ĐỊNH LÍ ĐIỂM BẤT ĐỘNG KÉP CHO ÁNH XẠ CO SUY RỘNG TRÊN KHÔNG GIAN b-MÊTRIC THỨ TỰ BỘ PHẬN

• ThS. Nguyễn Trung Hiếu(*), ThS. Huỳnh Ngọc Cảm(*)

Tóm tắt

Trong bài báo này, chúng tôi thiết lập và chứng minh một số định lí điểm bất động kép cho ánh xạ co suy rộng trên không gian b-mêtric thứ tự bộ phận. Các kết quả này là sự mở rộng của các kết quả chính trong [5]. Đồng thời, chúng tôi xây dựng một số ví dụ minh họa cho kết quả đạt được.

Từ khóa: điểm bất động kép, ánh xạ co suy rộng, không gian b-mêtric.

1. Giới thiệu

Mêtric là một khái niệm quan trọng trong giải tích. Từ khái niệm mêtric, nhiều tác giả đã xây dựng những mêtric suy rộng. Năm 1998, Czerwik đã giới thiệu một khái niệm mêtric suy rộng là b-mêtric như sau.

Định nghĩa 1.1 ([3]). Cho X là tập hợp khác rỗng và số thực $s \geq 1$. Hàm $d : X \times X \to [0,+\infty)$ được gọi là *b-mêtric* trên X nếu các điều kiện sau được thỏa mãn với mọi $x, y, z \in X$.

(1) $d(x,y) = 0$ khi và chỉ khi $x = y$;

(2) $d(x,y) = d(y,x)$;

(3) $d(x,y) \leq s(d(x,z) + d(z,y))$.

Cặp (X,d) được gọi là *không gian b-mêtric.* Hiển nhiên, với $s = 1$ thì b-mêtric là mêtric.

Từ đó, việc nghiên cứu những tính chất của không gian b-mêtric cũng như thiết lập những định lí điểm bất động trên không gian b-mêtric thu hút một số tác giả quan tâm [2], [7], [8].

Trong lí thuyết điểm bất động, việc nghiên cứu định lí điểm bất động kép cũng được nhiều tác giả quan tâm. Khái niệm điểm bất động kép được Bhaskar và Lakshmikantham giới thiệu trong [1]. Đồng thời, trong [1], các tác giả cũng giới thiệu khái niệm ánh xạ đơn điệu hỗn hợp và thiết lập một số định lí điểm bất động kép cho ánh xạ đơn điệu hỗn hợp trên không gian mêtric, xem [1, Theorem 2.1] và [1, Theorem 2.2]. Khái niệm điểm bất động kép và ánh xạ đơn điệu hỗn hợp được giới thiệu như sau.

Định nghĩa 1.2 ([1]). Điểm $(x,y) \in X \times X$ được gọi là *điểm bất động kép* của ánh xạ $F : X \times X \to X$ nếu $F(x,y) = x$ và $F(y,x) = y$.

Định nghĩa 1.3 ([1]). Cho $(X, \leq)$ là tập sắp thứ tự bộ phận và ánh xạ $F : X \times X \to X$. Ánh xạ F được gọi là *đơn điệu hỗn hợp* nếu các điều kiện sau được thỏa mãn với mọi $x, y, x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$.

(1) Nếu $x_1 \leq x_2$ thì $F(x_1,y) \leq F(x_2,y)$;

(2) Nếu $y_1 \leq y_2$ thì $F(x,y_1) \geq F(x,y_2)$.

Việc nghiên cứu mở rộng các kết quả chính của [1] thu hút nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu [4], [9]. Cùng hướng nghiên cứu này, trong [5], Luong và Thuan đã thiết lập một số kết quả về điểm bất động kép cho ánh xạ co suy rộng trên không gian mêtric thứ tự bộ phận. Trong phần tiếp theo, chúng tôi giới thiệu lại kết quả chính trong [5].

Kí hiệu Φ là tập hợp các hàm $\varphi : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ thỏa mãn các điều kiện:

(1) φ liên tục và đơn điệu không giảm;

(2) $\varphi(t) = 0$ khi và chỉ khi $t = 0$;

(3) $\varphi(t+s) \leq \varphi(t) + \varphi(s)$ với mọi $s, t \in [0,+\infty)$.

Kí hiệu Ψ là tập hợp các hàm $\psi : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ thỏa mãn $\lim\limits_{t \to r} \psi(t) > 0$ với mọi $r > 0$ và $\lim\limits_{t \to 0^+} \psi(t) = 0$.

(*) Khoa Sư phạm Toán - Tin, Trường Đại học Đồng Tháp.

Định lí 1.4 ([5]). *Cho (X,d) là không gian mêtric đầy đủ với thứ tự bộ phận $\leq$ và $F: X\times X\to X$ là ánh xạ đơn điệu hỗn hợp thỏa mãn*

(1) Tồn tại hàm $\varphi \in \Phi$ và hàm $\psi \in \Psi$ sao cho

$$\varphi(d(F(x,y),F(u,v))) \leq \frac{1}{2}\varphi(d(x,u)+d(y,v)) - \psi(\frac{d(x,u)+d(y,v)}{2}) \tag{1.1}$$

với mọi $x,y,u,v \in X$ mà $x \geq u$ và $y \leq v$;

(2) F là ánh xạ liên tục hoặc X có tính chất: với (x_n) là dãy không giảm và (y_n) là dãy không tăng sao cho $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y$ thì $x_n \leq x$ và $y_n \geq y$ với mọi $n \in \mathbb{N}$;

(3) Tồn tại $x_0, y_0 \in X$ sao cho $x_0 \leq F(x_0,y_0)$, $y_0 \geq F(y_0,x_0)$.

Khi đó, ánh xạ F có điểm bất động kép.

Gần đây, trong [6], Mursaleen và các cộng sự đã giới thiệu khái niệm hàm α-chấp nhận được như sau.

Định nghĩa 1.5 ([6]). Cho X là tập hợp khác rỗng, ánh xạ $F: X\times X \to X$ và ánh xạ $\alpha: X^2\times X^2 \to [0,+\infty)$. Khi đó, ánh xạ F được gọi là *α-chấp nhận được* nếu với mọi $x,y,u,v \in X$ sao cho $\alpha((x,y),(u,v)) \geq 1$ thì $\alpha((F(x,y),F(y,x)),(F(u,v),F(v,u))) \geq 1$.

Đồng thời, trong [6], bằng cách sử dụng hàm α-chấp nhận được, Mursaleen và các cộng sự đã xây dựng một số dạng định lí điểm bất động kép là mở rộng các kết quả chính của [1].

Trong bài báo này, bằng cách sử dụng hàm α-chấp nhận được, chúng tôi thiết lập một số định lí điểm bất động kép của ánh xạ co suy rộng trên không gian b-mêtric thứ tự bộ phận. Các kết quả này là sự mở rộng các kết quả chính của [5]. Hơn nữa, chúng tôi cũng xây dựng một số ví dụ minh họa cho kết quả đạt được.

Trước hết, chúng tôi trình bày một số khái niệm và kết quả cơ bản được sử dụng trong bài báo này.

Định nghĩa 1.6 ([2]). Cho (X,d) là không gian b-mêtric. Khi đó

(1) Dãy (x_n) được gọi là *hội tụ* đến x nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n,x) = 0$, kí hiệu là $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.

(2) Dãy (x_n) được gọi là *dãy Cauchy* nếu $\lim\limits_{n,m\to+\infty} d(x_n,x_m) = 0$.

(3) Không gian (X,d) được gọi là *đầy đủ* nếu mỗi dãy Cauchy trong X là dãy hội tụ.

Chú ý 1.7. Tôpô trên không gian b-mêtric (X,d) là tôpô sinh bởi sự hội tụ của nó. Hơn nữa, $X\times X$ cũng là một không gian b-mêtric với b-mêtric xác định bởi

$$D((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = d(x_1,x_2) + d(y_1,y_2) \text{ với mọi } (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in X\times X.$$

Mệnh đề 1.8 ([2]). *Cho (X,d) là không gian b-mêtric. Khi đó, nếu dãy (x_n) trong X hội tụ thì giới hạn của nó là duy nhất.*

Định nghĩa 1.9. Cho X là tập hợp khác rỗng, ánh xạ $F: X\times X\to X$ và ánh xạ $\alpha: X^2\times X^2 \to [0,+\infty)$. Khi đó, ánh xạ F được gọi là *α-chấp nhận được dạng tam giác* nếu các điều kiện sau được thỏa mãn với mọi $x,y,u,v,s,t \in X$.

(1) F là ánh xạ α-chấp nhận được;

(2) Nếu $\alpha((x,y),(u,v)) \geq 1$ và $\alpha((u,v),(s,t)) \geq 1$ thì $\alpha((x,y),(s,t)) \geq 1$.

2. Các kết quả chính

Trước hết, chúng tôi thiết lập định lí về sự tồn tại điểm bất động kép.

Định lí 2.1. *Cho (X,d) là không gian b-mêtric đầy đủ với thứ tự bộ phận $\leq$ và $F: X\times X\to X$ là ánh xạ đơn điệu hỗn hợp thỏa mãn*

(1) Tồn tại hàm $\alpha: X^2\times X^2 \to [0,+\infty)$, hàm $\varphi\in\Phi$ và hàm $\psi\in\Psi$ sao cho

$$\alpha((x,y),(u,v))\varphi\Big(s^2 d(F(x,y),F(u,v))\Big) \leq \frac{1}{2}\varphi(\frac{d(x,u)+d(y,v)}{s}) - \psi(\frac{d(x,u)+d(y,v)}{2}) \tag{2.1}$$

với mọi $x, y, u, v \in X$ *mà* $x \geq u$ *và* $y \leq v$;

(2) F *là ánh xạ* α*-chấp nhận được dạng tam giác;*

(3) F *là ánh xạ liên tục hoặc* X *thỏa mãn giả thiết* (H) *sau:*

Nếu (x_n) và (y_n) là hai dãy trong X sao cho $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y$ và $\alpha((x_{n+1}, y_{n+1}), (x_n, y_n)) \geq 1$, $\alpha((y_n, x_n), (y_{n+1}, x_{n+1})) \geq 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì $x_n \leq x$, $y_n \geq y$ và $\alpha((x_n, y_n), (x, y)) \geq 1$, $\alpha((y_n, x_n), (y, x)) \geq 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}$;

(4) Tồn tại $x_0, y_0 \in X$ *sao cho* $x_0 \leq F(x_0, y_0)$, $y_0 \geq F(y_0, x_0)$ *và*

$$\alpha((F(x_0, y_0), F(y_0, x_0)), (x_0, y_0)) \geq 1, \ \alpha((y_0, x_0), (F(y_0, x_0), F(x_0, y_0))) \geq 1.$$

Khi đó, ánh xạ F *có điểm bất động kép.*

Chứng minh. Ta xét dãy hai $(x_n), (y_n)$ trong X xác định bởi:

$$x_{n+1} = F(x_n, y_n) \text{ và } y_{n+1} = F(y_n, x_n) \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}, \quad (2.2)$$

trong đó, x_0, y_0 được xác định bởi giả thiết (4). Khi đó, sử dụng tính đơn điệu hỗn hợp của ánh xạ F, bằng qui nạp, ta chứng minh được

$$x_n \leq x_{n+1} \text{ và } y_n \geq y_{n+1} \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}. \quad (2.3)$$

Mặt khác, vì

$$\alpha((x_1, y_1), (x_0, y_0)) = \alpha((F(x_0, y_0), F(y_0, x_0)), (x_0, y_0)) \geq 1$$

và F là ánh xạ α-chấp nhận được nên ta có

$$\alpha((F(x_1, y_1), F(y_1, x_1)), (F(x_0, y_0), F(y_0, x_0))) \geq 1$$

hay $\alpha((x_2, y_2), (x_1, y_1)) \geq 1$.

Tiếp tục quá trình này, ta nhận được

$$\alpha((x_{n+1}, y_{n+1}), (x_n, y_n)) \geq 1 \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}. \quad (2.4)$$

Tương tự, ta cũng chứng minh được

$$\alpha((y_n, x_n), (y_{n+1}, x_{n+1})) \geq 1 \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}. \quad (2.5)$$

Khi đó, từ (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) và tính đơn điệu không giảm của hàm φ, ta có

$$\begin{aligned}\varphi(d(x_{n+1}, x_n)) &\leq \varphi(s^2 d(x_{n+1}, x_n)) \\ &= \varphi(s^2 d(F(x_n, y_n), F(x_{n-1}, y_{n-1}))) \\ &\leq \alpha((x_n, y_n), (x_{n-1}, y_{n-1}))\varphi(s^2 d(F(x_n, y_n), F(x_{n-1}, y_{n-1}))) \\ &\leq \frac{1}{2}\varphi\Big(\frac{d(x_n, x_{n-1}) + d(y_n, y_{n-1})}{s}\Big) - \psi\Big(\frac{d(x_n, x_{n-1}) + d(y_n, y_{n-1})}{2}\Big). \quad (2.6)\end{aligned}$$

Tương tự, từ (2.1), (2.2), (2.3), (2.5) và tính đơn điệu không giảm của hàm φ, ta có

$$\varphi(d(y_n, y_{n+1})) \leq \frac{1}{2}\varphi\Big(\frac{d(y_{n-1}, y_n) + d(x_{n-1}, x_n)}{s}\Big) - \psi\Big(\frac{d(y_{n-1}, y_n) + d(x_{n-1}, x_n)}{2}\Big). \quad (2.7)$$

Từ (2.6) và (2.7) ta được

$$\begin{aligned}\varphi(d(x_{n+1}, x_n)) + \varphi(d(y_{n+1}, y_n)) &\leq \varphi\Big(\frac{d(x_n, x_{n-1}) + d(y_n, y_{n-1})}{s}\Big) \\ &\quad -2\psi\Big(\frac{d(y_{n-1}, y_n) + d(x_{n-1}, x_n)}{2}\Big). \quad (2.8)\end{aligned}$$

Mặt khác, từ tính chất (3) của hàm φ, ta có

$$\varphi(d(x_{n+1}, x_n) + d(y_{n+1}, y_n)) \leq \varphi(d(x_{n+1}, x_n)) + \varphi(d(y_{n+1}, y_n)). \quad (2.9)$$

Do đó, từ (2.8) và (2.9), ta được

$$\begin{aligned}\varphi(d(x_{n+1}, x_n) + d(y_{n+1}, y_n)) &\leq \varphi\Big(\frac{d(x_n, x_{n-1}) + d(y_n, y_{n-1})}{s}\Big) \\ &\quad -2\psi\Big(\frac{d(y_{n-1}, y_n) + d(x_{n-1}, x_n)}{2}\Big). \quad (2.10)\end{aligned}$$

Từ (2.10) và tính không âm của hàm ψ, ta có

$$\varphi(d(x_{n+1},x_n)+d(y_{n+1},y_n)) \le \varphi(\frac{d(x_n,x_{n-1})+d(y_n,y_{n-1})}{s})$$
$$\le \varphi(d(x_n,x_{n-1})+d(y_n,y_{n-1})). \quad (2.11)$$

Từ (2.11) và tính đơn điệu không giảm của hàm φ, ta nhận được

$$d(x_{n+1},x_n)+d(y_{n+1},y_n) \le d(x_n,x_{n-1})+d(y_n,y_{n-1}). \quad (2.12)$$

Đặt $\delta_n = d(x_{n+1},x_n)+d(y_{n+1},y_n)$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Khi đó, từ (2.12), ta suy ra (δ_n) là dãy số đơn điệu không tăng và không âm. Do đó, tồn tại $\delta \ge 0$ sao cho $\lim_{n\to+\infty}\delta_n = \delta$. Ta sẽ chứng minh $\delta = 0$. Giả sử $\delta > 0$. Khi đó, cho $n \to +\infty$ trong (2.10) và sử dụng tính chất của hàm φ, ψ, ta được

$$\varphi(\delta) \le \varphi(\frac{\delta}{s}) - 2\lim_{n\to+\infty}\psi(\frac{\delta_{n-1}}{2}) \le \varphi(\delta) - 2\lim_{\delta_{n-1}\to\delta}\psi(\frac{\delta_{n-1}}{2}) < \varphi(\delta).$$

Điều này là mâu thuẫn. Do đó, $\delta = 0$ hay

$$\lim_{n\to+\infty}\delta_n = 0. \quad (2.13)$$

Tiếp theo, ta chứng minh (x_n) và (y_n) là hai dãy Cauchy. Giả sử (x_n) hoặc (y_n) không là dãy Cauchy. Khi đó, $\lim_{n,m\to+\infty}(d(x_n,x_m)+d(y_n,y_m)) \ne 0$. Do đó, tồn tại $\varepsilon > 0$, hai dãy con $(x_{n(k)}), (x_{m(k)})$ của (x_n) và hai dãy con $(y_{n(k)}), (y_{m(k)})$ của (y_n) với $n(k)$ nhỏ nhất thỏa mãn $n(k) \ge m(k) \ge k$ và

$$d(x_{n(k)},x_{m(k)})+d(y_{n(k)},y_{m(k)}) \ge \varepsilon. \quad (2.14)$$

Do đó

$$d(x_{n(k)-1},x_{m(k)})+d(y_{n(k)-1},y_{m(k)}) < \varepsilon. \quad (2.15)$$

Khi đó, từ (2.14) và điều kiện (3) trong Định nghĩa 1.1, ta có

$$\varepsilon \le d(x_{n(k)},x_{m(k)})+d(y_{n(k)},y_{m(k)})$$
$$= s\delta_{n(k)-1} + s^2\delta_{m(k)-1} + s^2(d(x_{n(k)-1},x_{m(k)-1})+d(y_{n(k)-1},y_{m(k)-1})). \quad (2.16)$$

Cho $k \to +\infty$ trong (2.16) và sử dụng (2.13), ta được

$$\frac{\varepsilon}{s^2} \le \limsup_{k\to+\infty}(d(x_{n(k)-1},x_{m(k)-1})+d(y_{n(k)-1},y_{m(k)-1})). \quad (2.17)$$

Từ (2.15) và điều kiện (3) trong Định nghĩa 1.1, ta có

$$d(x_{n(k)-1},x_{m(k)-1})+d(y_{n(k)-1},y_{m(k)-1}) \le s(d(x_{n(k)-1},x_{m(k)})+d(y_{n(k)-1},y_{m(k)}))$$
$$+s(d(x_{m(k)},x_{m(k)-1})+d(y_{m(k)},y_{m(k)-1}))$$
$$< \varepsilon s + s\delta_{m(k)-1}. \quad (2.18)$$

Cho $k \to +\infty$ trong (2.18) và sử dụng (2.13), ta được

$$\limsup_{k\to+\infty}(d(x_{n(k)-1},x_{m(k)-1})+d(y_{n(k)-1},y_{m(k)-1})) \le \varepsilon s. \quad (2.19)$$

Từ (2.17) và (2.19), ta được

$$\frac{\varepsilon}{s^2} \le \limsup_{k\to+\infty}(d(x_{n(k)-1},x_{m(k)-1})+d(y_{n(k)-1},y_{m(k)-1})) \le \varepsilon s. \quad (2.20)$$

Một cách tương tự, ta chứng minh được

$$\frac{\varepsilon}{s^2} \le \liminf_{k\to+\infty}(d(x_{n(k)-1},x_{m(k)-1})+d(y_{n(k)-1},y_{m(k)-1})) \le \varepsilon s. \quad (2.21)$$

Vì $n(k) > m(k)$ nên $x_{n(k)} \geq x_{m(k)}$ và $y_{n(k)} \leq y_{m(k)}$. Mặt khác, từ (2.4) và điều kiện (2) của Định nghĩa 1.9 ta chứng minh được $\alpha((x_{n(k)}, y_{n(k)}), (x_{m(k)}, y_{m(k)})) \geq 1$. Do đó, từ (2.1) và (2.2), ta có

$$\begin{aligned}\varphi(s^2 d(x_{n(k)+1}, x_{m(k)+1})) &= \varphi(s^2 d(F(x_{n(k)}, y_{n(k)}), F(x_{m(k)}, y_{m(k)}))) \\ &\leq \alpha((x_{n(k)}, y_{n(k)}), (x_{m(k)}, y_{m(k)}))\varphi(s^2 d(F(x_{n(k)}, y_{n(k)}), F(x_{m(k)}, y_{m(k)}))) \\ &\leq \frac{1}{2}\varphi(\frac{d(x_{n(k)}, x_{m(k)}) + d(y_{n(k)}, y_{m(k)})}{s}) \\ &\quad -\psi(\frac{d(x_{n(k)}, x_{m(k)}) + d(y_{n(k)}, y_{m(k)})}{2}). \qquad (2.22)\end{aligned}$$

Tương tự, ta chứng minh được

$$\begin{aligned}\varphi(s^2 d(y_{n(k)+1}, y_{m(k)+1})) &\leq \frac{1}{2}\varphi(\frac{d(y_{m(k)}, y_{n(k)}) + d(x_{m(k)}, x_{n(k)})}{s}) \\ &\quad -\psi(\frac{d(y_{m(k)}, y_{n(k)}) + d(x_{m(k)}, x_{n(k)})}{2}). \qquad (2.23)\end{aligned}$$

Từ (2.22), (2.23) và tính chất (3) của hàm φ, ta có

$$\begin{aligned}\varphi(s^2(d(x_{n(k)+1}, x_{m(k)+1}) + d(y_{n(k)+1}, y_{m(k)+1}))) &\leq \varphi(\frac{d(x_{n(k)}, x_{m(k)}) + d(y_{n(k)}, y_{m(k)})}{s}) \\ &\quad -2\psi(\frac{d(x_{n(k)}, x_{m(k)}) + d(y_{n(k)}, y_{m(k)})}{2}). \qquad (2.24)\end{aligned}$$

Cho $k \to +\infty$ trong (2.24) và sử dụng (2.20), (2.21), ta được

$$\begin{aligned}\varphi(\varepsilon) = \varphi(s^2 \frac{\varepsilon}{s^2}) &\leq \varphi(s^2 \limsup_{k\to+\infty}(d(x_{n(k)+1}, x_{m(k)+1}) + d(y_{n(k)+1}, y_{m(k)+1}))) \\ &\leq \varphi(\limsup_{k\to+\infty}\frac{d(x_{n(k)}, x_{m(k)}) + d(y_{n(k)}, y_{m(k)})}{s}) \\ &\quad -2\liminf_{k\to+\infty}\psi(\frac{d(x_{n(k)}, x_{m(k)}) + d(y_{n(k)}, y_{m(k)})}{2}) \\ &\leq \varphi(\varepsilon) - 2\liminf_{k\to+\infty}\psi(\frac{d(x_{n(k)}, x_{m(k)}) + d(y_{n(k)}, y_{m(k)})}{2}) < \varphi(\varepsilon).\end{aligned}$$

Điều này là mâu thuẫn. Do đó, (x_n) và (y_n) là hai dãy Cauchy trong X. Vì X là không gian b-mêtric đầy đủ nên tồn tại $x, y \in X$ sao cho

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x \text{ và } \lim_{n\to+\infty} y_n = y. \qquad (2.25)$$

Giả sử F là ánh xạ liên tục. Khi đó, từ (2.2) và (2.25), ta có

$$x = \lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} F(x_{n-1}, y_{n-1}) = F(\lim_{n\to+\infty} x_{n-1}, \lim_{n\to+\infty} y_{n-1}) = F(x, y)$$

và

$$y = \lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty} F(y_{n-1}, x_{n-1}) = F(\lim_{n\to+\infty} y_{n-1}, \lim_{n\to+\infty} x_{n-1}) = F(y, x).$$

Suy ra (x, y) là điểm bất động kép của ánh xạ F.

Giả sử giả thiết (H) được thỏa mãn. Khi đó, từ (2.4), (2.5) và (2.25) ta suy ra $x_n \leq x$, và $y_n \geq y$, $\alpha((x_n, y_n), (x, y)) \geq 1$ và $\alpha((y_n, x_n), (y, x)) \geq 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Do đó

$$\begin{aligned}\varphi(d(x,F(x,y))) &\le \varphi(sd(x,x_{n+1})+sd(x_{n+1},F(x,y)))\\ &\le \varphi(sd(x,x_{n+1}))+\varphi(sd(F(x_n,y_n),F(x,y)))\\ &\le \varphi(sd(x,x_{n+1}))+\alpha((x_n,y_n),(x,y))\varphi(s^2d(F(x_n,y_n),F(x,y)))\\ &\le \varphi(sd(x,x_{n+1}))+\frac{1}{2}\varphi(\frac{d(x_n,x)+d(y_n,y)}{s})-\psi(\frac{d(x_n,x)+d(y_n,y)}{2})\\ &\le \varphi(sd(x,x_{n+1}))+\frac{1}{2}\varphi(\frac{d(x_n,x)+d(y_n,y)}{s}).\end{aligned} \quad (2.26)$$

Cho $n \to +\infty$ trong (2.26), sử dụng (2.25) và tính liên tục của hàm φ, ta được $\varphi(d(x,F(x,y)))=0$. Do đó, $d(x,F(x,y))=0$ hay $x=F(x,y)$. Tương tự, ta cũng chứng minh được $y=F(y,x)$. Do đó, (x,y) là điểm bất động kép của ánh xạ F. □

Tiếp theo, chúng tôi thiết lập định lí về sự tồn tại duy nhất điểm bất động kép.

Giả sử $(X,\le)$ là tập sắp thứ tự bộ phận. Khi đó, quan hệ thứ tự bộ phận trên $X\times X$ được xác định bởi: $(x,y),(u,v)\in X\times X$, $(x,y)\le(u,v)$ khi và chỉ khi $x\le u, y\ge v$.

Định lí 2.2. *Giả sử*

(1) Các giả thiết của Định lí 2.1 được thỏa mãn;

(2) Với mỗi (x,y), $(z,t)\in X\times X$, tồn tại $(u,v)\in X\times X$ sao cho (u,v) so sánh được với (x,y), (z,t) và $\alpha((x,y),(u,v))\ge 1$, $\alpha((v,u),(y,x))\ge 1$, $\alpha((z,t),(u,v))\ge 1$, $\alpha((v,u),(t,z))\ge 1$.

Khi đó, ánh xạ F có duy nhất điểm bất động kép.

Chứng minh. Từ chứng minh của Định lí 2.1, ta suy ra F có điểm bất động kép. Ta sẽ chứng minh tính duy nhất của điểm bất động kép. Giả sử (x,y) và (z,t) là hai điểm bất động kép của F. Theo giả thiết, tồn tại $(u,v)\in X\times X$ sao cho (u,v) so sánh được với (x,y) và (z,t). Ta xét dãy (u_n) và (v_n) xác định bởi:

$u_0=u, u_{n+1}=F(u_n,v_n)$ và

$v_0=v, v_{n+1}=F(v_n,u_n)$ với mọi $n\in\mathbb{N}$.

Vì (u,v) so sánh được với (x,y) nên ta có thể giả sử $(x,y)\ge(u,v)=(u_0,v_0)$. Bằng cách sử dụng tính đơn điệu hỗn hợp của F, ta chứng minh được $(x,y)\ge(u_n,v_n)$ với mọi $n\in\mathbb{N}$.

Mặt khác, vì $\alpha((x,y),(u,v))\ge 1$, $\alpha((v,u),(y,x))\ge 1$ và F là α-chấp nhận được nên ta có

$\alpha((F(x,y),F(y,x)),(F(u,v),F(v,u)))\ge 1$

và $\alpha((F(v,u),F(u,v)),(F(y,x),F(x,y)))\ge 1$.

Vì $u_0=u$ và $v_0=v$ nên ta có

$\alpha((F(x,y),F(y,x)),(F(u_0,v_0),F(v_0,u_0)))\ge 1$

và $\alpha((F(v_0,u_0),F(u_0,v_0)),(F(y,x),F(x,y)))\ge 1$.

Do đó $\alpha((x,y),(u_1,v_1))\ge 1$ và

$\alpha((v_1,v_1),(y,x))\ge 1$.

Tiếp tục quá trình này, ta chứng minh được $\alpha((x,y),(u_n,v_n))\ge 1$ và $\alpha((v_n,v_n),(y,x))\ge 1$ với mọi $n\in\mathbb{N}$. (2.27)

Khi đó, từ (2.1), (2.27) và tính đơn điệu không giảm của hàm φ, ta có

$$\begin{aligned}\varphi(d(x,u_{n+1})) &\le \varphi(s^2d(F(x,y),F(u_n,v_n)))\\ &\le \alpha((x,y),(u_n,v_n))\varphi(s^2d(F(x,y),F(u_n,v_n)))\\ &\le \frac{1}{2}\varphi(\frac{d(x,u_n)+d(y,v_n)}{s})-\psi(\frac{d(x,u_n)+d(y,v_n)}{2}).\end{aligned} \quad (2.28)$$

Tương tự, ta cũng có

$$\varphi(d(v_{n+1},y)) \le \frac{1}{2}\varphi(\frac{d(v_n,y)+d(x_n,u)}{s}) - \psi(\frac{d(v_n,y)+d(x_n,u)}{2}). \quad (2.29)$$

Từ (2.28) và tính chất của hàm φ, ψ, ta có

$$\begin{aligned}\varphi(d(x,u_{n+1})+d(v_{n+1},y)) &\le \varphi(\frac{d(x,u_n)+d(y,v_n)}{s}) - 2\psi(\frac{d(x,u_n)+d(y,v_n)}{2}).\\ &\le \varphi(\frac{d(x,u_n)+d(y,v_n)}{s})\\ &\le \varphi(d(x,u_n)+d(y,v_n)). \quad (2.30)\end{aligned}$$

Từ (2.30) và tính đơn điệu không giảm của φ, ta có $d(x,u_{n+1})+d(v_{n+1},y) \le d(x,u_n)+d(y,v_n)$ hay $(d(x,u_n)+d(y,v_n))$ là dãy số không âm và đơn điệu không tăng. Do đó, tồn tại $\lambda \ge 0$ thỏa mãn

$$\lim_{n\to+\infty}(d(x,u_n)+d(y,v_n)) = \lambda. \quad (2.31)$$

Giả sử $\lambda > 0$. Cho $n \to +\infty$ trong (2.30) và sử dụng (2.31), ta được

$$\varphi(\lambda) \le \varphi(\frac{\lambda}{s}) - 2\lim_{n\to+\infty}\psi(\frac{d(x,u_n)+d(y,v_n)}{2}) < \varphi(\frac{\lambda}{s}) \le \varphi(\lambda).$$

Điều này là mâu thuẫn. Do đó, $\lim_{n\to+\infty}(d(x,u_n)+d(y,v_n)) = \lambda = 0.$ Suy ra $\lim_{n\to+\infty} d(x,u_n) = 0$ và $\lim_{n\to+\infty} d(y,v_n)) = 0.$ Suy ra

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = x \text{ và } \lim_{n\to+\infty} v_n = y. \quad (2.32)$$

Lập luận tương tự như trên khi (u,v) so sánh được với (z,t), ta chứng minh được

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = z \text{ và } \lim_{n\to+\infty} v_n = t. \quad (2.33)$$

Từ (2.32), (2.33) và tính duy nhất của giới hạn, ta suy ra $(x,y)=(z,t)$. Vậy F có duy nhất điểm bất động. □

Vì mêtric là trường hợp đặc biệt của b-mêtric nên từ Định lí 2.1 và Định lí 2.2 ta nhận được 2 hệ quả sau.

Hệ quả 2.3. *Cho (X,d) là không gian mêtric đầy đủ với thứ tự bộ phận $\le$ và $F: X\times X \to X$ là ánh xạ đơn điệu hỗn hợp thỏa mãn*

(1) Tồn tại hàm $\alpha: X^2\times X^2 \to [0,+\infty)$, hàm $\varphi\in\Phi$ và hàm $\psi\in\Psi$ sao cho

$$\alpha((x,y),(u,v))\varphi(d(F(x,y),F(u,v))) \le \frac{1}{2}\varphi(d(x,u)+d(y,v)) - \psi(\frac{d(x,u)+d(y,v)}{2}) \quad (2.34)$$

với mọi $x,y,u,v\in X$ mà $x\ge u$ và $y \le v$;

(2) F là ánh xạ α-chấp nhận được dạng tam giác;

(3) F là ánh xạ liên tục hoặc X thỏa mãn giả thiết (H);

(4) Tồn tại $x_0, y_0 \in X$ sao cho

$x_0 \le F(x_0,y_0)$, $y_0 \ge F(y_0,x_0)$,

$\alpha((F(x_0,y_0),F(y_0,x_0)),(x_0,y_0)) \ge 1$ *và*

$\alpha((y_0,x_0),(F(y_0,x_0),F(x_0,y_0))) \ge 1.$

Khi đó, ánh xạ F có điểm bất động kép.

Hệ quả 2.4. *Giả sử*

(1) Các giả thiết của Hệ quả 2.3 được thỏa mãn;

(2) Với mỗi (x,y), $(z,t)\in X\times X$, tồn tại $(u,v)\in X\times X$ sao cho (u,v) so sánh được với (x,y), (z,t) và $\alpha((x,y),(u,v))\ge 1$, $\alpha((v,u),(y,x))\ge 1$, $\alpha((z,t),(u,v))\ge 1$, $\alpha((v,u),(t,z))\ge 1$.

Khi đó, ánh xạ F có duy nhất điểm bất động kép.

Nhận xét 2.5. Bằng cách lập luận như trong chứng minh của [10, Theorem 3.4], [10, Theorem 3.5], từ Hệ quả 2.3 ta nhận được [5, Theorem 2.1].

Cuối cùng, chúng tôi xây dựng ví dụ minh họa cho các kết quả đạt được. Ví dụ sau là một minh họa cho sự tồn tại điểm bất động kép của Định lí 2.1.

Ví dụ 2.6. Xét $X = \mathbb{R}$ với thứ tự thông thường và b-mêtric xác định bởi $d(x,y) = (x-y)^2$ với mọi $x, y \in X$. Khi đó, (X,d) là b-mêtric đầy đủ với $s = 2$. Xét ánh xạ $F(x,y) = \frac{1}{8}(x-y)$ với mọi $(x,y) \in X \times X$, hàm $\varphi(t) = 4t$, $\psi(t) = t$ với mọi $t \geq 0$ và ánh xạ $\alpha : X^2 \times X^2 \to [0,+\infty)$ xác định bởi

$$\alpha((x,y),(u,v)) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \geq u \text{ và } y \leq v \\ 0 & \text{trong các trường hợp còn lại.} \end{cases}$$

Khi đó, với $x \geq u$ và $y \leq v$, ta có $\alpha((x,y),(u,v)) = 1$. Do đó

$$\alpha((x,y),(u,v))\varphi(s^2 d(F(x,y),F(u,v))) = \frac{1}{4}((x-u)+(v-y))^2 \leq \frac{1}{2}((x-u)^2 + (v-y)^2)$$

$$= \frac{1}{2}\varphi(\frac{d(x,u)+d(y,v)}{s}) - \psi(\frac{d(x,u)+d(y,v)}{2}).$$

Như vậy điều kiện (2.1) được thỏa mãn. Hơn nữa, khi $\alpha((x,y),(u,v)) = 1$ ta có $x \geq u$ và $y \leq v$. Suy ra $F(x,y) \geq F(u,v)$ và $F(y,x) \leq F(v,u)$. Do đó $\alpha((F(x,y),F(y,x)),(F(u,v),F(v,u))) = 1$.

Suy ra F là ánh xạ α-chấp nhận được. Đồng thời, các giả thiết còn lại của Định lí 2.1 đều thỏa mãn. Do đó, ta có thể áp dụng Định lí 2.1 cho ánh xạ F này. Hơn nữa, $(0,0)$ là điểm bất động kép.

Ví dụ sau chứng tỏ rằng Hệ quả 2.3 mạnh hơn Định lí 1.4 ([5, Theorem 2.1]).

Ví dụ 2.7. Xét $X = [0,+\infty)$ với thứ tự thông thường và mêtric xác định bởi $d(x,y) = |x-y|$ với mọi $x, y \in X$. Khi đó, (X,d) là mêtric đầy đủ. Xét ánh xạ $F(x,y) = 2|x-y|$ với mọi $(x,y) \in X \times X$. Chọn $(x,y) = (6,1)$ và $(u,v) = (5,2)$. Ta có $d(F(x,y),F(u,v)) = d(10,6) = 4$ và $d(x,u) + d(y,v) = 2$. Giả sử điều kiện (1.1) trong Định lí 1.4 ([5, Theorem 2.1]) được thỏa mãn. Khi đó, ta phải có $\varphi(4) \leq \frac{1}{2}\varphi(2) - \psi(1) < \varphi(2)$. Điều này là mâu thuẫn với tính đơn điệu không giảm của hàm φ. Do đó, điều kiện (1.1) trong Định lí 1.4 ([5, Theorem 2.1]) không thỏa mãn. Do đó, ta không thể áp dụng Định lí 1.4 ([5, Theorem 2.1]) cho ánh xạ F này. Bây giờ, ta xét hàm $\varphi(t) = t$, $\psi(t) = \frac{t}{2}$ với mọi $t \geq 0$ và ánh xạ $\alpha : X^2 \times X^2 \to [0,+\infty)$ xác định bởi:

$$\alpha((x,y),(u,v)) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } (x,y,u,v) = (0,0,0,0) \\ \frac{1}{8} & \text{nếu } (x,y,u,v) \neq (0,0,0,0). \end{cases}$$

Khi đó, với $x \geq u$ và $y \leq v$ mà $(x,y,u,v) = 0$ thì hiển nhiên điều kiện (2.34) thỏa mãn. Do đó, ta chỉ cần xét trường hợp $(x,y,u,v) \neq 0$. Khi đó

$$\alpha((x,y),(u,v))\varphi(d(F(x,y),F(u,v))) = \frac{1}{4}||x-y|-|u-v|| \leq \frac{1}{4}(|x-u|+|v-y|)$$

$$= \frac{1}{2}\varphi(d(x,u)+d(y,v)) - \psi(\frac{d(x,u)+d(y,v)}{2}).$$

Như vậy điều kiện (2.34) được thỏa mãn. Đồng thời, các giả thiết khác của Hệ quả 2.3 đều thỏa mãn. Do đó, ta có thể áp dụng Hệ quả 2.3 cho ánh xạ F. Hơn nữa, $(0,0)$ là điểm bất động kép.

Tài liệu tham khảo

[1]. G. Bhaskar and V. Lakshmikantham (2006), "Fixed point theorems in partially ordered metric spaces and applications", *Nonlinear Anal.*, 65, pp. 1379-1393.

[2]. M. Boriceanu (2009), "Strict fixed point theorems for multivalued operators in b-metric spaces", *Int. J. Mod. Math.* 4(3), pp. 285-301.

[3]. S. Czerwik (1998), "Nonlinear set-valued contraction mappings in b-metric spaces", *Atti Semin. Mat. Fis. Univ. Modena*, 46(2), pp. 263-276.

[4]. V. Lakshmikantham and L. Ciric (2009), "Coupled fixed point theorems for nonlinear contractions in partially ordered metric spaces", *Nonlinear Anal.*, 70, pp. 4341-4349.

[5]. N. V. Luong and N. X. Thuan (2011), "Coupled fixed points in partially ordered metric spaces and application", *Nonlinear Anal.*, 74, pp. 983-992.

[6]. M. Mursaleen, A. Mohiuddine and P. Agarwal (2012), "Coupled fxed point theorems for α-ψ-contractive type mappings in partially ordered metric spaces", *Fixed Point Theory Appl.*, 2012:228, 11 pages.

[7]. V. Parvaneh, J. R. Roshan and S. Radenovic (2013), "Existence of tripled coincidence points in ordered b-metric spaces and an application to a system of integral equations", *Fixed Point Theory Appl.*, 2013:130, 19 pages.

[8]. J. R. Roshan, V. Parvaneh, S. Sedghi, N. Shobkolaei and W. Shatanawi (2013), "Common fixed points of almost generalized $(\psi,\varphi)_s$-contractive mappings in ordered b-metric spaces", *Fixed Point Theory Appl.*, 2013:159, 23 pages.

[9]. B. Samet, C. Vetro and P. Vetro (2012), "Fixed point theorems for α-ψ-contractive type mappings", *Nonlinear Anal.*, 75, pp. 2154 -2165.

[10]. W. Shatanawi, B. Samet and M. Abbas (2012), "Coupled fixed point theorems for mixed monotone mappings in ordered partial metric spaces", *Math. Comput. Modelling*, 55, pp. 680-687.

Summary

In this paper, we construct and prove a number of coupled fixed point theorems for generalized contraction mappings on partially ordered b-metric spaces. These results are modifications to the main findings reported in [5]. Also, some examples are given to illustrate the obtained results.

Keywords: coupled fixed point, generalized contraction mappings, b-metric spaces.

Ngày nhận bài: 20/3/2014; ngày nhận đăng: 24/4/2014.