợp $C = \{-2; 2; 18; 52; 110\}$. Hãy chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp C.

Giải



Do có ba dòng khác nhau (dòng 1, 2 và 3) nên số hạng tổng quát của các phần tử của C có dạng bậc ba.

Giả sử $u_n = an^3 + bn^2 + cn + d$.

Ta có:

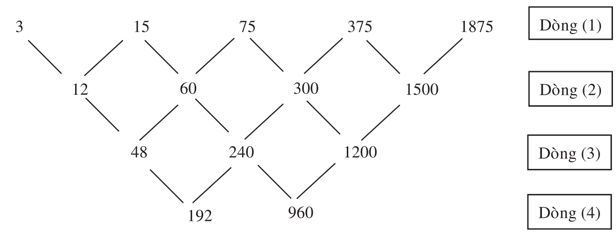
$$\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_2 = 2 \\ u_3 = 18 \\ u_4 = 52 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c + d = -2 \\ 8a + 4b + 2c + d = 2 \\ 27a + 9b + 3c + d = 18 \\ 64a + 16b + 4c + d = 52 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -3 \\ d = 0. \end{cases}$$

Vậy $u_n = n^3 - 3n$ nên

$$C = \left\{ n^3 - 3n \,\middle|\, n \in \mathbb{N}, 1 \le n \le 5 \right\}.$$

Ví dụ 4 [5, tr. 383]. Cho tập hợp $D = \{3; 15; 75; 375; 1875\}$. Hãy chỉ ra tính chất của tập hợp D.

Giải



Khi ta dùng kỹ thuật như trên thì không có dòng nào giống nhau nên số hạng tổng quát của các phần tử của D có dạng hàm mũ.

Lấy $\dfrac{960}{192} = 5$ nên $u_n = a.5^{n-1}$. Ta tìm a dựa vào giả thiết $u_1 = 3 \Leftrightarrow 3 = a.5^{1-1} \Leftrightarrow a = 3$.

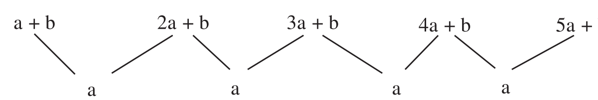
Vậy $u_n = a.5^{n-1}$ nên

$$D = \left\{ 3.5^{n-1} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}, 1 \le n \le 5 \right\}.$$

2.2. Chứng minh

▪ Xét hàm số $u_n = an + b$

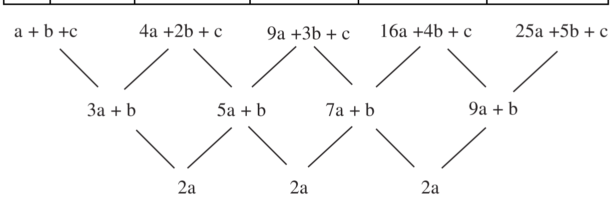
n	1	2	3	4	5
u_n	a + b	2a + b	3a + b	4a + b	5a + b



Vậy hàm số bậc nhất sẽ có một dòng khác nhau.

▪ Xét hàm số $u_n = an^2 + bn + c$

n	1	2	3	4	5
u_n	a + b + c	4a + 2b + c	9a + 3b + c	16a +4 b +c	25a + 5b + c



Vậy hàm số bậc hai sẽ có hai dòng khác nhau.

Tổng quát: Nếu số hạng tổng quát có dạng đa thức thì bậc của đa thức bằng số dòng khác nhau của đa thức.

2.3. Ứng dụng của việc tìm số hạng tổng quát của một dãy số

Tính các tổng sau bằng cách dùng phương pháp qui nạp không hoàn toàn để dự đoán kết quả và chứng minh kết quả dự đoán đó bằng qui nạp toán học:

1 [4. tr. 55]**.** Tính tổng

$S_n = 1.2 + 2.3 + ... + n(n+1).$

Ta có: $S_1 = 2,\ \ S_2 = 8,\ \ S_3 = 20,\ \ S_4 = 40,$ $S_5 = 70.$

Từ đó ta dự đoán S_n có dạng bậc ba

2 8 20 40 70

6 12 20 30

6 8 10

2 2

Giả sử $S_n = an^3 + bn^2 + cn + d.$

Ta có:

$$\begin{cases} S_1 = 2 \\ S_2 = 8 \\ S_3 = 20 \\ S_4 = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c+d = 2 \\ 8a+4b+2c+d = 8 \\ 27a+9b+3c+d = 20 \\ 64a+16b+4c+d = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{3} \\ b = 1 \\ c = \dfrac{2}{3} \\ d = 0. \end{cases}$$

Vậy

$$S_n = \frac{1}{3}n^3 + n^2 + \frac{2}{3}n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.\ (*)$$

Ta chứng minh mệnh đề (*) đúng bằng qui nạp.

+ Với n = 1 thì $S_1 = 2$ và $\dfrac{1.2.3}{3} = 2$ nên mệnh đề (*) đúng với n =1.

+ Giả sử mệnh đề (*) đúng với n = k, tức là ta có: $S_k = \dfrac{k(k+1)(k+2)}{3}.$

Ta chứng minh (*) đúng với n = k + 1, tức là chứng minh:

$$S_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}.$$

Thật vậy:

$$S_{k+1} = 1.2 + 2.3 + ... + k(k+1) + (k+1)(k+2) = S_k + (k+1)(k+2)$$

$$\Leftrightarrow S_{k+1} = \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

Nên mệnh đề (*) đúng với n = k + 1. Theo nguyên lí quy nạp, mệnh đề (*) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Vậy ta tính được $S_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}.$

2 [4, tr. 56]**.** Tính tổng

$$S_n = \frac{1^2}{1.3} + \frac{2^2}{3.5} + ... + \frac{n^2}{(2n-1).(2n+1)}.$$

Ta có: $S_1 = \dfrac{1}{3},\ \ S_2 = \dfrac{3}{5},\ \ S_3 = \dfrac{6}{7},\ \ S_4 = \dfrac{10}{9},$ $S_5 = \dfrac{15}{11}.$

Để dự đoán S_n theo *n* ta dựa vào tử số

1 3 6 10 15

2 3 4 5

1 1 1

Tử số có dạng bậc hai nên giả sử: $a_n = an^2 + bn + c$

Ta có:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 3 \\ a_3 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c = 1 \\ 4a+2b+c = 3 \\ 9a+3b+c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = \dfrac{1}{2} \\ c = 0 \end{cases}.$$

Vậy $a_n = \dfrac{n(n+1)}{2}.$

Mẫu số:

3 5 7 9 11

2 2 2 2

Mẫu số có dạng bậc nhất nên giả sử: $b_n = an + b.$

Ta có:

$$\begin{cases} b_1 = 3 \\ b_2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = 3 \\ 2a+b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow b_n = 2n+1.$$

Vậy dự đoán $S_n = \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)}.\ (*)$

Ta chứng minh mệnh đề (*) đúng bằng qui nạp.

+ Với n = 1 thì $S_1 = \dfrac{1}{3}$ và $\dfrac{1.2}{2.3} = \dfrac{1}{3}$ nên mệnh đề (*) đúng với n =1.

+ Giả sử mệnh đề (*) đúng với n = k, tức là ta có: $S_k = \frac{k(k+1)}{2(2k+1)}$

Ta chứng minh (*) đúng với n = k + 1, tức là chứng minh: $S_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)}$

Thật vậy:

$$S_{k+1} = \frac{1^2}{1.3} + \frac{2^2}{3.5} + \ldots + \frac{k^2}{(2k-1).(2k+1)} + \frac{(k+1)^2}{(2k+1).(2k+3)}$$

$$\Leftrightarrow S_{k+1} = S_k + \frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$= \frac{k(k+1)}{2(2k+1)} + \frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{(k+1)}{(2k+1)}\left[\frac{k}{2} + \frac{k+1}{2k+3}\right]$$

$$\Leftrightarrow S_{k+1} = \frac{(k+1)}{(2k+1)}\left[\frac{2k^2+5k+2}{2(2k+3)}\right]$$

$$= \frac{(k+1)(2k+1)(k+2)}{2(2k+1)(2k+3)} = \frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)}$$

Nên mệnh đề (*) đúng với n = k + 1. Theo nguyên lí quy nạp, mệnh đề (*) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Vậy ta tính được $S_n = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$.

2.4. Bài tập tương tự

1 [5, tr. 382]**.** Hãy tìm số hạng tổng quát của các dãy số sau biết các số hạng của dãy lần lượt là:

a) 0, 3, 12, 27, 48... b) 2, 6, 18, 54, 162...
c) 4, 21, 62, 139, 264...

Đáp số: a) $a_n = 3(n-1)^2$, b) $a_n = 2.3^{n-1}$, c) $a_n = 2n^3 + 3n - 1$.

2 [4, tr. 55]**.** Dùng phép quy nạp không hoàn toàn để dự đoán kết quả của S_n và chứng minh kết quả dự đoán đó đúng bằng qui nạp trong các trường hợp sau:

a) $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$

b) $S_n = 1.4 + 4.7 + \ldots + (3n-2)(3n+1)$

c) $S_n = \left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$

d) $S_n = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

Đáp số: a) $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, b) $S_n = 3n^3 + 3n^2 - 2n$, c) $S_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$, d) $S_n = \frac{n}{3n+1}$.

3. Kết luận

Việc chỉ ra tính chất đặc trưng của tập hợp có thể đưa về bài toán tìm số hạng tổng quát của dãy số. Dựa vào các số hạng thứ nhất, thứ hai... của dãy số ta có thể tìm được số hạng tổng quát dựa trên phương pháp sai phân. Hơn nữa, kết quả này còn có thể ứng dụng để tính tổng của một dãy số theo n.

Tài liệu tham khảo

[1]. Trần Văn Hạo (2006), *Sách giáo khoa Đại số 10*, NXB Giáo dục, Hà Nội.

[2]. Đoàn Quỳnh (2006), *Sách giáo khoa Đại số 10 nâng cao*, NXB Giáo dục, Hà Nội.

[3]. Đoàn Quỳnh (2006), *Sách giáo khoa Đại số và giải tích 11 nâng cao*, NXB Giáo dục, Hà Nội.

[4]. Nguyễn Đức Đồng, Nguyễn Văn Vĩnh (2001), *Logic Toán,* NXB Thanh Hóa.

[5]. David Coffey (2005), *Outcomes: MATHEMATICS 10 CSF II*, Harcourt Education.

METHOD TO FIND THE Nth TERM IN A SEQUENCE

Summary

In some sequence problems, students usually encounter sequences (a_n), showed by a mathematical formula, requiring them to find the first term, the second term, and so on in a sequence. This type of problems is not hard for students. However, it becomes harder when some terms of the sequence are firstly provided and students are required to find out the sequence's nth term. In this paper, we not only introduce a method to find the sequence's nth term by common difference, but also apply it to calculate the sum of a sequence.

Keyword: Sequence, common difference, induction.