VẬN DỤNG PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC HÓA GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐẠI SỐ - GIẢI TÍCH TRONG CHƯƠNG TRÌNH TOÁN TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

• Phạm Trọng Thư(*)

Tóm tắt

Bài viết giới thiệu phương pháp lượng giác hóa và vận dụng trong giải một số bài toán đại số - giải tích thuộc chương trình toán trung học phổ thông và các ví dụ minh họa tiêu biểu.

Từ khóa: Phương pháp lượng giác hóa, đại số, giải tích.

1. Giới thiệu

Trong chương trình toán trung học phổ thông chúng ta thường gặp rất nhiều dạng bài toán đại số và giải tích khác nhau như: giải phương trình (PT), hệ phương trình (HPT), bất phương trình (BPT), chứng minh bất đẳng thức (BĐT), tìm giá trị lớn nhất (GTLN) và giá trị nhỏ nhất (GTNN) của biểu thức. Có rất nhiều phương pháp giải các dạng bài toán trên, chẳng hạn phương pháp thế, phương pháp sử dụng biểu thức liên hợp, phương pháp sử dụng các BĐT quen thuộc, phương pháp hàm số... Trong các phương pháp giải đó có phương pháp "lượng giác hóa". Nội dung của phương pháp này là từ những bài toán khó không chứa những yếu tố lượng giác, bằng phép đổi biến phù hợp ta có thể chuyển bài toán đã cho từ phạm vi đại số sang phạm vi lượng giác nhằm giúp ta tìm được lời giải cho bài toán rất ngắn gọn, độc đáo và thú vị. Vấn đề đáng quan tâm của học sinh là những bài toán nào thích hợp cho việc lượng giác hoá. Trong bài viết này, thông qua một số ví dụ điển hình, chúng tôi muốn làm rõ cách vận dụng phương pháp lượng giác hóa để giải một lớp bài toán đại số - giải tích đã nêu trên.

2. Phương pháp lượng giác hóa

2.1. Dấu hiệu nhận biết

Chúng ta có thể sử dụng phương pháp lượng giác hóa để giải các bài toán có dấu hiệu sau đây:

- Nếu $x \in [-a; a]$ với $a > 0$ thì luôn tồn tại $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ sao cho $x = a\sin\alpha$; hoặc tồn tại $\alpha \in [0; \pi]$ sao cho $x = a\cos\alpha$.

- Nếu $|x| \geq a$ với $a > 0$ thì luôn tồn tại $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \backslash \{0\}$ sao cho $x = \frac{a}{\sin\alpha}$; hoặc tồn tại $\alpha \in [0; \pi] \backslash \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ sao cho $x = \frac{a}{\cos\alpha}$.

- Nếu $x \in \mathbb{R}$ thì luôn tồn tại $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ sao cho $x = \tan\alpha$.

- Trong đề bài xuất hiện $\sqrt{x^2-a^2}; \sqrt{a^2-x^2}; \sqrt{a \pm x}; a^2 + x^2; 2x^2 - 1; 4x^3 - 3x; \frac{2x}{1-x^2}; \frac{3x - x^3}{1-3x^2}; \frac{x+y}{1-xy}; \cdots (a > 0)$.

Trong một số bài toán thì các dấu hiệu này không xuất hiện ngay từ đầu, người giải phải tìm cách biến đổi các điều kiện hoặc các hàm số đã cho để làm xuất hiện các dấu hiệu đó.

Sau đây chúng ta xét các bài toán bằng phương pháp trên qua các ví dụ tiêu biểu.

2.2. Ví dụ

Ví dụ 1. Giải PT $x + \frac{2x}{\sqrt{x^2-4}} = \frac{35}{6}$ (1).

Lời giải

Cách 1. Điều kiện để PT (1) có nghĩa là $|x| > 2$.

Nhận xét với $x < -2$ thì vế trái của (1) là số âm nên (1) không có nghiệm trên $(-\infty; -2)$.

Với $x > 2$, PT (1) tương đương với PT:

$$6x(\sqrt{x^2-4} + 2) = 35\sqrt{x^2-4}$$

$$\Leftrightarrow 2(3x-10)\sqrt{x^2-4} + 3\left(4x - 5\sqrt{x^2-4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(3x-10)\sqrt{x^2-4} + \frac{3(100-9x^2)}{4x+5\sqrt{x^2-4}} = 0$$

(*) Cử nhân, Trường Trung học phổ thông chuyên Nguyễn Quang Diêu, Đồng Tháp.

$$\Leftrightarrow (10-3x)\left(\frac{3(10+3x)}{4x+5\sqrt{x^2-4}}-2\sqrt{x^2-4}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{10}{3} \text{ (thoả)} \\ \frac{3(10+3x)}{4x+5\sqrt{x^2-4}}=2\sqrt{x^2-4} \ (*) \end{array}\right.$$

PT (*) tương đương $10x^2-9x-70+8x\sqrt{x^2-4}=0$

$$\Leftrightarrow 8x\sqrt{x^2-4}-30+5(2x^2-7x+5)+13(2x-5)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{64x^2(x^2-4)-900}{8x\sqrt{x^2-4}+30}+5(x-1)(2x-5)+13(2x-5)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4(4x^2-25)(4x^2+9)}{8x\sqrt{x^2-4}+30}+5(x-1)(2x-5)+13(2x-5)=0$$

$$\Leftrightarrow (2x-5)\left(\frac{4(2x+5)(4x^2+9)}{8x\sqrt{x^2-4}+30}+5x+8\right)=0$$

Khi đó ta có $\frac{4(2x+5)(4x^2+9)}{8x\sqrt{x^2-4}+30}+5x+8>0,$ với mọi $x>2$, từ đó suy ra PT (*) có nghiệm là $x=\frac{5}{2}\cdot$

Đối chiếu với điều kiện ta thấy $x=\frac{10}{3}$ và $x=\frac{5}{2}$ là nghiệm của PT (1).

Cách 2. Điều kiện để PT (1) có nghĩa là $|x|>2$.

Nhận xét với $x<-2$ thì vế trái của PT (1) là số âm nên (1) không có nghiệm trên $(-\infty;\ -2)$.

Với $x>2$, PT (1) tương đương với PT $6x(\sqrt{x^2-4}+2)=35\sqrt{x^2-4}$.

Đặt $\sqrt{x^2-4}=t,\ t>0$ thì PT trên trở thành:

$$6tx+12x-35t=0 \Leftrightarrow x=\frac{35t}{6t+12} \ (*).$$

Thay (*) vào $\sqrt{x^2-4}=t$ ta được PT:

$$\left(\frac{35t}{6t+12}\right)^2-t^2=4 \ (**).$$

Khai triển (**) và rút gọn lại ta được

$$36t^4+144t^3-937t^2+576t+576=0$$

$$\Leftrightarrow (3t-8)(2t-3)(6t^2+49t+24)=0.$$

Vì $t>0$ nên PT trên có hai nghiệm $t=\frac{8}{3}$ hoặc $t=\frac{3}{2}\cdot$

Với $t=\frac{8}{3}$ thì $\sqrt{x^2-4}=\frac{8}{3}\Leftrightarrow x=\pm\frac{10}{3}\cdot$ Đối chiếu với điều kiện $x>2$, ta nhận $x=\frac{10}{3}\cdot$

Với $t=\frac{3}{2}$ thì $\sqrt{x^2-4}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow x=\pm\frac{5}{2}\cdot$ Đối chiếu với điều kiện $x>2$, ta nhận $x=\frac{5}{2}\cdot$

Vậy PT (1) có hai nghiệm là $x=\frac{10}{3},\ x=\frac{5}{2}\cdot$

Cách 3. Điều kiện để PT (1) có nghĩa là $|x|>2$.

Nhận xét với $x<-2$ thì vế trái của (1) là số âm nên (1) không có nghiệm trên $(-\infty;\ -2)$.

Với $x>2$, ta đặt $x=\frac{2}{\cos t},\ t\in\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)\cdot$

PT (1) trở thành $\frac{2}{\cos t}+\frac{4}{\cos t\sqrt{\frac{4}{\cos^2 t}-4}}=\frac{35}{6}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos t}+\frac{1}{\sin t}=\frac{35}{12}$$

$$\Leftrightarrow 12(\sin t+\cos t)=35\sin t.\cos t \ (*).$$

Lại đặt $y=\sin t+\cos t$ $\left(1<y\le\sqrt{2}\right)$

$$\Rightarrow \sin t.\cos t=\frac{y^2-1}{2}\cdot$$

PT (*) trở thành $35y^2-24y-35=0\Leftrightarrow y=\frac{7}{5}$ hoặc $y=-\frac{5}{7}$ (loại).

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin t+\cos t=\frac{7}{5} \\ \sin t.\cos t=\frac{12}{25} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sin t}+\frac{1}{\cos t}=\frac{35}{12} \\ \frac{1}{\sin t}\cdot\frac{1}{\cos t}=\frac{25}{12} \end{cases}.$$

Khi đó $\frac{1}{\sin t}$ và $\frac{1}{\cos t}$ là nghiệm của PT

$$12u^2-35u+25=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=\frac{5}{4} \\ u=\frac{5}{3} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{10}{3} \\ x=\frac{5}{2} \end{array}\right..$$

Đối chiếu với điều kiện ta thấy $x=\dfrac{10}{3}$, $x=\dfrac{5}{2}$ là nghiệm của PT (1).

Nhận xét

Sự có mặt của 3 lời giải của cùng một bài toán chắc chắn chưa phải là tối đa đối với người yêu thích giải toán. Trong một bài toán nếu biết cách nhìn, cách phân tích bài toán dưới mọi "góc", "cạnh", ta có thể thu được nhiều lời giải khác nhau. Lời giải cách 1 và cách 2 có tính chất mẫu mực, gần giống sách giáo khoa nhưng không hấp dẫn vì lời giải dài và quá khó, còn lời giải cách 3 nếu ta biết khai thác cái riêng của bài toán (chú ý đến điều kiện $x^2-4>0$) thì ta sẽ nghĩ đến việc đặt $x=\dfrac{2}{\cos t}$, $t\in\left(0;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$. Lúc đó bài toán đã cho được chuyển sang dạng lượng giác có cách giải dễ hơn.

Ví dụ 2. Giải PT $\left(71+12\sqrt{35}\right)^x=\left(6-\sqrt{35}\right)^x+3$ (2).

Lời giải

Ta thấy:

$\left(6+\sqrt{35}\right)\left(6-\sqrt{35}\right)=1$,

$\left(71+12\sqrt{35}\right)^x=\left(6+\sqrt{35}\right)^{2x}$,

$\left(6-\sqrt{35}\right)^x=\dfrac{1}{\left(6+\sqrt{35}\right)^x}\cdot$

Đặt $2t=\left(6+\sqrt{35}\right)^x>0$ (*). Khi đó PT (2) trở thành $4t^2=\dfrac{1}{2t}+3\Leftrightarrow 4t^3-3t=\dfrac{1}{2}$ (**).

Giải PT (**) trong phạm vi đại số thì rất khó, nhưng nhờ vào vế trái của PT (**) giúp ta liên tưởng đến công thức lượng giác đã biết $4\cos^3\alpha-3\cos\alpha=\cos 3\alpha$ và từ đó đặt $t=\cos\alpha$, $\alpha\in(0;\ \pi)$. Khi đó PT (**) trở thành:

$$4\cos^3\alpha-3\cos\alpha=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos 3\alpha=\frac{1}{2}.$$

$$\Leftrightarrow \alpha=\pm\frac{\pi}{9}+\frac{k2\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}$$

Vì $\alpha\in(0;\ \pi)\Rightarrow\alpha\in\left\{\dfrac{\pi}{9};\ \dfrac{5\pi}{9};\ \dfrac{7\pi}{9}\right\}\cdot$ Do đó tập nghiệm của PT (**) là $D=\{t_1;\ t_2;\ t_3\}$ với $t_1=\cos\dfrac{\pi}{9}>0$, $t_2=\cos\dfrac{5\pi}{9}<0$, $t_3=\cos\dfrac{7\pi}{9}<0$.

Từ đó ta có $2\cos\dfrac{\pi}{9}=\left(6+\sqrt{35}\right)^x$

$$\Rightarrow x=\log_{6+\sqrt{35}}\left(2\cos\frac{\pi}{9}\right).$$

Vậy PT (2) có một nghiệm duy nhất là $x=\log_{6+\sqrt{35}}\left(2\cos\dfrac{\pi}{9}\right)$.

Ví dụ 3. [3, tr. 102] Trong các nghiệm $(x;\ y;\ z;\ t)$ của hệ $\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z^2+t^2=2\\ xt+yz\geq\sqrt{2}\end{cases}$ (3), hãy tìm nghiệm sao cho tổng $y+t$ là nhỏ nhất.

Lời giải

Cách 1. Áp dụng BĐT Bunyakovsky, ta có $(xt+yz)^2\leq(x^2+y^2)(z^2+t^2)=2\Rightarrow xt+yz\leq\sqrt{2}$. Mà $xt+yz\geq\sqrt{2}$ cho nên $xt+yz=\sqrt{2}$ (*). Kết hợp PT (*) với hai PT đầu của hệ ta suy ra được $\left(z-\sqrt{2}y\right)^2+\left(t-\sqrt{2}x\right)^2=0$ (**). Do $\left(z-\sqrt{2}y\right)^2\geq 0$ và $\left(t-\sqrt{2}x\right)^2\geq 0$ nên từ (**) ta suy ra được:

$$\begin{cases}z=\sqrt{2}y\\ t=\sqrt{2}x\end{cases}.$$

Lại tiếp tục áp dụng dụng BĐT Bunyakovsky, ta có:

$$(y+t)^2=\left(y+\sqrt{2}x\right)^2\leq 3(y^2+x^2)=3.$$

$$\Rightarrow y+t\geq-\sqrt{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi:

$$\begin{cases}y+t=-\sqrt{3}\\ \sqrt{2}y=x=\dfrac{t}{\sqrt{2}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\\ t=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\end{cases}.$$

Từ đó ta có

$$x=\sqrt{2}y=-\frac{\sqrt{6}}{3},\ z=\sqrt{2}y=-\frac{\sqrt{6}}{3}\cdot$$

Vậy $\min(y+t) = -\sqrt{3}$, đạt được khi và chỉ khi $(x;\, y;\, z;\, t) = \left(-\frac{\sqrt{6}}{3};\ -\frac{\sqrt{3}}{3};\ -\frac{\sqrt{6}}{3};\ -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

Cách 2. Sự xuất hiện của hai hệ thức đầu trong giả thiết (3), cho phép ta có thể chuyển bài toán sang phạm vi lượng giác. Cụ thể như sau:

Từ điều kiện $x^2+y^2=1$ suy ra chọn được α duy nhất sao cho $x=\cos\alpha,\ y=\sin\alpha,\ \alpha\in[0;\ 2\pi]$.

Tương tự $z^2+t^2=2$ suy ra chọn được β duy nhất sao cho $z=\sqrt{2}\cos\beta,\ t=\sqrt{2}\sin\beta,\ \beta\in[0;\ 2\pi]$.

Thay x, y, z, t vào $xt+yz\ge\sqrt{2}$ ta có $\sqrt{2}\cos\alpha\sin\beta+\sqrt{2}\sin\alpha\cos\beta\ge\sqrt{2}$ hay $\sin(\alpha+\beta)\ge 1$ $\Rightarrow \sin(\alpha+\beta)=1$

$$\Rightarrow \alpha+\beta=\frac{\pi}{2}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Do đó ta có $\sin\alpha=\cos\beta,\ \cos\alpha=\sin\beta$ và $y+t=\sin\alpha+\sqrt{2}\sin\beta=\sin\alpha+\sqrt{2}\cos\alpha$

$$=\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\alpha+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cos\alpha\right).$$

Vì $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2=1$ nên tồn tại góc φ sao cho $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}},\ \sin\varphi=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot$

Khi đó $y+t=\sqrt{3}\sin(\alpha+\varphi)$ đạt GTNN bằng $-\sqrt{3}$ khi và chỉ khi $\sin(\alpha+\varphi)=-1$

$$\Leftrightarrow \alpha+\varphi=-\frac{\pi}{2}+n2\pi,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Từ đó ta có:

- $x=\cos\alpha=-\sin\varphi=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{6}}{3}\cdot$
- $y=\sin\alpha=-\cos\varphi=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot$
- $z=\sqrt{2}\cos\beta=\sqrt{2}\sin\alpha=-\sqrt{2}\cos\varphi=-\frac{\sqrt{6}}{3}\cdot$
- $t=\sqrt{2}\sin\beta=\sqrt{2}\cos\alpha=-\sqrt{2}\sin\varphi=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot$

Vậy $\min(y+t)=-\sqrt{3}$, đạt được khi và chỉ khi $(x;\, y;\, z;\, t)=\left(-\frac{\sqrt{6}}{3};\ -\frac{\sqrt{3}}{3};\ -\frac{\sqrt{6}}{3};\ -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

Nhận xét

Lời giải cách 1 có tính chất mẫu mực, gần giống sách giáo khoa nhưng không hấp dẫn vì việc tìm ra được lời giải là cực kỳ khó; bởi lẽ bài toán sử dụng nhiều lần BĐT Bunyakovsky có kết hợp phương pháp đánh giá, còn lời giải cách 2 nếu ta biết khai thác cái riêng của bài toán (chú ý đến hai phương trình đầu trong hệ đã cho) thì ta sẽ nghĩ đến việc đặt ẩn phụ (mục 2.1). Lúc đó, bài toán đã cho được chuyển sang dạng lượng giác có cách giải dễ hơn.

Ví dụ 4. [1, tr. 110] Giải BPT sau:

$$\frac{1}{1-x^2}>\frac{3x}{\sqrt{1-x^2}}-1\ (4).$$

Lời giải

Cách 1. Điều kiện để BPT (4) có nghĩa là $|x|<1$.

Với điều kiện trên BPT đã cho tương đương với $3x\sqrt{1-x^2}<2-x^2$ (*).

Ta thấy với $-1<x\le 0$ thì vế trái của (*) là số âm và vế phải của (*) là số dương nên BPT (*) có tập nghiệm là $S_1=(-1;\ 0]$.

Với $0<x<1$ thì BPT đã cho tương đương với $9x^2(1-x^2)<(2-x^2)^2$

$$\Leftrightarrow 10x^4-13x^2+4>0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2<\frac{1}{2} \\ x^2>\frac{4}{5} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x|<\frac{\sqrt{2}}{2} \\ |x|>\frac{2}{\sqrt{5}} \end{array}\right..$$

Đối chiếu với điều kiện $0<x<1$ ta suy ra BPT (*) có tập nghiệm là $S_2=\left(0;\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(\frac{2}{\sqrt{5}};\ 1\right)\cdot$

Vậy BPT (4) có tập nghiệm là

$$S=S_1\cup S_2=\left(-1;\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(\frac{2}{\sqrt{5}};\ 1\right)\cdot$$

Cách 2. Điều kiện để BPT (4) có nghĩa là $-1<x<1$.

Ta thấy trong BPT có xuất hiện dấu hiệu $\sqrt{1-x^2}$ cho phép ta đặt $x=\sin t,\ t\in\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)\cdot$

Khi đó BPT (4) trở thành:

$$\frac{1}{\cos^2 t}>\frac{3\sin t}{\cos t}-1$$

$\Leftrightarrow 1+\tan^2 t > 3\tan t - 1$

$\Leftrightarrow \tan^2 t - 3\tan t + 2 > 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan t < 1 \\ \tan t > 2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} -\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{4} & (*) \\ \arctan 2 < t < \dfrac{\pi}{2} & (**) \end{array}\right.$$

Từ (*) ta được $-1 < x < \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot$

Giải (**): Đặt $\alpha = \arctan 2$

$\Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 2$

$\Rightarrow \sin\alpha = 2\cos\alpha$

$\Rightarrow \sin^2\alpha = 4(1-\sin^2\alpha)$

$\Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}\cdot$

Do đó từ (**) ta được $\dfrac{2}{\sqrt{5}} < x < 1.$

Vậy $S = \left(-1;\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{2}{\sqrt{5}};\ 1\right)$ là tập nghiệm của BPT (4).

Nhận xét

Bài toán trên là bài toán khá đơn giản và có lẽ nhiều học sinh không mấy khó khăn để giải bài toán này. Tuy nhiên, trong lời giải cách 1 sai lầm thường gặp của học sinh là sử dụng biến đổi:

$$\begin{cases} |x| < 1 \\ 3x\sqrt{1-x^2} < 2 - x^2 \ (*) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| < 1 \\ 9x^2(1-x^2) < (2-x^2)^2 \end{cases} (!).$$

Khi đó sẽ tìm được tập nghiệm:

$$S = \left(-1;\ -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \cup \left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{2}{\sqrt{5}};\ 1\right)\cdot$$

Đây là biến đổi sai, làm mất đi một đoạn nghiệm $\left[-\dfrac{2}{\sqrt{5}};\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$. Sai lầm ở chỗ khi bình phương hai vế của (*) ta phải nhớ đặt điều kiện cho hai vế BPT cùng dấu. Ở lời giải cách 2, nếu ta biết khai thác cái riêng của bài toán (chú ý trong BPT có xuất hiện dấu hiệu $\sqrt{1-x^2}$) ta sẽ nghĩ đến việc đặt $x = \sin t$, $t \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right)\cdot$ Lúc đó bài toán đã cho được chuyển sang dạng lượng giác có cách giải dễ hơn và ít bị sai lầm.

Ví dụ 5. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $4ab + 2bc + 3ca = 24$. Tìm GTLN của biểu thức $P = \dfrac{4}{a^2+4} + \dfrac{9}{b^2+9} + \dfrac{16}{c^2+16}\cdot$

Lời giải

Để bài toán đã cho có thể trở thành bài toán có lời giải ngắn gọn và dễ hiểu, ta chỉ cần phát hiện cách đặt ẩn phụ. Cụ thể như sau:

Đặt $a = 2x,\ b = 3y,\ c = 4z.$

Từ điều kiện của giả thiết ta suy ra $x, y, z > 0$ và $xy + yz + zx = 1$ (*). Khi đó, biểu thức P trở thành $P = \dfrac{1}{x^2+1} + \dfrac{1}{y^2+1} + \dfrac{1}{z^2+1}\cdot$

Cách 1.

Ta có:

$$P = \frac{(x^2+1)-x^2}{x^2+1} + \frac{(y^2+1)-y^2}{y^2+1} + \frac{(z^2+1)-z^2}{z^2+1}$$

$$= 3 - \left(\frac{x^2}{x^2+1} + \frac{y^2}{y^2+1} + \frac{z^2}{z^2+1}\right)$$

Áp dụng BĐT Cauchy-Schwarz dạng phân thức, ta được:

$$\frac{x^2}{x^2+1} + \frac{y^2}{y^2+1} + \frac{z^2}{z^2+1} \ge \frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+3} \ (1).$$

Từ $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \ge 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \ge xy + yz + zx$ (2).

Mặt khác $xy + yz + zx = 1$ nên từ (2) ta suy ra $x^2 + y^2 + z^2 + 8(xy + yz + zx) \ge 9$

$\Leftrightarrow 4\left(x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)\right) \ge 3(x^2 + y^2 + z^2 + 3)$

$\Leftrightarrow 4(x+y+z)^2 \ge 3(x^2 + y^2 + z^2 + 3)$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+3} \ge \dfrac{3}{4}$ (3).

Từ (1) và (3) suy ra $\dfrac{x^2}{x^2+1} + \dfrac{y^2}{y^2+1} + \dfrac{z^2}{z^2+1} \ge \dfrac{3}{4}\cdot$

Từ đó ta có $P \le \dfrac{9}{4}\cdot$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ hay $a = \dfrac{2\sqrt{3}}{3},\ b = \sqrt{3},\ c = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}\cdot$

Vậy $\max P = \dfrac{9}{4}\cdot$

Cách 2.

Nhờ (*) ta liên tưởng đến công thức lượng giác $\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}\tan\frac{\alpha}{2}=1$ nên ta có thể tiếp tục đặt $x=\tan\frac{\alpha}{2},\ y=\tan\frac{\beta}{2},$ $z=\tan\frac{\gamma}{2}$ với $\alpha,\ \beta,\ \gamma\in(0;\ \pi).$

Khi đó, từ (*) ta có:

$$\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}\tan\frac{\alpha}{2}=1$$

$$\Rightarrow \tan\frac{\beta}{2}.\tan\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)=1$$

Hay $\sin\frac{\beta}{2}.\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)=\cos\frac{\beta}{2}.\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\frac{\beta+\gamma}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}\cdot$$

Do đó, ta có:

$$P=\cos^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\beta}{2}+\cos^2\frac{\gamma}{2}$$

$$=\cos^2\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}(1+\cos\beta)+\frac{1}{2}(1+\cos\gamma)$$

$$=1+\cos^2\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}(\cos\beta+\cos\gamma)$$

$$=1+\cos^2\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$$

$$=2-\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$$

$$=2+\frac{1}{4}\cos^2\frac{\beta-\gamma}{2}-\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow P\le 2+\frac{1}{4}\cos^2\frac{\beta-\gamma}{2}\le 2+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}\cdot$$

Do đó, GTLN của P bằng $\frac{9}{4}$, đạt được khi

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=\pi\\ \sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\\ \cos^2\frac{\beta-\gamma}{2}=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow x=y=z=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow a=\frac{2\sqrt{3}}{3},\ b=\sqrt{3},\ c=\frac{4\sqrt{3}}{3}\cdot$$

Nhận xét

Đây là bài toán khó, đòi hỏi học sinh phải biết vận dụng các BĐT quen thuộc để đánh giá nhưng đại đa số học sinh không giải theo hướng cách 1 bởi lẽ cách này còn khiếm khuyết do bài toán kết hợp quá nhiều BĐT, trong đó có BĐT Cauchy-Schwarz dạng phân thức. BĐT này chỉ có trong tài liệu chuyên toán, học sinh không theo học chương trình này, muốn áp dụng phải chứng minh lại.

Nhắc lại BĐT Cauchy-Schwarz dạng phân thức

Nếu $a_1,\ a_2,\ a_3$ là các số thực và $b_1,\ b_2,\ b_3$ là các số thực dương, thì

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\frac{a_3^2}{b_3}\ge\frac{(a_1+a_2+a_3)^2}{b_1+b_2+b_3}\ (*)\cdot$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}\cdot$

Chứng minh

Xét hai bộ số $\left(\sqrt{b_1};\sqrt{b_2};\sqrt{b_3}\right)$ và $\left(\frac{a_1}{\sqrt{b_1}};\frac{a_2}{\sqrt{b_2}};\frac{a_3}{\sqrt{b_3}}\right)$.

Áp dụng BĐT Bunyakovsky có

$$\left((\sqrt{b_1})^2+(\sqrt{b_2})^2+(\sqrt{b_3})^2\right)\left(\left(\frac{a_1}{\sqrt{b_1}}\right)^2+\left(\frac{a_2}{\sqrt{b_2}}\right)^2+\left(\frac{a_3}{\sqrt{b_3}}\right)^2\right)$$

$$\ge\left(\sqrt{b_1}\cdot\frac{a_1}{\sqrt{b_1}}+\sqrt{b_2}\cdot\frac{a_2}{\sqrt{b_2}}+\sqrt{b_3}\cdot\frac{a_3}{\sqrt{b_3}}\right)^2$$

Suy ra điều phải chứng minh

Đẳng thức trong (*) xảy ra khi $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}\cdot$

Bài tập tương tự

1. [5, tr. 123] Giải PT $x^3+\sqrt{(1-x^2)^3}=x\sqrt{2(1-x^2)}.$

2. [5, tr. 123] Giải PT $3x+\sqrt{1-x^2}=4x^3.$

3. Giải HPT sau:

$$\begin{cases} x^2+2y^2=1 \\ 16x^5-20x^3+5x+64\sqrt{2}y^5-40\sqrt{2}y^3+5\sqrt{2}y+\sqrt{2}=0 \end{cases}.$$

4. Giải HPT $\begin{cases} \sqrt{4-x^2}+x+y=2 \\ x+y^2+6\sqrt{9-y^2}=20 \end{cases}.$

5. Giải HPT $\begin{cases} x\left(1-3z^2\right)+z\left(z^2-3\right)=0 \\ y\left(1-3x^2\right)+x\left(x^2-3\right)=0 \\ z\left(1-3y^2\right)+y\left(y^2-3\right)=0 \end{cases}.$

6. [2, tr. 99] Giải BPT $x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}>\dfrac{3\sqrt{5}}{2}.$

7. Cho hai số thực x, y không âm thay đổi. Tìm GTLN và GTNN của biểu thức

$$P=\frac{\left(x-y^{2013}\right)\left(1-xy^{2013}\right)}{(1+x)^2\left(1+y^{2013}\right)^2}.$$

8. Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $xy+yz+zx=1.$ Tìm GTLN của biểu thức

$$P=x\left(\frac{1+\left(1-y^2\right)\left(1-z^2\right)\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\right)+y\left(\frac{1+\left(1-z^2\right)\left(1-x^2\right)\sqrt{1+y^2}}{\sqrt{1+y^2}}\right)$$
$$+z\left(\frac{1+\left(1-x^2\right)\left(1-y^2\right)\sqrt{1+z^2}}{\sqrt{1+z^2}}\right).$$

9. Cho hai số x, y thay đổi và thỏa mãn hệ thức $2x^2+y^2=1.$ Tìm GTLN và GTNN của biểu thức $P=\dfrac{4\left(x^2+3\sqrt{2}xy\right)}{1+2\sqrt{2}xy+2y^2}.$

10. Chứng minh rằng với mọi số thực x, y, z tùy ý ta có

$$\frac{|x-z|}{\sqrt{2015+x^2}.\sqrt{2015+z^2}}+\frac{|z-y|}{\sqrt{2015+z^2}.\sqrt{2015+y^2}}\geq\frac{|x-y|}{\sqrt{2015+x^2}.\sqrt{2015+y^2}}.$$

11. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=abc.$ Chứng minh rằng:

$$\frac{a\left(1-b^2\right)\left(1-c^2\right)+b\left(1-a^2\right)\left(1-c^2\right)+c\left(1-a^2\right)\left(1-b^2\right)}{(a+b+c)^3}\leq\frac{4}{27}.$$

12. [4, tr. 49] Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right)\geq 9(ab+bc+ca).$$

3. Kết luận

Thông qua hệ thống ví dụ vừa nêu trên ta thấy phương pháp lượng giác hóa tỏ rõ hiệu quả trên một số bài toán đại số - giải tích mà việc sử dụng phương pháp khác có thể không thuận lợi bằng. Tuy nhiên để sử dụng được phương pháp này, đòi hỏi bạn đọc đầu tư suy nghĩ, linh hoạt sáng tạo, biến đổi bài toán, đưa bài toán về dạng có thể áp dụng được phương pháp lượng giác hóa. Chúng ta có thể kiểm nghiệm phương pháp trên với 12 bài tập tự luyện mà chúng tôi đề xuất. Chúng tôi hy vọng, bạn đọc sẽ tìm ra nhiều lời giải hay, độc đáo cho phương pháp lượng giác hóa đối với bài toán trên.

Tài liệu tham khảo

[1]. Nguyễn Thái Hòe (1997), *Rèn luyện tư duy qua việc giải bài tập toán*, NXB Giáo dục.

[2]. Vũ Thế Hựu (1998), *Phương pháp lượng giác hóa các bài toán*, NXB Giáo dục.

[3]. Nguyễn Xuân Liêm (1997), *Chuyên đề về bất đẳng thức và bất phương trình*, NXB Giáo dục.

[4]. Ngô Thế Phiệt (2007), *Một số phương pháp mới trong chứng minh bất đẳng thức*, NXB Giáo dục.

[5]. Phạm Trọng Thư (2010), *Các chuyên đề đại số*, NXB Đại học Sư phạm.

USING THE TRIGONOMETRIC METHOD TO SOLVE SOME ALGEBRA - ANALYSIS PROBLEMS IN HIGH SCHOOL MATHEMMATICS CURRICULUM

Summary

This paper addresses and uses the trigonometric method in solving some algebra -analysis problems in high school mathematics curriculum with typical examples for illustration.

Keywords: the trigonometric method, algebra, analysis.

Ngày nhận bài: 06/5/2015; Ngày nhận lại: 30/8/2015; Ngày duyệt đăng: 30/9/2015.