MỘT SỐ LƯU Ý VỀ XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

• ThS. Nguyễn Đình Inh(*)

Tóm tắt

Xác suất có điều kiện là một trong những nội dung cơ bản của Lý thuyết xác suất. Bài viết này phân tích những hạn chế trong một số cách tiếp cận về xác suất có điều kiện thường gặp. Đặc biệt, bài viết đưa ra một cách mô phỏng cho công thức xác suất có điều kiện trong trường hợp tổng quát (các biến cố sơ cấp không nhất thiết đồng khả năng cũng như số biến cố sơ cấp không nhất thiết hữu hạn).

Từ khóa: công thức xác suất có điều kiện, mô hình cổ điển, đồng khả năng.

1. Hai cách trình bày về xác suất có điều kiện thường gặp

Các tài liệu về xác suất thường định nghĩa xác suất có điều kiện bằng một trong hai cách sau đây:

Cách thứ nhất: *Xác suất của biến cố B tính trong điều kiện biến cố A đã xảy ra được gọi là xác suất của biến cố B với điều kiện biến cố A và ký hiệu là P(B|A).*

Cách thứ hai: *Cho A là biến cố có xác suất lớn hơn 0. Xác suất của biến cố B với điều kiện biến cố A, ký hiệu là $P(B \mid A)$, là số được xác định bởi công thức:*

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \qquad (1)$$

Công thức (1) *gọi là công thức xác suất có điều kiện.*

Ta tạm gọi định nghĩa theo cách thứ nhất là định nghĩa bằng ý nghĩa, hay định nghĩa "bằng lời", định nghĩa theo cách thứ hai là định nghĩa bằng công thức.

Định nghĩa "bằng lời" đảm bảo tính trực quan, thể hiện đúng bản chất của xác suất có điều kiện nhưng chỉ áp dụng được cho một số bài toán đơn giản với mô hình xác suất cổ điển. Trong nhiều trường hợp, dùng định nghĩa thuần túy bằng lời không giải quyết được, chẳng hạn dạng bài sau đây:

Ví dụ 1. Một người tham dự 2 vòng thi. Khả năng đậu vòng 1 là 0,8; khả năng đậu cả 2 vòng là 0,6. Tính xác suất người này đậu vòng 2 biết anh ta đã đậu vòng 1.

Bài toán này không thuộc mô hình cổ điển. Thực chất các xác suất người dự thi đậu vòng 1 cũng như đậu cả hai vòng chỉ có được bằng cách thống kê mà không phải do tính toán từ định nghĩa xác suất cổ điển, ở đây ta không biết số trường hợp đồng khả năng có thể xảy ra hay số trường hợp thuận lợi nên không thể tính trực tiếp được xác suất người dự thi đậu vòng 2 khi đã đậu vòng 1 nếu chỉ dùng định nghĩa "bằng lời" thuần túy. Để "giải quyết", các tác giả theo trường phái định nghĩa "bằng lời" ([1]) thường phát biểu thêm công thức (1), dưới dạng một định lý và "chứng minh" như sau:

Xét trường hợp không gian mẫu gồm hữu hạn biến cố sơ cấp đồng khả năng (mô hình cổ điển), gọi số trường hợp có thể xảy ra, số trường hợp thuận lợi cho biến cố A, số trường hợp thuận lợi cho biến cố B, số trường hợp thuận lợi cho biến cố AB trong phép thử lần lượt là n, n_A, n_B, n_{AB}. Do đó, trong tình huống biến cố A đã xảy ra, số trường hợp có thể xảy ra bị thu hẹp thành n_A còn số trường hợp thuận lợi cho B chính là n_{AB} nên xác suất của biến cố B tính trong điều kiện biến cố A đã xảy ra sẽ bằng $\frac{n_{AB}}{n_A}$. Mặt khác cũng có $\frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{n_{AB}}{n}}{\frac{n_A}{n}} = \frac{n_{AB}}{n_A}$ nên xác suất của biến cố B tính trong điều kiện biến cố A đã xảy ra chính là $\frac{P(AB)}{P(A)}$, tức vế

(*) Trường Đại học Công nghiệp Thực phẩm Thành phố Hồ Chí Minh.

phải của (1). Quay về Ví dụ 1, gọi A và B lần lượt là các biến cố người dự thi đậu vòng 1 và 2, áp dụng công thức (1) có xác suất cần tính là

$$P(B\,|\,A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0,6}{0,8}=0,75.$$

Ta thấy sự bất hợp lý trong cách giải quyết trên: chỉ giải thích được công thức trong mô hình cổ điển nhưng lại áp dụng công thức để giải bài toán không thuộc mô hình cổ điển.

Đối với cách tiếp cận thứ hai (định nghĩa xác suất có điều kiện bằng công thức), bất hợp lí đầu tiên là nó không giải thích được bản chất của xác suất có điều kiện. Tại sao xác suất xác định bởi công thức (1) lại mang ý nghĩa là xác suất của biến cố B với điều kiện biến cố A đã xảy ra? Các tác giả trình bày xác suất có điều kiện theo cách này thường dẫn dắt ra công thức (1) bằng một ví dụ mở đầu thuộc mô hình cổ điển rồi áp đặt xác suất có điều kiện trong mọi mô hình đều định nghĩa bằng công thức (1) ([3], [4], [6], [7]). Cũng có tác giả ([5]) không dùng ví dụ mở đầu mà đưa ra ngay định nghĩa theo công thức (1), sau đó cố gắng lí giải ý nghĩa của công thức (1) như sau: *biến cố A cùng với biến cố B chính là biến cố AB tức là "cả hai cùng xảy ra". Ta có thể coi A và B là hai tập con của một không gian xác suất Ω ban đầu. Các tập con (đo được theo độ đo xác suất P) của A chính là các biến cố với điều kiện A được thỏa mãn. Khi đặt điều kiện A tức là đã hạn chế không gian xác suất từ Ω xuống còn A và hạn chế biến cố B xuống còn AB. Xác suất của B với điều kiện A chính là xác suất của AB trong không gian xác suất mới với một độ đo xác suất $P_1 : P(B\,|\,A)=P_1(AB)$. Trong đó, độ đo xác suất P_1 được sinh ra bởi độ đo xác suất P ban đầu theo nguyên tắc "bình quân": nếu C và D là hai tập con của A (tức hai biến cố thỏa mãn điều kiện A) với cùng xác xuất $P(C)=P(D)$, thì cũng phải coi rằng chúng có cùng xác suất có điều kiện $P_1(C)=P_1(D)$. Một cách tổng quát hơn, nếu C và D là hai tập con của A, ta có công thức tỷ lệ thuận*

$$\frac{P(C)}{P(D)}=\frac{P_l(C)}{P_1(D)}.$$

Từ đó suy ra

$$\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P_1(AB)}{P_1(A)}=\frac{P_1(AB)}{1}=P_1(AB)=P(B\,|\,A).$$

Cách lí giải này dùng tới lí thuyết độ đo và định nghĩa xác suất tổng quát theo hệ tiên đề. Tuy nhiên nó không thuyết phục vì nguyên tắc "bình quân" xác suất hoàn toàn do tác giả tự đặt ra. Nói chung, không thể dùng định nghĩa xác suất theo tiên đề giải thích ý nghĩa của công thức (1), bởi định nghĩa xác suất theo tiên đề không hề nêu công thức tính cụ thể cho xác suất mà chỉ phát biểu xác suất là bất kỳ hàm tập nào thỏa mãn các điều kiện của hệ tiên đề.

Mặt khác, ngay cả khi chứng minh (trong trường hợp tổng quát) được xác suất của biến cố *B* xét trong điều kiện biến cố *A* đã xảy ra bằng vế phải của (1) thì cũng không thể suy luận ngược chiều rằng xác suất xác định bởi vế phải của (1) là xác suất của *B* với điều kiện *A*. Điều này cũng giống như diện tích hình thang cong là một tích phân xác định nhưng không thể nói mọi tích phân xác định, bất kể âm hay dương, đều là diện tích của một hình thang cong.

Như vậy, công thức (1) không bao hàm được bản chất của xác suất có điều kiện, dùng công thức (1) để định nghĩa cho xác suất có điều kiện chỉ làm cho nó có vẻ "toán học" nhưng lại không có tính trực quan. Việc xây dựng cơ sở toán chặt chẽ cho lí thuyết xác suất là cần thiết, tuy nhiên không nên "toán học hóa" quá mức làm mất đi tính trực quan của vấn đề.

Ngoài ra định nghĩa theo công thức còn hạn chế là không xét được trường hợp $P(A)=0$: công thức (1) chỉ có nghĩa trong trường hợp $P(A)>0$ trong khi xác suất có điều kiện vẫn tồn tại trong trường hợp điều kiện A có xác suất bằng 0. Chúng ta xét ví dụ sau đây:

Ví dụ 2. Chọn ngẫu nhiên một điểm trong miền phẳng giới hạn bởi hình vuông MNPQ. Tính xác suất điểm này nằm trên cạnh MN nếu biết nó nằm trên một trong bốn cạnh của hình vuông?

Giải

Gọi A là biến cố chọn được điểm trên cạnh hình vuông, B là biến cố chọn được điểm trên cạnh MN. Ta cần tính $P(B\,|\,A)$. Ta có

$$\mathrm{P}(\mathrm{A})=\frac{\text{“diện tích” các cạnh}}{\text{“diện tích” hình vuông}}=0$$

(Lưu ý rằng biến cố A ở đây có xác suất bằng 0 nhưng vẫn có thể xảy ra, ta gọi biến cố dạng này là biến cố *hầu không*). Tiếp theo ta tính $P(B\,|\,A)$:

$$P(B\,|\,A)=\frac{\text{độ dài cạnh MN}}{\text{tổng độ dài 4 cạnh hình vuông}}=\frac{1}{4}.$$

Việc không xét được xác suất của B với điều kiện A khi $P(A)=0$ không chỉ làm “mất trường hợp” mà còn gây ra những kẽ hở trong các công thức liên quan, chẳng hạn công thức nhân: $P(AB)=P(A).P(B\,|\,A)$. Rõ ràng, công thức nhân vẫn đúng trong trường hợp $P(A)=0$. Vì vậy, nếu không xét được $P(B\,|\,A)$ trong trường hợp $P(A)=0$ mà vẫn phát biểu công thức nhân cho hai biến cố A, B bất kỳ là không phù hợp.

2. Một cách mô phỏng công thức xác suất có điều kiện

Như đã phân tích, cách trình bày thứ nhất về xác suất có điều kiện chỉ áp dụng được với mô hình cổ điển còn cách thứ hai thì không lột tả được bản chất của xác suất có điều kiện. Vấn đề sẽ được giải quyết bằng cách mô phỏng công thức (1) trong trường hợp tổng quát.

Trước hết ta nhắc lại một định nghĩa xác suất theo tần suất (định nghĩa thống kê): xác suất của biến cố A chính là giới hạn của dãy tần suất xuất hiện biến cố A khi số lần thử dần ra vô hạn (luật số lớn Bernoulli đã cho thấy giới hạn này tồn tại); tức là

$$P(A)=\lim_{n\to\infty} f(A)=\lim_{n\to\infty}\frac{n_A}{n}$$

trong đó n_A là số lần xuất hiện biến cố A trong n lần thử.

Về lý thuyết, xác suất của mọi biến cố đều có thể xác định bằng định nghĩa này (xác suất người dự thi đậu vòng 1 và đậu cả 2 vòng trong Ví dụ 1 cũng chỉ được tìm bằng thống kê). Ta sẽ dùng định nghĩa xác suất theo tần suất để mô phỏng công thức (1). Thậy vậy:

Thực hiện phép thử n lần, gọi n_A, n_B, n_{AB} tương ứng là số lần các biến cố A, B, AB xảy ra. Ta có:

$$P(A)=\lim_{n\to\infty}\frac{n_A}{n};P(B)=\lim_{n\to\infty}\frac{n_B}{n};P(AB)=\lim_{n\to\infty}\frac{n_{AB}}{n}$$

Nếu biến cố A đã xảy ra, tức chỉ xét trong n_A lần có A xuất hiện. Khi đó số lần B xuất hiện chính là số lần cả A và B xuất hiện, đó chính là n_{AB}. Vậy xác suất của biến cố B với điều kiện A là:

$$P(B\,|\,A)=\lim_{n_A\to\infty}\frac{n_{AB}}{n_A}.$$

Từ hệ thức

$$\frac{n_{AB}}{n_A}=\frac{\frac{n_{AB}}{n}}{\frac{n_A}{n}},$$

cho $n\to\infty$, (để ý rằng dãy n_A không giảm và $P(A)=\lim_{n\to\infty}\frac{n_A}{n}>0$ nên $n_A\to\infty$) ta được:

$$\lim_{n_A\to\infty}\frac{n_{AB}}{n_A}=\frac{\lim_{n\to\infty}\frac{n_{AB}}{n}}{\lim_{n\to\infty}\frac{n_A}{n}}$$

hay

$$P(B\,|\,A)=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

3. Kết luận

Từ những phân tích trên, chúng ta có thể trình bày về xác suất có điều kiện như sau: phát biểu định nghĩa "bằng lời" sau đó phát biểu công thức (1) và mô phỏng bằng định nghĩa xác suất theo tần suất. Cách trình bày này sẽ đảm bảo tính trực quan và logic.

Trên đây là một vài điểm cần lưu ý về xác suất có điều kiện. Hy vọng bài viết này phần nào giúp cho bạn đọc quan tâm tới Lý thuyết xác suất có cách tiếp cận chặt chẽ, logic hơn về xác suất có điều kiện.

Tài liệu tham khảo

[1]. Lê Sĩ Đồng (2010), *Xác suất Thống kê và ứng dụng*, NXB Giáo Dục.

[2]. W. Feller (1971), *An introduction to probability theory and its applications*, volume I, third edition, John Wiley and Sons, New York.

[3]. M. Loève (1977), *Probability Theory I*, 4th edition, Springer - Verlag.

[4]. Sheldon M. Ross (2004), *Introduction to probability and statistics for engineers and scientists*, third edition, Elsevier Academic press.

[5]. Đỗ Đức Thái, Nguyễn Tiến Dũng (2010), *Nhập môn hiện đại xác suất và thống kê,* NXB Đại học Sư phạm Hà Nội.

[6]. Đặng Hùng Thắng (2009), *Mở đầu về lí thuyết xác suất*, NXB Giáo Dục.

[7]. Nguyễn Bác Văn (1997), *Mở đầu thống kê xác suất,* NXB Giáo Dục.

SOME NOTES ON CONDITIONAL PROBABILITY

Summary

Conditional probability is one of the basic contents of the Probability Theory. This paper analyzes limitations in some approaches to the common conditional probability. Especially, it offers a simulation for the conditional probability formula in general (the primary events are not necessarily of the same ability and the number of primary events is not necessarily finite).

Keywords: conditional probability formula, classical model, the same ability.

Ngày nhận bài: 03/9/2015; Ngày nhận lại: 12/10/2015; Ngày duyệt đăng: 23/10/2015.