ĐỊNH LÍ ĐIỂM BẤT ĐỘNG CHUNG CHO HAI ÁNH XẠ TRƠN YẾU TRÊN KHÔNG GIAN b-MÊTRIC

• ThS. Nguyễn Thị Thanh Lý(*)

Tóm tắt

Trong bài báo này, định lí điểm bất động cho hai ánh xạ trơn yếu trên không gian b-mêtric được chứng minh mà không cần điều kiện liên tục của b-mêtric. Các kết quả này là mở rộng của một số kết quả trong [2] từ không gian mêtric sang không gian b-mêtric. Đồng thời, một số ví dụ cũng xây dựng để minh họa cho kết quả chính của bài báo.

Từ khóa: điểm bất động chung, b-mêtric, ánh xạ trơn yếu.

1. Giới thiệu

Năm 1998, Czerwik [4] giới thiệu khái niệm không gian b-mêtric và nghiên cứu điểm bất động của ánh xạ co phi tuyến trên không gian này. Năm 2010, Khamsi và Hussain [8] giới thiệu lại khái niệm không gian b-mêtric với tên gọi không gian kiểu-mêtric và nghiên cứu ánh xạ *KMM* trên không gian này.

Định nghĩa 1.1 ([4]). Cho X là tập khác rỗng, $K \geq 1$ và hàm $D: X \times X \to [0,+\infty)$ sao cho với mọi $x, y, z \in X$,

(1) $D(x,y) = 0$ khi và chỉ khi $x = y$;

(2) $D(x,y) = D(y,x)$;

(3) $D(x,z) \leq K[D(x,y) + D(y,z)]$.

Khi đó D được gọi là *b-mêtric* trên X và (X, D, K) được gọi là *không gian b-mêtric*.

Cũng trong năm 2010, Khamsi [7] đã giới thiệu một định nghĩa khác của không gian kiểu-mêtric với điều kiện (3) trong Định nghĩa 1.1 được thay bởi bất đẳng thức khác và cũng chứng minh được một số kết quả về định lí điểm bất động của ánh xạ co trên không gian này.

Định nghĩa 1.2 ([7, Definition 2.7]). Cho X là tập khác rỗng, $K \geq 1$ và hàm $D: X \times X \to [0,+\infty)$ sao cho với mọi $x, y_1, y_2, \dots, y_n, z \in X$,

(1) $D(x,y) = 0$ khi và chỉ khi $x = y$;

(2) $D(x,y) = D(y,x)$;

(3) $D(x,z) \leq K[D(x,y_1) + D(y_1,y_2) + \cdots + D(y_n,z)]$.

Khi đó D được gọi là *kiểu-mêtric* trên X và (X, D, K) được gọi là *không gian kiểu-mêtric*.

Năm 2014, Dung và cộng sự [5] cũng đã đưa ra một số ví dụ chứng minh b-mêtric và kiểu-mêtric có thể không liên tục và tồn tại b-mêtric không là kiểu-mêtric.

Gần đây, chúng tôi thiết lập định lí điểm bất động cho hai ánh xạ trơn yếu trên không gian kiểu-mêtric [9]. Tuy nhiên, giả thiết của định lí cần tính liên tục của kiểu-mêtric. Trong bài báo này, chúng tôi xây dựng định lí điểm bất động cho hai ánh xạ trơn yếu trên không gian b-mêtric mà không cần điều kiện liên tục của b-mêtric. Các kết quả này là mở rộng của một số kết quả trong [2] từ không gian mêtric sang không gian b-mêtric.

Trước hết, chúng tôi trình bày một số khái niệm và kết quả bổ trợ cho kết quả chính của bài viết này.

Định nghĩa 1.3 ([4]). Cho (X, D, K) là không gian b-mêtric.

(1) Dãy $\{x_n\}$ trong X được gọi là *hội tụ* đến $x \in X$, kí hiệu $x_n \to x$ hay $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$, nếu $\lim_{n\to+\infty} D(x_n, x) = 0$. Khi đó x được gọi là *điểm giới hạn* của dãy $\{x_n\}$.

(2) Dãy $\{x_n\}$ trong X được gọi là dãy *Cauchy* nếu $\lim_{n,m\to+\infty} D(x_n, x_m) = 0$.

(3) Không gian (X, D, K) được gọi là *đầy đủ* nếu mỗi dãy Cauchy trong X là một dãy hội tụ.

Bổ đề 1.4. *Cho (X, D, K) là không gian b-mêtric và $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ là hai dãy trong X.*

(*) Khoa Sư phạm Toán - Tin, Trường Đại học Đồng Tháp.

Nếu $\{x_n\}$ là dãy Cauchy và $\lim\limits_{n\to+\infty} D(x_n, y_n) = 0$ thì $\{y_n\}$ là dãy Cauchy. Hơn nữa, nếu $x_n \to z$ thì $y_n \to z$.

Chứng minh. Với mọi $n, m \in \mathbb{N}$, ta có

$$D(y_n, y_m) \le KD(y_n, x_n) + K^2[D(x_n, x_m) + D(x_m, y_m)]. \quad (1.1)$$

Cho $n, m \to +\infty$ trong (1.1), ta được $\lim\limits_{n,m\to+\infty} D(y_n, y_m) = 0$ hay $\{y_n\}$ là dãy Cauchy. Mặt khác, ta có:

$$D(y_n, z) \le K[D(y_n, x_n) + D(x_n, z)]. \quad (1.2)$$

Cho $n \to +\infty$ trong (1.2), ta được $\lim\limits_{n\to\infty} D(y_n, z) = 0$. Vậy $y_n \to z$.

Bổ đề 1.5 ([1, Lemma 1]). *Cho (X, D, K) là không gian b-mêtric và $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ là hai dãy trong X thỏa $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = b$. Khi đó,*

(1) $\frac{1}{K^2} D(a, b) \le \liminf\limits_{n\to+\infty} D(x_n, y_n) \le \limsup\limits_{n\to+\infty} D(x_n, y_n) \le K^2 D(a, b).$

(2) Với mọi $y \in X$, ta có:

$$\frac{1}{K} D(a, y) \le \liminf_{n\to+\infty} D(x_n, y) \le \limsup_{n\to+\infty} D(x_n, y) \le KD(a, y).$$

Định nghĩa 1.6 ([3]). Cho X là tập khác rỗng và hai ánh xạ $S, T : X \to X$.

(1) Điểm $x \in X$ được gọi là *điểm trùng* của S và T nếu $Tx = Sx$.

(2) Điểm $y \in X$ được gọi là *giá trị trùng* của S và T nếu tồn tại điểm trùng $x \in X$ của S và T sao cho $y = Tx = Sx$.

(3) Hai ánh xạ S và T được gọi là *tương thích yếu ngẫu nhiên* nếu tồn tại $x \in X$ là điểm trùng của S và T và $STx = TSx$.

Bổ đề 1.7 ([6, Lemma 1]). *Cho X là tập khác rỗng và S, T là hai ánh xạ tương thích yếu ngẫu nhiên trên tập X. Khi đó, nếu S và T có duy nhất một giá trị trùng $w = Sx = Tx$ thì w là điểm bất động chung duy nhất của S và T.*

2. Kết quả chính

Từ khái niệm ánh xạ trơn yếu và tính đặt chỉnh của bài toán điểm bất động chung trên không gian mêtric trong [2] và [9], chúng tôi giới thiệu khái niệm tương tự trên không gian b-mêtric.

Định nghĩa 2.1. Cho không gian b-mêtric (X, D, K) và hai ánh xạ $F, T : X \to X$. Khi đó,

(1) F và T được gọi là *trơn yếu* nếu tồn tại dãy $\{x_n\}$ trong X thỏa điều kiện $\lim\limits_{n\to+\infty} D(Fx_n, Tx_n) = 0$.

(2) Bài toán điểm bất động chung của $\{F, T\}$ được gọi là *đặt chỉnh* nếu các điều kiện sau được thỏa mãn

(a) F và T có duy nhất điểm bất động chung x trong X, nghĩa là, tồn tại duy nhất điểm $x \in X$ sao cho $Fx = Tx = x$.

(b) Với mỗi dãy $\{x_n\}$ trong X và x là điểm bất động chung duy nhất của F và T nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} D(x_n, Fx_n) = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} D(x_n, Tx_n)$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} D(x_n, x) = 0.$

Định lí sau là điều kiện đủ để hai ánh xạ trơn yếu trên không gian b-mêtric có duy nhất điểm bất động chung.

Định lý 2.2. *Cho không gian b-mêtric (X, D, K), hai ánh xạ $F, T : X \to X$ và hàm số $\Phi : [0, +\infty) \times [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ thỏa mãn*

(1) $F(X)$ là không gian con đầy đủ của X;

(2) Φ liên tục và $\Phi(t, 0) = 0 = \Phi(0, t)$ với mọi $t \in [0, +\infty)$;

(3) Tồn tại các hằng số $M > 0, \lambda_1, \lambda_2 \in [0,1)$ sao cho với mọi $x, y \in X$,

$$D(Tx,Ty) \le a_0(x,y)\Phi\big(D(Fx,Tx), D(Fy,Ty)\big) + \frac{a_1(x,y)}{K^2} D(Fx,Fy) \quad (2.1)$$
$$+ \frac{a_2(x,y)}{K}\big(D(Fx,Tx) + D(Fy,Ty)\big) + \frac{a_3(x,y)}{K^2}\big(D(Fx,Ty) + D(Fy,Tx)\big),$$

trong đó $a_i(x, y) \ge 0,\ i = 0,1,2,3$ và

$$a_0(x, y) \le M,$$
$$a_2(x, y) + a_3(x, y) \le \lambda_1, \quad (2.2)$$
$$a_1(x, y) + \frac{2a_3(x, y)}{K} \le \lambda_2;$$

(4) Hai ánh xạ F và T trơn yếu và tương thích yếu ngẫu nhiên.

Khi đó,

(1) F và T có duy nhất điểm bất động chung trong X;

(2) Bài toán điểm bất động chung của $\{F,T\}$ có tính đặt chỉnh;

(3) Nếu F liên tục tại điểm bất động chung thì T cũng liên tục tại điểm đó.

Chứng minh. (1) Vì F và T trơn yếu nên tồn tại dãy $\{x_n\}$ trong X sao cho:

$$\lim_{n\to+\infty} D(Fx_n,Tx_n)=0. \qquad (2.3)$$

Với mỗi $n\in\mathbb{N}$, đặt $y_n=Tx_n$ và $z_n=Fx_n$. Ta sẽ chứng minh $\{y_n\}$ và $\{z_n\}$ là các dãy Cauchy.

Sử dụng điều kiện (2.1), ta có:

$$D(y_n,y_m)=D(Tx_n,Tx_m)\le a_0(x_n,x_m)\Phi\big(D(Fx_n,Tx_n),D(Fx_m,Tx_m)\big)$$
$$+\frac{a_1(x_n,x_m)}{K^2}D(Fx_n,Fx_m)+\frac{a_2(x_n,x_m)}{K}\big(D(Fx_n,Tx_n)+D(Fx_m,Tx_m)\big)$$
$$+\frac{a_3(x_n,x_m)}{K^2}\big(D(Fx_n,Tx_m)+D(Fx_m,Tx_n)\big).$$

Từ Định nghĩa 1.1 (3) và (2.2), ta được:

$$D(y_n,y_m)\le a_0(x_n,x_m)\Phi\big(D(Fx_n,Tx_n),D(Fx_m,Tx_m)\big)$$
$$+a_1(x_n,x_m)\Big(\frac{1}{K}D(Fx_n,Tx_n)+D(Tx_n,Tx_m)+D(Tx_m,Fx_m)\Big)$$
$$+\frac{a_2(x_n,x_m)}{K}\big(D(Fx_n,Tx_n)+D(Fx_m,Tx_m)\big)$$
$$+\frac{a_3(x_n,x_m)}{K}\big(D(Fx_n,Tx_n)+D(Tx_n,Tx_m)+D(Fx_m,Tx_m)+D(Tx_m,Tx_n)\big)$$
$$=a_0(x_n,x_m)\Phi\big(D(z_n,y_n),D(z_m,y_m)\big)+\Big(a_1(x_n,x_m)+\frac{2a_3(x_n,x_m)}{K}\Big)D(y_n,y_m)$$
$$+\frac{1}{K}\big(a_2(x_n,x_m)+a_3(x_n,x_m)\big)\big(D(z_n,y_n)+D(y_m,z_m)\big)$$
$$+a_1(x_n,x_m)\Big(\frac{1}{K}D(y_n,z_n)+D(y_m,z_m)\Big)$$
$$\le M\Phi\big(D(z_n,y_n),D(z_m,y_m)\big)+\lambda_2D(y_n,y_m)+\lambda_1\big(D(z_n,y_n)+D(y_m,z_m)\big)$$
$$+\lambda_2\Big(\frac{1}{K}D(y_n,z_n)+D(y_m,z_m)\Big).$$

Từ đó, ta có:

$$0\le(1-\lambda_2)D(y_n,y_m)\le M\Phi\big(D(z_n,y_n),D(z_m,y_m)\big)$$
$$+\lambda_1\big(D(z_n,y_n)+D(y_m,z_m)\big)+\lambda_2\Big(\frac{1}{K}D(y_n,z_n)+D(y_m,z_m)\Big).$$

Cho $n,m\to+\infty$ trong bất đẳng thức trên, sử dụng (2.3) và điều kiện liên tục của Φ tại $(0,0)$, ta được:

$$\lim_{n,m\to+\infty} D(y_n,y_m)=0. \qquad (2.4)$$

Do đó $\{y_n\}$ là dãy Cauchy. Vì $F(X)$ đầy đủ nên tồn tại $y=Fv\in F(X)$, $v\in X$ sao cho $\lim_{n\to+\infty} y_n=y=Fv.$ Tiếp tục sử dụng (2.3) và Bổ đề 1.4 ta được $\{z_n\}$ là dãy Cauchy và

$$\lim_{n\to+\infty} z_n=y=Fv. \qquad (2.5)$$

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh y là giá trị trùng duy nhất của F và T. Trước hết, ta chứng minh $Tv=Fv$, tức là, $D(Fv,Tv)=0$. Thật vậy, sử dụng điều kiện (2.1), ta có

$$D(Tx_n,Tv)\le a_0(x_n,v)\Phi\big(D(Fx_n,Tx_n),D(Fv,Tv)\big)+\frac{a_1(x_n,v)}{K^2}D(Fx_n,Fv)$$
$$+\frac{a_2(x_n,v)}{K}\big(D(Fx_n,Tx_n)+D(Fv,Tv)\big)+\frac{a_3(x_n,v)}{K^2}\big(D(Fx_n,Tv)+D(Fv,Tx_n)\big)$$
$$\le a_0(x_n,v)\Phi\big(D(Fx_n,Tx_n),D(Fv,Tv)\big)+\frac{a_1(x_n,v)}{K^2}D(Fx_n,Fv)$$
$$+\frac{a_2(x_n,v)}{K}\big(D(Fx_n,Tx_n)+D(Fv,Tv)\big)+\frac{a_3(x_n,v)}{K}\big(D(Tv,Fv)+D(Fv,Fx_n)\big)$$
$$+\frac{a_3(x_n,v)}{K^2}D(Tx_n,Fv).$$

Vì vậy,

$$D(y_n,Tv)\le a_0(x_n,v)\Phi\big(D(z_n,y_n),D(y,Tv)\big)+\Big(\frac{a_1(x_n,v)}{K^2}+\frac{a_3(x_n,v)}{K}\Big)D(z_n,y)$$
$$+\frac{a_2(x_n,v)}{K}D(z_n,y_n)+\Big(\frac{a_2(x_n,v)}{K}+\frac{a_3(x_n,v)}{K}\Big)D(y,Tv)+\frac{a_3(x_n,v)}{K^2}D(y_n,y)$$
$$\le M\Phi\big(D(z_n,y_n),D(y,Tv)\big)+\lambda_2D(z_n,y)+\lambda_1D(z_n,y_n)+\frac{\lambda_1}{K}D(y,Tv)+\lambda_1D(y_n,y).$$

Từ đó suy ra

$$\liminf_{n\to+\infty} D(y_n,Tv)\le M\Phi\big(\limsup_{n\to+\infty} D(z_n,y_n),D(y,Tv)\big)$$
$$+\lambda_2\limsup_{n\to+\infty} D(z_n,y)+\lambda_1\limsup_{n\to+\infty} D(z_n,y_n)$$
$$+\frac{\lambda_1}{K}D(y,Tv)+\lambda_1\limsup_{n\to+\infty} D(y_n,y).$$

Áp dụng Bổ đề 1.5 trong bất đẳng thức trên, ta được:

$$\frac{1}{K}D(y,Tv)\le\frac{\lambda_1}{K}D(y,Tv).$$

Vì $\lambda_1\in[0,1)$ nên ta có $D(y,Tv)=0$ hay $D(Fv,Tv)=0.$ Do đó, $y=Tv=Fv$ hay v là điểm trùng của F và T.

Bây giờ, ta sẽ chứng minh rằng nếu tồn tại $z\in X$ sao cho $z=Tu=Fu$ với $u\in X$ thì $z=y$. Thật vậy, sử dụng giả thiết (3), ta có

$$D(y,z)=D(Tv,Tu)$$
$$\le a_0(v,u)\Phi\big(D(Fv,Tv),D(Fu,Tu)\big)+\frac{a_1(v,u)}{K^2}D(Fv,Fu)$$
$$+\frac{a_2(v,u)}{K}\big(D(Fv,Tv)+D(Fu,Tu)\big)+\frac{a_3(v,u)}{K^2}\big(D(Fv,Tu)+D(Fu,Tv)\big)$$
$$=\frac{1}{K^2}\big(a_1(v,u)+2a_3(v,u)\big)D(y,z)$$
$$\le\lambda_2D(y,z).$$

Vì $\lambda_2\in[0,1)$ nên $D(y,z)=0,$ tức là $y=z.$ Vậy y là giá trị trùng duy nhất của F và T.

Tiếp tục sử dụng Bổ đề 1.7, ta được y là điểm bất động chung duy nhất của F và T.

(2) Gọi y là điểm bất động chung duy nhất của F và T. Giả sử dãy $\{x_n\}$ trong X thỏa điều kiện:

$$\lim_{n\to+\infty} D(x_n,Tx_n)=0=\lim_{n\to+\infty} D(x_n,Fx_n). \quad (2.6)$$

Ta cần chứng minh $\lim_{n\to+\infty} D(x_n,y)=0$. Thật vậy, sử dụng Định nghĩa 1.1 (3), ta có:

$$0\le D(Tx_n,Fx_n)\le K\left[D(Tx_n,x_n)+D(x_n,Fx_n)\right].$$

Cho $n\to+\infty$ trong bất đẳng thức trên và sử dụng (2.6), ta được:

$$\lim_{n\to+\infty} D(Tx_n,Fx_n)=0. \quad (2.7)$$

Tương tự như trong chứng minh (1), với mỗi $n\in\mathbb{N}$, đặt $y_n=Tx_n$ và $z_n=Fx_n$. Khi đó $\{y_n\}$ và $\{z_n\}$ là hai dãy Cauchy. Vì $F(X)$ đầy đủ nên tồn tại $x=Fv,\ v\in X$ sao cho $\lim_{n\to\infty} z_n=x$. Sử dụng (2.7) và Bổ đề 1.4, ta được:

$$\lim_{n\to+\infty} Tx_n=\lim_{n\to+\infty} Fx_n=x. \quad (2.8)$$

Theo chứng minh (1), ta có x là điểm bất động chung duy nhất của F và T. Điều này suy ra $x=y$. Sử dụng Định nghĩa 1.1.(3), ta có:

$$D(x_n,y)\le K[D(x_n,Fx_n)+D(Fx_n,y)].$$

Cho $n\to+\infty$ trong bất đẳng thức trên và sử dụng (2.6), (2.7), ta được $\lim_{n\to+\infty} D(x_n,y)=0$.

(3) Gọi y là điểm bất động chung duy nhất của F và T. Với mỗi dãy $\{u_n\}$ mà $\lim_{n\to+\infty} u_n=y$, ta cần chứng minh $\lim_{n\to+\infty} Tu_n=Ty$. Thật vậy, sử dụng giả thiết (3), ta có

$$\begin{aligned}
&D(Tu_n,y)=D(Tu_n,Ty)\\
&\le a_0(u_n,y)\Phi\left(D(Fu_n,Tu_n),D(Fy,Ty)\right)+\frac{a_1(u_n,y)}{K^2}D(Fu_n,Fy)\\
&+\frac{a_2(u_n,y)}{K}\left(D(Fu_n,Tu_n)+D(Fy,Ty)\right)+\frac{a_3(u_n,y)}{K^2}\left(D(Fu_n,Ty)+D(Fy,Tu_n)\right)\\
&=a_0(u_n,y)\Phi\left(D(Fu_n,Tu_n),D(y,y)\right)+\frac{a_1(u_n,y)}{K^2}D(Fu_n,y)\\
&+\frac{a_2(u_n,y)}{K}\left(D(Fu_n,Tu_n)+D(y,y)\right)+\frac{a_3(u_n,y)}{K^2}\left(D(Fu_n,y)+D(y,Tu_n)\right)\\
&=\frac{1}{K^2}\left(a_1(u_n,y)+a_3(u_n,y)\right)D(Fu_n,y)+\frac{a_2(u_n,y)}{K}D(Fu_n,Tu_n)+\frac{a_3(u_n,y)}{K^2}D(y,Tu_n)\\
&\le\frac{1}{K^2}\left(a_1(u_n,y)+a_3(u_n,y)\right)D(Fu_n,y)+a_2(u_n,y)[D(Fu_n,y)+D(y,Tu_n)]\\
&+\frac{a_3(u_n,y)}{K^2}D(y,Tu_n)\\
&\le\left(\frac{a_1(u_n,y)}{K^2}+\frac{a_3(u_n,y)}{K^2}+a_2(u_n,y)\right)D(Fu_n,y)+\left(a_2(u_n,y)+\frac{a_3(u_n,y)}{K^2}\right)D(y,Tu_n)\\
&\le(\lambda_1+\lambda_2)D(Fu_n,y)+\lambda_1D(y,Tu_n).
\end{aligned}$$

Điều này dẫn đến

$$0\le(1-\lambda_1)D(Tu_n,y)\le(\lambda_1+\lambda_2)D(Fu_n,y). \quad (2.9)$$

Vì $\lim_{n\to+\infty} u_n=y=Fy$ và F liên tục tại y nên ta được $\lim_{n\to+\infty} D(Fu_n,y)=\lim_{n\to+\infty} D(Fu_n,Fy)=0$. Do đó, khi cho $n\to+\infty$ trong (2.9), ta được $\lim_{n\to+\infty} D(Tu_n,y)=0$. Vậy $\lim_{n\to+\infty} Tu_n=y$ hay $\lim_{n\to+\infty} Tu_n=Ty$.

Hệ quả 2.3. *Cho không gian b-mêtric (X,D,K) và hai ánh xạ $F,T:X\to X$ thỏa mãn các điều kiện sau*

(1) $F(X)$ là không gian con đầy đủ của X;

(2) Tồn tại $\alpha\ge0,\ \beta\in[0,1)$ sao cho với mọi $x,y\in X$,

$$D(Tx,Ty)\le\alpha\frac{\min\{D(Fx,Tx),D(Fy,Ty)\}+D(Fx,Tx)D(Fy,Ty)}{1+D(x,y)}+\frac{\beta}{K^2}D(Fx,Fy); \quad (2.10)$$

(3) Hai ánh xạ F và T trơn yếu và tương thích yếu ngẫu nhiên.

Khi đó,

(1) F và T có duy nhất điểm bất động chung trong X;

(2) Bài toán điểm bất động chung của $\{T,F\}$ có tính đặt chỉnh;

(3) Nếu F liên tục tại điểm bất động chung thì T cũng liên tục tại điểm đó.

Chứng minh. Chọn $\Phi(s,t)=\alpha\left[\min\{s,t\}+st\right]$ với mọi $s,t\in[0,+\infty)$ và đặt

$$a_0(x,y)=\frac{1}{1+D(x,y)} \text{ với mọi } x,y\in X.$$

Với $a_1=\beta, a_2=a_3=0$, $M=1$, $\lambda_1=\lambda_2=\beta$, sử dụng Định lí 2.2, ta được điều phải chứng minh.

Hệ quả 2.4. *Cho không gian b-mêtric (X,D,K) và hai ánh xạ $F,T:X\to X$ thỏa mãn các điều kiện sau*

(1) $F(X)$ là không gian con đầy đủ của X;

(2) Tồn tại $p,q,r\ge0, q+r<1, p+\dfrac{2r}{K}<1$ sao cho với mọi $x,y\in X$,

$$D(Tx,Ty)\le \frac{p}{K^2}D(Fx,Fy)+\frac{q}{K}\big[D(Fx,Tx)+D(Fy,Ty)\big]$$
$$+\frac{r}{K^2}\big[D(Fx,Ty)+D(Fy,Tx)\big];$$

(3) Hai ánh xạ F và T trơn yếu và tương thích yếu ngẫu nhiên.

Khi đó,

(1) F và T có duy nhất điểm bất động chung trong X;

(2) Bài toán điểm bất động chung của $\{F,T\}$ có tính đặt chỉnh;

(3) Nếu F liên tục tại điểm bất động chung thì T cũng liên tục tại điểm đó.

Chứng minh. Chọn $\Phi(s,t)=0$ với mọi $s,t\in[0,\infty)$ và $a_0=0,\ a_1=p,\ a_2=q,\ a_3=r,\ M=1,$ $\lambda_1=q+r,\lambda_2=p+\frac{2r}{K}$ trong Định lí 2.2, ta được điều phải chứng minh.

Nhận xét 2.5. Vì mỗi mêtric là một b-mêtric với *K=1* nên từ Định lí 2.2, Hệ quả 2.3 và Hệ quả 2.4 ta lần lượt suy ra [2, Theorem 3.2], [2, Theorem 6.2], [2, Corollary 4.2] và [2, Corollary 4.3].

Ví dụ sau đây chứng minh Định lí 2.2 là tổng quát của các kết quả chính trong [2] và [9].

Trước hết, chúng tôi xây dựng ví dụ minh họa điểm bất động chung của hai ánh xạ trên không gian b-mêtric (X,D,K) nhưng không là không gian kiểu-mêtric với mọi $K\ge 1$. Do đó, các kết quả chính trong [2] và [9] không áp dụng được cho ví dụ này.

Ví dụ 2.6. Cho $X=\mathbb{R},\ D(x,y)=(x-y)^2$ với mọi $x,y\in X$ và hai ánh xạ $F,T:X\to X$ được xác định bởi $Tx=x^2-x, Fx=4(x^2-x)$ với mọi $x\in X$. Khi đó,

(1) D là một b-mêtric với $K=2$. Tuy nhiên, D không là một kiểu-mêtric với mọi $K\ge 1$.

(2) F và T thỏa mãn các giả thiết của Định lí 2.2.

Chứng minh. (1) Xem [5, Example 2.4].

(2) Với mọi $x,y\in X$, $D(Tx,Ty)=\frac{1}{16}D(Fx,Fy)$. Khi đó, chọn $\Phi(s,t)=st$ với mọi $s,t\ge 0$ và $M=1,\lambda_1=\lambda_2=\frac{1}{4},a_1(x,y)=\frac{1}{4},a_0(x,y)=a_2(x,y)$ $=a_3(x,y)=0$ với mọi $x,y\in X$ thì giả thiết (3) của Định lí 2.2 được thỏa mãn. Mặt khác, vì $F0=T0=0,FT0=TF0=0$ nên nếu ta chọn $x_n=0$ với mọi $n\in\mathbb{N}$ thì ta được $\lim\limits_{n\to+\infty}D(Fx_n,Tx_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}D(0,0)=0.$ Do đó, F và T là trơn yếu và tương thích yếu ngẫu nhiên. Hơn nữa, các giả thiết còn lại của Định lí 2.2 cũng được thỏa mãn nên Định lí 2.2 áp dụng được cho bài toán này.

Ví dụ sau minh họa cho sự tồn tại điểm bất động chung của hai ánh xạ trên không gian b-mêtric (X,D,K) với D là ánh xạ không liên tục. Do đó, các kết quả chính trong [2] và [9] cũng không áp dụng được cho ví dụ này.

Ví dụ 2.7. Cho $X=\{0,1,\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{n},\dots\}$, hàm D được định nghĩa như sau

$$D(x,y)=\begin{cases}0 & \text{nếu} \quad x=y\\ 1 & \text{nếu} \quad x,y\in\{0,1\},x\ne y\\ |x-y| & \text{nếu} \quad x,y\in\{0,\frac{1}{2n},\frac{1}{2m}\},x\ne y\\ \frac{1}{4} & \text{các trường hợp còn lại.}\end{cases}$$

và hai ánh xạ $F,T:X\to X$ được xác định bởi

$$T0=T1=T\frac{1}{2n}=0,T\frac{1}{2n+1}=\frac{1}{96n},$$
$$F0=F1=F\frac{1}{2n}=0,F\frac{1}{2n+1}=\frac{1}{2n}$$

với mọi $n\in\mathbb{N},n\ge 1$. Khi đó,

(1) D là một b-mêtric không liên tục với $K=4$. Hơn nữa, D không là một mêtric trên X.

(2) Định lí 2.2 áp dụng được cho ví dụ này.

Chứng minh. (1) Tương tự như [5, Example 2.2].

(2) Vì điều kiện (2.1) có tính đối xứng đối với *x* và *y* nên ta chỉ cần xét các trường hợp sau.

Nếu $x,y\in\{0,1\}\cup\{\frac{1}{2n}\,|\,n\in\mathbb{N},n\ge 1\}$ thì ta có $D(Tx,Ty)=0.$

Nếu $x \in \{0,1\} \cup \{\frac{1}{2n} \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$ và $y = \frac{1}{2m+1}$, $m \in \mathbb{N}, m \geq 1$ thì ta có:

$$D(Tx,Ty) = \frac{1}{96m} \text{ và } D(Fx,Fy) = \frac{1}{2m}.$$

Nếu $x = \frac{1}{2n+1}$ và $y = \frac{1}{2m+1}, m,n \in \mathbb{N}$, $m,n \geq 1$ thì ta có:

$$D(Tx,Ty) = \frac{1}{96}\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \text{ và } D(Fx,Fy) = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right|.$$

Do đó, $D(Tx,Ty) = \frac{1}{3K^2} D(Fx,Fy)$ với mọi $x,y \in X$. Chọn $\Phi(s,t) = st$ với mọi $s,t \geq 0$ và $M = 1, \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{3}, a_1(x,y) = \frac{1}{3}, a_0(x,y) = a_2(x,y) = a_3(x,y) = 0$ với mọi $x,y \in X$ thì giả thiết (3) của Định lí 2.2 được thỏa mãn. Hơn nữa, tương tự như trong chứng minh của Ví dụ 2.6 thì các giả thiết còn lại của Định lí 2.2 cũng được thỏa mãn nên Định lí 2.2 áp dụng được cho bài toán này.

Tài liệu tham khảo

[1]. A. Aghaiani, M. Abbas, and J. R. Roshan (2014), "Common fixed point of generalized weak contractive mapping in partially order *b*-metric spaces", *Math. Slovaca*, 64 (4), p. 941-960.

[2]. M. Akkouchi (2011), "Well-posedness of a common fixed point problem for weakly tangential mappings", *Acta Math. Vietnam,* 36 (3), p. 623-635.

[3]. M. A. Al-thagafi, N. Shahzad (2008), "Generalized I-nonexpansive self maps and invariant approximations", *Acta Math. Sinica,* 24 (5), p. 867-876.

[4]. S. Czerwik (1998), "Nonlinear set - valued contraction mapping in b -metric spaces", *Atti Sem. Math. Fis. Univ. Modena,* (46), p. 263-276.

[5]. N. V. Dung, V. T. L. Hang, and S. Sedghi (2014), "Remarks on metric-type spaces and applications", *Bul. Asian Math.*, accepted paper.

[6]. G. Jungck and B. E. Rhoades (2006), "Fixed point theorems for occasionally weakly compatible mappings", *Fixed Point Theory,* 7 (2), p. 287-296.

[7]. M. A. Khamsi (2010), "Remarks on cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings", *Fixed Point Theory Appl.,* (2010), p. 1-7.

[8]. M. A. Khamsi and N. Husain (2010), "KKM mappings in metric-type spaces", *Nonlinear Anal.*, 7 (9), p. 3123-3129.

[9]. Nguyễn Thị Thanh Lý và Nguyễn Văn Dũng (2014), "Định lí điểm bất động cho ánh xạ trơn trên không gian kiểu-mêtric", *Tạp chí Đại học Công nghệ Sài Gòn*, bài gửi đăng.

A COMMON FIXED POINT THEOREM FOR WEAKLY TANGENTIAL MAPS IN b -METRIC SPACES

Summary

In this paper, a common fixed point theorem for two weakly tangential self-maps in b -metric spaces is proven without the continuity of b -metric. This result extends the main results of [2] in metric spaces into b -metric spaces. Also, some examples are given to illustrate the results obtained.

Keywords: common fixed point, b -metric, weakly tangential map.