VỀ ĐỊNH LÍ ĐIỂM BẤT ĐỘNG CHO LỚP ÁNH XẠ MEIR-KEELER α-CO TRÊN KHÔNG GIAN KIỂU-MÊTRIC

• ThS. Nguyễn Trung Hiếu (*), Hồ Quốc Ái (**)

Tóm tắt

Trong bài báo này, chúng tôi giới thiệu khái niệm ánh xạ Meir-Keeler α-co, Meir-Keeler α-co tổng quát, cặp ánh xạ Meir-Keeler α-co tổng quát, ánh xạ Meir-Keeler α-f-co và ánh xạ Meir-Keeler α-f-co tổng quát trên không gian kiểu-mêtric. Đồng thời, chúng tôi thiết lập và chứng minh một số định lí điểm bất động cho các loại ánh xạ này. Các kết quả này là sự mở rộng của các định lí điểm bất động trong bài báo [1]. Ngoài ra, chúng tôi xây dựng ví dụ minh họa cho kết quả đạt được.

Từ khóa: điểm bất động, Meir-Keeler α-co, kiểu-mêtric.

1. Giới thiệu

Trong bài báo [5], Khamsi đã giới thiệu một khái niệm mêtric suy rộng như sau.

Định nghĩa 1.1 ([5], Definition 2.7). Cho X là một tập hợp khác rỗng, $K \geq 1$ là một số thực và $D: X \times X \to [0,\infty)$ là một ánh xạ thỏa mãn các điều kiện sau.

1) $D(x,y)=0$ khi và chỉ khi $x=y$.

2) $D(x,y)=D(y,x)$ với mọi $x,y\in X$.

3) $D(x,z)\leq K[D(x,y_1)+D(y_1,y_2)+\ldots+D(y_n,z)]$ với mọi $x,y_1,y_2,\ldots,y_n,z\in X$ và $n\in\mathbb{N}$.

Khi đó, D được gọi là *kiểu-mêtric* trên X và (X,D,K) được gọi là *không gian kiểu-mêtric*. Rõ ràng, (X,d) là không gian mêtric khi và chỉ khi $(X,d,1)$ là không gian kiểu-mêtric.

Trong bài báo [2] và [4], các tác giả đã xét không gian kiểu-mêtric khác, trong đó điều kiện (3) trong Định nghĩa 1.1 được thay bởi điều kiện sau

$D(x,z)\leq K[D(x,y)+D(y,z)]$ với mọi $x,y,z\in X$.

Trong bài báo này, chúng tôi xét không gian kiểu-mêtric như trong Định nghĩa 1.1. Các khái niệm dãy hội tụ, dãy Cauchy và tính đầy đủ của không gian kiểu-mêtric được giới thiệu trong [5] như sau.

Định nghĩa 1.2 ([5], Definition 2.8). Cho (X,D,K) là một không gian kiểu-mêtric và $\{x_n\}$ là một dãy trong X. Khi đó

1) Dãy $\{x_n\}$ được gọi là *hội tụ* đến $x\in X$, viết là $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, nếu $\lim_{n\to\infty} D(x_n,x)=0$. Điểm x được gọi là điểm giới hạn của dãy $\{x_n\}$.

2) Dãy $\{x_n\}$ được gọi là dãy *Cauchy* nếu $\lim_{n,m\to\infty} D(x_n,x_m)=0$.

3) Không gian (X,D,K) được gọi là *đầy đủ* nếu mọi dãy Cauchy trong (X,D,K) là dãy hội tụ.

Mệnh đề 1.3. *Cho (X,D,K) là một không gian kiểu-mêtric. Nếu dãy $\{x_n\}$ hội tụ thì điểm giới hạn của nó là duy nhất.*

Chứng minh. Giả sử $\{x_n\}$ là một dãy trong không gian kiểu-mêtric (X,D,K) và tồn tại $p,q\in X$ sao cho $\lim_{n\to\infty} x_n = p$ và $\lim_{n\to\infty} x_n = q$. Khi đó, ta có

$$D(p,q)\leq K[D(p,x_n)+D(x_n,q)]$$

(*) Khoa Sư phạm Toán – Tin, Trường Đại học Đồng Tháp.
(**) Sinh viên, Khoa Sư phạm Toán – Tin, Trường Đại học Đồng Tháp.

Cho $n \to \infty$ ta được $D(p,q)=0$ hay $p=q$. Vậy $\{x_n\}$ hội tụ đến một phần tử duy nhất. □

Nhận xét 1.4. Trong không gian kiểu-mêtric (X,D,K), tôpô được hiểu là tôpô cảm sinh bởi sự hội tụ của nó. Điều này có nghĩa là tập G mở trong không gian kiểu-mêtric (X,D,K) khi và chỉ khi với mỗi $x \in G$, mọi dãy $\{x_n\} \subset X$ mà $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ thì tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $x_n \in G$ với mọi $n \ge n_0$. Khi đó, kiểu-mêtric $D: X \times X \to [0,\infty)$ liên tục tại *(x, y)* nếu và chỉ nếu $\lim_{n\to\infty} D(x_n, y_n) = D(x,y)$ với mọi dãy $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ trong X mà $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ và $\lim_{n\to\infty} y_n = y$.

Nhận xét 1.5. Ánh xạ kiểu-mêtric D là ánh xạ không liên tục, xem [3, Example 2.1].

Trong bài báo [1], Abdeljawad đã giới thiệu khái niệm ánh xạ Meir-Keeler α-co, Meir-Keeler α-co tổng quát, cặp ánh xạ Meir-Keeler α-co tổng quát, ánh xạ Meir-Keeler α-f-co và ánh xạ Meir-Keeler α-f-co tổng quát trên không gian mêtric. Lớp các ánh xạ này là sự mở rộng của các loại ánh xạ Meir-Keeler α-co trong các tài liệu tham khảo của [1]. Đồng thời, trong bài báo [1], tác giả đã thiết lập định lí điểm bất động cho các lớp ánh xạ được định nghĩa như trên và đạt được những kết quả như [1, Theorem 8], [1, Corollary 9] và [1, Theorem 16]. Trong phần tiếp theo, chúng tôi trình bày lại khái niệm các loại ánh xạ Meir-Keeler α-co trên không gian mêtric.

Định nghĩa 1.6 ([6], Definition 2.2). Cho X là một tập hợp khác rỗng, ánh xạ $f: X \to X$ và ánh xạ $\alpha: X \times X \to [0,\infty)$. Khi đó, ánh xạ f được gọi là α-*admissible* nếu mọi $x, y \in X$ mà $\alpha(x,y) \ge 1$ ta có $\alpha(fx, fy) \ge 1$.

Định nghĩa 1.7 ([1], Definition 1). Cho X là một tập hợp khác rỗng, hai ánh xạ $f, g: X \to X$ và ánh xạ $\alpha: X \times X \to [0,\infty)$. Khi đó, cặp (f,g) được gọi là α-*admissible* nếu mọi $x, y \in X$ mà $\alpha(x,y) \ge 1$ ta có $\alpha(fx, gy) \ge 1$ và $\alpha(gx, fy) \ge 1$.

Định nghĩa 1.8 ([1], Definition 3-5). Cho (X,d) là một không gian mêtric, hai ánh xạ $f, g: X \to X$ và ánh xạ $\alpha: X \times X \to [0,\infty)$. Khi đó

1) Ánh xạ f được gọi là *Meir-Keeler* α*-co* nếu với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $x, y \in X$, $\varepsilon \le d(x,y) < \varepsilon + \delta$ ta có $\alpha(x,y) d(fx, fy) < \varepsilon$.

2) Ánh xạ f được gọi là *Meir-Keeler* α*-co tổng quát* nếu với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $x, y \in X, \varepsilon \le M_f(x,y) < \varepsilon + \delta$ ta có $\alpha(x,y) d(fx, fy) < \varepsilon$, với

$$M_f(x,y) = \max\{d(x,y), d(x,fx), d(y,fy), \frac{d(x,fy)+d(y,fx)}{2}\}.$$

3) Cặp ánh xạ (f,g) được gọi là *Meir-Keeler* α*-co tổng quát* nếu với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $x, y \in X, \varepsilon \le M_{(f,g)}(x,y) < \varepsilon + \delta$ ta có $\alpha(x,y) d(fx, gy) < \varepsilon$, với

$$M_{(f,g)}(x,y) = \max\{d(x,y), d(x,fx), d(y,gy), \frac{d(x,gy)+d(y,fx)}{2}\}.$$

Định nghĩa 1.9 ([1], Definition 13-14). Cho (X,d) là một không gian mêtric, ánh xạ $f: X \to X$ và $g \in C_f$ với $C_f = \{g: X \to X$ sao cho $fg = gf$ và $gX \subseteq fX\}$. Khi đó

1) Ánh xạ g được gọi là *Meir-Keeler* α-f*-co* nếu với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $x, y \in X$, mà $\varepsilon \le d(fx, fy) < \varepsilon + \delta$ thì $\alpha(x,y) d(gx, gy) < \varepsilon$.

2) Ánh xạ g được gọi là *Meir-Keeler* α - f *-co tổng quát* nếu với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $x, y \in X$, mà $\varepsilon \le M_g(f)(x,y) < \varepsilon + \delta$ thì $\alpha(x,y)d(gx,gy) < \varepsilon$, với

$$M_g(f)(x,y) = \max\{d(fx,fy), d(fx,gx), d(fy,gy), \frac{d(fx,gy)+d(fy,gx)}{2}\}.$$

Trong bài báo này, chúng tôi giới thiệu khái niệm ánh xạ Meir-Keeler α-co, Meir-Keeler α-co tổng quát, cặp ánh xạ Meir-Keeler α-co tổng quát, ánh xạ Meir-Keeler α - f -co và ánh xạ Meir-Keeler α - f -co tổng quát trên không gian kiểu-mêtric. Đồng thời, chúng tôi thiết lập và chứng minh định lí điểm bất động cho các loại ánh xạ này trên không gian kiểu-mêtric. Hơn nữa, chúng tôi cũng xây dựng ví dụ minh họa cho kết quả đạt được.

Trước hết, chúng tôi giới thiệu một số khái niệm và kết quả chính được sử dụng trong bài báo.

Định nghĩa 1.10. Cho (X,D,K) là một không gian kiểu-mêtric, $x_0 \in X$ và $f,g: X \to X$. Đặt $x_{2n+1} = fx_{2n}$ và $x_{2n+2} = gx_{2n+1}$ với $n \in \mathbb{N}$. Khi đó

1) Dãy $\{x_n\}$ được gọi là (f,g)*-quỹ đạo của* x_0.

2) Không gian kiểu-mêtric (X,D,K) được gọi là (f,g)*-quỹ đạo đầy đủ* nếu mỗi dãy Cauchy trong (f,g)-quỹ đạo của x_0 đều hội tụ.

3) Ánh xạ f được gọi là *liên tục theo* (f,g) *-quỹ đạo của* x_0 nếu mọi dãy $\{x_n\}$ trong (f,g) -quỹ đạo của x_0, $\{x_n\}$ hội tụ đến *a* thì fx_n hội tụ đến *fa*.

Trong Định nghĩa 1.10, bằng cách chọn ánh xạ *g* trùng với ánh xạ *f*, ta có định nghĩa sau.

Định nghĩa 1.11. Cho (X,D,K) là một không gian kiểu-mêtric, $x_0 \in X$ và $f,g: X \to X$. Đặt $x_{n+1} = fx_n$ với $n \in \mathbb{N}$. Khi đó

1) Dãy $\{x_n\}$ được gọi là f -quỹ đạo của x_0.

2) Không gian kiểu-mêtric (X,D,K) được gọi là f *-quỹ đạo đầy đủ* nếu mỗi dãy Cauchy trong f -quỹ đạo của x_0 đều hội tụ.

3) Ánh xạ f được gọi là *liên tục theo* f *-quỹ đạo của* x_0 nếu mọi dãy $\{x_n\}$ trong f -quỹ đạo của x_0, $\{x_n\}$ hội tụ đến *a* thì fx_n hội tụ đến *fa*.

Bổ đề 1.12 ([1], Lemma 7). *Cho* X *là một tập hợp khác rỗng, hai ánh xạ* $f,g: X \to X$, $x_0 \in X$ *ánh xạ* $\alpha: X \times X \to [0,\infty)$ *và* $\{x_n\}$ *là* (f,g)*-quỹ đạo của* x_0, *với* $\alpha(x_0, fx_0) \ge 1$. *Nếu* (f,g) *là* α *-admissible thì* $\alpha(x_n, x_{n+1}) \ge 1$ *với mọi* $n \in \mathbb{N}$.

2. Các kết quả chính

Trước hết, chúng tôi giới thiệu khái niệm ánh xạ Meir-Keeler α-co, Meir-Keeler α-co tổng quát, cặp ánh xạ Meir-Keeler α-co tổng quát trên không gian kiểu-mêtric và thiết lập định lí điểm bất động cho lớp ánh xạ này.

Định nghĩa 2.1. Cho (X,D,K) là một không gian kiểu-mêtric, hai ánh xạ $f,g: X \to X$ và ánh xạ $\alpha: X \times X \to [0,\infty)$. Khi đó

1) Ánh xạ f được gọi là *Meir-Keeler* α *-co* nếu với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $x, y \in X, \varepsilon \le D(x,y) < K\varepsilon + \delta$ ta có $K\alpha(x,y)D(fx,fy) < \varepsilon$.

2) Ánh xạ f được gọi là *Meir-Keeler* α *-co tổng quát* nếu với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $x, y \in X, \varepsilon \le M_f(x,y) < K\varepsilon + \delta$ ta có $K\alpha(x,y)D(fx,fy) < \varepsilon$, với

$$M_f(x,y) = \max\{D(x,y), D(x,fx), D(y,fy), \frac{D(x,fy)+D(y,fx)}{2K}\}.$$

3) Cặp ánh xạ (f,g) được gọi là *Meir-Keeler α-co tổng quát* nếu với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $x, y \in X, \varepsilon \le M_{(f,g)}(x,y) < K\varepsilon + \delta$ ta có $K\alpha(x,y)D(fx,gy) < \varepsilon$, với

$$M_{(f,g)}(x,y) = \max\{D(x,y), D(x,fx), D(y,gy), \frac{D(x,gy)+D(y,fx)}{2K}\}. \quad (1)$$

Định lí 2.2. *Cho (X,D,K) là một không gian kiểu-mêtric (f,g)-quỹ đạo đầy đủ với ánh xạ $f,g: X \to X$ và ánh xạ $\alpha: X\times X \to [0,\infty)$. Giả sử*

1) Cặp (f,g) là α-admissible và tồn tại $x_0 \in X$ sao cho $\alpha(x_0, fx_0) \ge 1$.

2) Cặp (f,g) là Meir-Keeler α-co tổng quát.

3) Trên (f,g)-quỹ đạo của x_0, ta có $\alpha(x_n, x_j) \ge 1$ với mọi n chẵn và j lẻ lớn hơn n.

4) Ánh xạ f và g liên tục theo (f,g)-quỹ đạo của x_0.

Khi đó

1) Ánh xạ f hoặc g có điểm bất động trên (f,g)-quỹ đạo của x_0.

Hoặc

2) Ánh xạ f và g có điểm bất động chung p và $\lim_{n\to\infty} x_n = p$.

Chứng minh. Lấy $x_0 \in X$ sao cho $\alpha(x_0, fx_0) \ge 1$. Xét dãy $\{x_n\}$ là (f,g)-quỹ đạo của x_0. Đặt $D_n = D(x_n, x_{n+1})$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Ta xét ba trường hợp sau.

Trường hợp 1. Tồn tại số chẵn $n \in \mathbb{N}$ để $D_n = 0$. Khi đó, ta có $D_n = D(x_n, x_{n+1}) = 0$ hay $x_n = x_{n+1} = fx_n$. Do đó f có điểm bất động.

Trường hợp 2. Tồn tại số lẻ $n \in \mathbb{N}$ để $D_n = 0$. Khi đó, ta có $D_n = D(x_n, x_{n+1}) = 0$ hay $x_n = x_{n+1} = fx_n$. Do đó g có điểm bất động.

Trường hợp 3. $D_n \ne 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Từ giả thiết cặp (f,g) là Meir-Keeler α-co tổng quát, ta có

$$K\alpha(x,y)D(fx,gy) < M_{(f,g)}(x,y) \text{ với } x \ne y. \quad (2)$$

Do $\alpha(x_0, fx_0) \ge 1$ và cặp (f,g) là α-admissible nên theo Bổ đề 1.12 ta có $\alpha(x_n, x_{n+1}) \ge 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Từ (2) ta có

$$\begin{aligned} D_{2n} = D(x_{2n}, x_{2n+1}) &= D(gx_{2n-1}, fx_{2n}) \le K\alpha(x_{2n-1}, x_{2n})D(gx_{2n-1}, fx_{2n}) \\ &< \max\{D(x_{2n-1}, x_{2n}), D(x_{2n}, x_{2n+1}), \frac{D(x_{2n-1}, x_{2n+1})}{2K}\} \\ &\le \max\{D(x_{2n-1}, x_{2n}), D(x_{2n}, x_{2n+1}), \frac{D(x_{2n-1}, x_{2n}) + D(x_{2n}, x_{2n+1})}{2}\} \\ &= \max\{D(x_{2n-1}, x_{2n}), D(x_{2n}, x_{2n+1})\} \\ &= \max\{D_{2n-1}, D_{2n}\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Nếu tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho $\max\{D_{2n-1}, D_{2n}\} = D_{2n}$ thì từ (3) suy ra $D_{2n} < D_{2n}$. Điều này là mâu thuẫn. Do đó với mọi $n \in \mathbb{N}$ ta có $\max\{D_{2n-1}, D_{2n}\} = D_{2n-1}$. Khi đó, từ (3) ta suy ra $D_{2n} < D_{2n-1}$.

Tương tự, ta chứng minh được $D_{2n+1} < D_{2n}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Do đó $\{D_n\}$ là dãy đơn điệu giảm và không âm. Khi đó, tồn tại $r \ge 0$ sao cho

$$\lim_{n\to\infty} D_n = r. \quad (4)$$

Giả sử r>0, khi đó với mỗi $\delta > 0$ tồn tại $N = N(\delta)$ chẵn để

$$r \le D_N < Kr + \delta. \quad (5)$$

Mà $D_N = D(x_N, x_{N+1}) = M_{(f,g)}(x_N, x_{N+1})$ nên từ (5) ta có $r \le M_{(f,g)}(x_N, x_{N+1}) < Kr + \delta$. Do cặp (f,g) là Meir-Keeler α -co tổng quát nên suy ra

$$K\alpha(x_N, x_{N+1})D(fx_N, gx_{N+1}) < r. \quad (6)$$

Do đó, theo Bổ đề 1.12 và (6) ta có

$$D_{N+1} = D(x_{N+1}, x_{N+2}) = D(fx_N, gx_{N+1})$$
$$\le K\alpha(x_N, x_{N+1})D(fx_N, gx_{N+1}) < r.$$

Điều này mâu thuẫn. Do đó $r = 0$, kết hợp với (4) ta được $\lim_{n\to\infty} D_n = 0$.

Tiếp theo ta chứng minh $\{x_n\}$ là dãy Cauchy. Giả sử $\{x_n\}$ không là dãy Cauchy. Khi đó, tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho với mỗi $N_1 \ge 0$ tồn tại các số nguyên m, n mà $m > n > N_1$ để $D(x_m, x_n) \ge 2\varepsilon.$ Ta chọn số δ sao cho $0 < \delta < \varepsilon$ để (1) được thỏa mãn. Do $\lim_{n\to\infty} D_n = r = 0$ nên tồn tại $N_2 = N_2(\delta)$ sao cho $D_i < \frac{\delta}{6K}$ với $i \ge N_2$. Ta chọn $N \ge \max\{N_1, N_2\}$. Khi đó, với các số nguyên $m > n > N$, ta có

$$D(x_m, x_n) \ge 2\varepsilon > \frac{\delta}{K} + \varepsilon. \quad (7)$$

Ta có $m - n > 6$. Thật vậy, giả sử $m - n \le 6$ hay $m \le n + 6$ và từ $m > n$ ta đặt $m = n + l$ với $l = 1,...,5.$ Ta có

$$D(x_m, x_n) \le \sum_{l=0}^{5} D_{n+l} < 6K\frac{\delta}{6K} = \delta < \varepsilon + \frac{\delta}{K}.$$

Điều này mâu thuẫn với (7). Do đó $m - n > 6$. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử rằng n là số chẵn sao cho $D(x_m, x_n) > \varepsilon + \frac{\delta}{3K}$. Khi đó tồn tại số lẻ j nhỏ nhất lớn hơn n sao cho

$$D(x_n, x_j) \ge \varepsilon + \frac{\delta}{3K}. \quad (8)$$

Từ đó, ta có $D(x_n, x_{j-2}) < \varepsilon + \frac{\delta}{3K}$. Suy ra

$$D(x_n, x_j) \le K[D(x_n, x_{j-2}) + D(x_{j-2}, x_{j-1}) + D(x_{j-1}, x_j)]$$
$$< K(\varepsilon + \frac{\delta}{3K} + \frac{\delta}{6K} + \frac{\delta}{6K}) = K\varepsilon + \frac{2\delta}{3}.$$

Do đó

$$\varepsilon < D(x_n, x_j)$$
$$\le M_{(f,g)}(x_n, x_j) = \max\{D(x_n, x_j), \frac{D(x_n, x_{j+1}) + D(x_j, x_{n+1})}{2K}\}$$
$$\le D(x_n, x_j) + \frac{D_n + D_j}{2}$$
$$< K\varepsilon + \frac{2\delta}{3K} + \frac{\delta}{6K} = K\varepsilon + \frac{5\delta}{6} < K\varepsilon + \delta. \quad (9)$$

Do cặp (f,g) là Meir-Keeler α -co tổng quát nên từ (9) ta có $K\alpha(x_n, x_j)D(fx_n, gx_j) < \varepsilon$. Sử dụng Bổ đề 1.10, ta có

$$D(x_{n+1}, x_{j+1}) \le K\alpha(x_n, x_j)D(x_{n+1}, x_{j+1}) = K\alpha(x_n, x_j)D(fx_n, gx_j) < \varepsilon.$$

Suy ra $D(x_{n+1},x_{j+1})<\dfrac{\varepsilon}{K\alpha(x_n,x_j)}\le\dfrac{\varepsilon}{K}$. Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned}D(x_n,x_j)&\le K[D(x_n,x_{n+1})+D(x_{n+1},x_{j+1})+D(x_{j+1},x_j)]\\&=K(D_n+D(x_{n+1},x_{j+1})+D_j)\\&<K(\frac{\delta}{6K}+\frac{\varepsilon}{K}+\frac{\delta}{6K})=\varepsilon+\frac{\delta}{3K}.\end{aligned}$$

Điều này mâu thuẩn với (8). Vậy $\{x_n\}$ là dãy Cauchy. Vì X là (f,g)-quỹ đạo đầy đủ nên $\{x_n\}$ hội tụ về p. Mặt khác, f và g liên tục theo (f,g)-quỹ đạo nên ta có

$$p=\lim_{n\to\infty}x_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}fx_{2n}=f\lim_{n\to\infty}x_{2n}=fp,$$

$$p=\lim_{n\to\infty}x_{2n+2}=\lim_{n\to\infty}gx_{2n+1}=g\lim_{n\to\infty}x_{2n+1}=gp.$$

Suy ra p là điểm bất động chung của f và g.

Trong Định lí 2.2, bằng cách chọn $f=g$ và đồng nhất cặp ánh xạ (f,f) bởi ánh xạ f ta được hệ quả sau.

Hệ quả 2.3. *Cho (X,D,K) là một không gian kiểu-mêtric, f-quỹ đạo đầy đủ với ánh xạ $f:X\to X$ và ánh xạ $\alpha:X\times X\to[0,\infty)$. Giả sử*

1) Ánh xạ f là α-admissible và tồn tại $x_0\in X$ sao cho $\alpha(x_0,fx_0)\ge1$.

2) Ánh xạ f là Meir-Keeler α-co tổng quát.

3) Trên f-quỹ đạo của x_0, ta có $\alpha(x_n,x_j)\ge1$ với mọi n chẵn và j lẻ lớn hơn n.

4) Ánh xạ f liên tục theo f-quỹ đạo của x_0.

Khi đó, ánh xạ f có điểm bất động trên f-quỹ đạo của x_0.

Trong phần tiếp theo, chúng tôi giới thiệu khái niệm ánh xạ Meir-Keeler α-f-co, Meir-Keeler α-f-co tổng quát và thiết lập định lí điểm bất động cho lớp ánh xạ này.

Định nghĩa 2.4. Cho (X,D,K) là một không gian kiểu-mêtric, $f:X\to X$ là ánh xạ liên tục trên không gian kiểu-mêtric và ánh xạ $g\in C_f$. Dãy $\{fx_n\}$ xác định bởi $fx_{n+1}=gx_n$ với mọi $n\in\mathbb{N}$ được gọi là *f-lặp* của x_0 theo ánh xạ g.

Định nghĩa 2.5. Cho (X,D,K) là một không gian kiểu-mêtric, ánh xạ $f:X\to X$ và $g\in C_f$. Khi đó

1) Ánh xạ g được gọi là ánh xạ *Meir-Keeler α-f-co* nếu với mỗi $\varepsilon>0$ tồn tại $\delta>0$ sao cho với mọi $x,y\in X$ mà $\varepsilon\le D(fx,fy)<K\varepsilon+\delta$ thì $K\alpha(x,y)D(gx,gy)<\varepsilon$.

2) Ánh xạ g được gọi là ánh xạ *Meir-Keeler α-f-co tổng quát* nếu với mỗi $\varepsilon>0$ tồn tại $\delta>0$ sao cho với mọi $x,y\in X$ mà

$$\varepsilon\le M_g(f)(x,y)<K\varepsilon+\delta \text{ thì } K\alpha(x,y)D(gx,gy)<\varepsilon, \qquad (10)$$

với $M_g(f)(x,y)=\max\{D(fx,fy),D(fx,gx),D(fy,gy),\dfrac{D(fx,gy)+D(fy,gx)}{2K}\}$.

Bổ đề 2.6. *Cho* (X,D,K) *là một không gian kiểu-mêtric, hai ánh xạ* $f,g:X\to X$ *với* $g\in C_f$ *và* $\{x_n\}$ *là* (f,g)*-quỹ đạo của* x_0*. Nếu* g *là một ánh xạ Meir-Keeler* α *-* f *-co tổng quát sao cho* $\alpha(x_n,x_{n+1})\ge 1$ *với mọi* $n\in\mathbb{N}$ *thì* $\inf\{D(fx_n,fx_{n+1}),\ n\in\mathbb{N}\}=0.$

Chứng minh. Đặt $r=\inf\{D(fx_n,fx_{n+1}),\ n\in\mathbb{N}\}.$ Từ định nghĩa của f -lặp của x_0 theo ánh xạ g và g là một ánh xạ Meir-Keeler α - f -co tổng quát nên với mỗi $n\in\mathbb{N}$ ta có

$$\begin{aligned}
&D(fx_{n+1},fx_{n+2})\\
&=D(gx_n,gx_{n+1})\\
&\le K\alpha(x_n,x_{n+1})D(gx_n,gx_{n+1})\\
&<M_g(f)(x_n,x_{n+1})\\
&=\max\{D(fx_n,fx_{n+1}),D(fx_n,gx_n),D(fx_{n+1},gx_{n+1}),\\
&\qquad \frac{D(fx_n,gx_{n+1})+D(fx_{n+1},gx_n)}{2K}\}\\
&=\max\{D(fx_n,fx_{n+1}),D(fx_{n+1},fx_{n+2}),\frac{D(fx_n,fx_{n+2})}{2K}\}\\
&=\max\{D(fx_n,fx_{n+1}),D(fx_{n+1},fx_{n+2})\}. \qquad (11)
\end{aligned}$$

Nếu tồn tại $n\in\mathbb{N}$ sao cho $\max\{D(fx_n,fx_{n+1}),D(fx_{n+1},fx_{n+2})\}=D(fx_{n+1},fx_{n+2}).$ Khi đó, (11) trở thành

$D(fx_{n+1},fx_{n+2})<D(fx_{n+1},fx_{n+2})$. Điều này là mâu thuẫn. Do đó với mọi $n\in\mathbb{N}$, ta có

$$\max\{D(fx_n,fx_{n+1}),D(fx_{n+1},fx_{n+2})\}=D(fx_n,fx_{n+1}).$$

Khi đó, (11) trở thành

$D(fx_{n+1},fx_{n+2})<D(fx_n,fx_{n+1})$ với mọi $n\in\mathbb{N}$

Suy ra $\{D(fx_n,fx_{n+1})\}$ là dãy đơn điệu giảm và không âm. Do đó $r=\lim_{n\to\infty}D(fx_n,fx_{n+1})\ge 0$. Giả sử $r>0$. Do g là ánh xạ Meir-Keeler α - f -co tổng quát nên với $\varepsilon=r>0$, tìm $\delta>0$ sao cho (10) được thỏa mãn. Do $\lim_{n\to\infty}D(fx_n,fx_{n+1})=r$ nên tồn tại N để $r\le D(fx_N,fx_{N+1})<Kr+\delta$. Mặt khác, ta chứng minh được $M_g(f)(x_N,x_{N+1})=D(fx_N,fx_{N+1})$. Do đó, $r\le M_g(f)(x_N,x_{N+1})<Kr+\delta.$

Khi đó, do g là ánh xạ Meir-Keeler α - f -co tổng quát nên ta có

$$D(gx_N,gx_{N+1})\le K\alpha(x_N,x_{N+1})D(gx_N,gx_{N+1})<r.$$

Do đó $D(fx_{N+1},fx_{N+2})=D(gx_N,gx_{N+1})<r.$ Điều này mâu thuẫn với định nghĩa của r. Vậy $\inf\{D(fx_n,fx_{n+1}),\ n\in\mathbb{N}\}=r=0.$

Định lí 2.7. *Cho* (X,D,K) *là một không gian kiểu-mêtric, trong đó* D *là ánh xạ liên tục và hai ánh xạ* $f,g:X\to X$ *liên tục trên không gian kiểu-mêtric với* $g\in C_f$*. Giả sử*

1) $\alpha(x_n,x_m)\ge 1$ *với mọi* $m>n$.

2) Ánh xạ g *là ánh xạ Meir-Keeler* α *-* f *-co tổng quát.*

3) Nếu $\{x_n\}$ *là một dãy trong* X *sao cho* $\alpha(x_n,x_m)\ge 1$ *với mọi* $m>n$ *và* $\lim_{n\to\infty}x_n=z$ *thì* $\alpha(fx_n,z)\ge 1$ *và* $\alpha(fx_n,fz)\ge 1.$

Khi đó, f *và* g *có điểm bất động chung.*

Chứng minh. Lấy $x_0\in X$, ta xét dãy $\{x_n\}$ f -lặp của x_0 theo ánh xạ g thỏa mãn tất cả giả thiết của định lí. Ta chứng minh định lí theo ba bước sau.

Bước 1. Từ Bổ đề 2.6, ta có: $\inf\{D(fx_n, fx_{n+1}),\ n \in \mathbb{N}\} = 0.$

Bước 2. Chứng minh tồn tại điểm trùng của f và g. Ta xét hai trường hợp sau.

Trường hợp 1. Tồn tại số N sao cho $D(fx_N, fx_{N+1}) = 0$. Khi đó $fx_N = fx_{N+1} = gx_N$ hay x_N là điểm trùng của f và g.

Trường hợp 2. $D(fx_n, fx_{n+1}) \neq 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Ta chứng minh rằng $\{fx_n\}$ là dãy Cauchy. Giả sử $\{fx_n\}$ không là dãy Cauchy. Khi đó tồn tại $\varepsilon > 0$ và một dãy con $\{fx_{n_i}\}$ của $\{fx_n\}$ sao cho

$$D(fx_{n_i}, fx_{n_{i+1}}) \geq 2K\varepsilon. \qquad (12)$$

Chọn $\delta > 0$ sao cho $0 < \delta < \varepsilon$ để (10) thỏa mãn. Theo Bước 1, ta có $\lim\limits_{n\to\infty} D(fx_n, fx_{n+1}) = 0$. Suy ra tồn tại N sao cho $D(fx_m, fx_{m+1}) < \dfrac{\delta}{2(K+2)K}$ với mọi $m > N$. Lấy $n_i > N$, ta chứng minh tồn tại một số nguyên j sao cho $n_i < j < n_{i+1}$ và

$$\varepsilon + \frac{\delta}{K+2} \leq D(fx_{n_i}, fx_j) < K\varepsilon + \frac{(K+1)\delta}{K+2}. \qquad (13)$$

Trước tiên, ta chứng minh tồn tại giá trị j để

$$\varepsilon + \frac{\delta}{K+2} \leq D(fx_{n_i}, fx_j). \qquad (14)$$

Thật vậy, ta chọn $j = n_{i+1}$, ta có $D(fx_{n_i}, fx_{n_{i+1}}) > 2K\varepsilon \geq \varepsilon + \dfrac{\delta}{K+2}$. Ta chứng minh bất đẳng thức (14) cũng đúng với $j = n_{i+1} - 1$.

Thật vậy, giả sử $D(fx_{n_i}, fx_{n_{i+1}-1}) < \varepsilon + \dfrac{\delta}{K+2}$. Khi đó

$$D(fx_{n_i}, fx_{n_{i+1}}) \leq K[D(fx_{n_i}, fx_{n_{i+1}-1}) + D(fx_{n_{i+1}-1}, fx_{n_{i+1}})]$$

$$< K(\varepsilon + \frac{\delta}{K+2} + \frac{\delta}{2(K+2)K}) < 2K\varepsilon.$$

Điều này mâu thuẫn với (12). Vậy tồn tại giá trị j sao cho $\varepsilon + \dfrac{\delta}{K+2} \leq D(fx_{n_i}, fx_j)$.

Tương tự, ta chứng minh được (13) vẫn đúng khi $j = n_{i+1}$ hoặc $j = n_{i+2}$. Do đó, ta chọn số nguyên j nhỏ nhất mà lớn hơn n_i sao cho

$$\varepsilon + \frac{\delta}{K+2} \leq D(fx_{n_i}, fx_j).$$

Khi đó $D(fx_{n_i}, fx_{j-1}) < \varepsilon + \dfrac{\delta}{K+2}$. Do đó

$$D(fx_{n_i}, fx_j) \leq K[D(fx_{n_i}, fx_{j-1}) + (D(fx_{j-1}, fx_j)]$$

$$< K(\varepsilon + \frac{\delta}{K+2} + \frac{\delta}{2(K+2)K})$$

$$\leq K\varepsilon + \frac{(K+1)\delta}{K+2}.$$

Vậy tồn tại số j thỏa mãn (13). Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned}
\varepsilon + \frac{\delta}{3} &\leq D(fx_{n_i}, fx_j)\\
&\leq K\alpha(x_{n_i}, x_j) D(fx_{n_i}, fx_j)\\
&\leq M_g(f)(x_{n_i}, x_j)\\
&\leq \max\{D(fx_{n_i}, fx_j), D(fx_{n_i}, gx_i), D(fx_j, gx_j),\\
&\qquad \frac{D(fx_{n_i}, gx_j) + D(fx_j, gx_{n_i})}{2K}\}
\end{aligned}$$

$$\leq \max\{D(fx_{n_i}, fx_j), D(fx_{n_i}, fx_{n_i+1}), D(fx_j, fx_{j+1}),$$

$$D(fx_{n_i}, fx_j) + \frac{D(fx_j, fx_{j+1}) + D(fx_{n_i}, fx_{n_i+1})}{2}\}$$

$$= D(fx_{n_i}, fx_j) + \frac{D(fx_j, fx_{j+1}) + D(fx_{n_i}, fx_{n_i+1})}{2}$$

$$< K\varepsilon + \frac{(K+1)\delta}{K+2} + \frac{\delta}{2(K+2)K} < K\varepsilon + \delta.$$

Do g là ánh xạ Meir-Keeler α - f -co tổng quát nên ta suy ra

$$D(fx_{n_i+1}, fx_{j+1}) = D(gx_{n_i}, gx_j) \leq K\alpha(x_{n_i}, x_j)D(gx_{n_i}, gx_j) < \varepsilon.$$

Điều này tương đương với $K\alpha(x_{n_i}, x_j)D(fx_{n_i+1}, fx_{j+1}) < \varepsilon$ hay $D(fx_{n_i+1}, fx_{j+1}) < \frac{\varepsilon}{K}$. Khi đó

$$D(fx_{n_i}, fx_j) \leq K[D(fx_{n_i}, fx_{n_i+1}) + D(fx_{n_i+1}, fx_{j+1}) + D(fx_{j+1}, fx_j)]$$

$$< K(\frac{\delta}{2(K+2)K} + \frac{\varepsilon}{K} + \frac{\delta}{2(K+2)K}) = \varepsilon + \frac{\delta}{K+2}.$$

Điều này mâu thuẫn với (13). Do đó $\{fx_n\}$ là dãy Cauchy. Do X đầy đủ nên tồn tại $z \in X$ sao cho $\lim_{n\to\infty} fx_n = z$. Vì f, g là các hàm liên tục và $fx_{n+1} = gx_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ nên ta có $ffx_{n+1} = fgx_n = gfx_n$. Khi đó

$$fz = f(\lim_{n\to\infty} fx_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} ffx_{n+1} = \lim_{n\to\infty} gfx_{n+1} = g(\lim_{n\to\infty} fx_{n+1}) = gz.$$

Vậy z là điểm trùng của f và g .

Bước 3. Chứng minh f và g có điểm bất động chung. Đặt $\eta = fz = gz.$ Ta chứng minh η là điểm bất động chung của f và g. Từ điều kiện (3), ta có

$$D(\eta, f\eta) = D(gz, fgz) = D(gz, gfz)$$

$$\leq K[D(gz, gfx_n) + D(gfx_n, gfz)]$$

$$\leq K\alpha(fx_n, z)D(gfx_n, gz) + K\alpha(fx_n, fz)D(gfx_n, gfz)$$

$$< M_g(f)(fx_n, z) + M_g(f)(fx_n, fz)$$

$$= \max\{D(ffx_n, fz), D(fz, gz), D(ffx_n, gfx_n), \frac{D(ffx_n, gz) + D(fz, gfx_n)}{2K}\}$$

$$+ \max\{D(ffx_n, ffz), D(ffz, gfz), D(ffx_n, gfx_n), \frac{D(ffx_n, gfz) + D(ffz, gfx_n)}{2K}\}. \quad (15)$$

Trong (15), cho $n \to \infty$ và sử dụng tính liên tục của D ta được $D(\eta, f\eta) = 0$ hay $f\eta = \eta$. Vậy $f\eta = g\eta = \eta$ hay η là điểm bất động chung của f và g.

Nhận xét 2.8. Do mỗi không gian kiểu-mêtric $(X, d, 1)$ là không gian mêtric nên [1,Theorem 8], [1, Corollary 9] và [1, Theorem 16] lần lượt là trường hợp đặc biệt của Định lí 2.2, Hệ quả 2.3 và Định lí 2.7 khi $K = 1$.

Cuối cùng, chúng tôi xây dựng ví dụ minh họa cho kết quả đạt được.

Ví dụ 2.9. Trên $X = \{0,1,2\}$, xét kiểu-mêtric D với $K = 2$ xác định bởi

$D(0,0) = D(1,1) = D(2,2) = 0$,

$D(1,2) = D(2,1) = 4,$

$D(0,1) = D(1,0) = D(0,2) = D(2,0) = 1.$

Xét hàm $\alpha : X \times X \to [0,\infty)$ xác định bởi

$$\alpha(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ nếu } (x,y) = (1,1) \\ 0 \text{ nếu } (x,y) \neq (1,1). \end{cases}$$

Xét hai ánh xạ $f, g : X \to X$ xác định bởi

$f0 = 0, f1 = 1, f2 = 2$ và $g0 = 2, g1 = 1, g2 = 0.$

Khi đó $\alpha(1, f1) = \alpha(1,1) = 1 \geq 1$ và cặp (f, g) là α-admissible. Thật vậy, với $x, y \in X$ mà $\alpha(x,y) \geq 1$, suy ra $x = y = 1$. Khi đó $\alpha(f1, g1) = \alpha(g1, f1) = \alpha(1,1) = 1.$

Hơn nữa, cặp (f, g) là Meir-Keeler α-co tổng quát. Thật vậy, với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho $\varepsilon \leq M_{(f,g)}(x,y) < K\varepsilon + \delta$, suy ra $(x,y) \neq (1,1)$. Khi đó $\alpha(x,y) = 0$, suy ra $K\alpha(x,y)D(fx, gy) = 2\alpha(x,y)D(fx, gy) = 0 < \varepsilon.$ Đồng thời, các giả thiết còn lại của Định lí 2.2 đều thỏa mãn. Do đó f và g có điểm bất động chung. Hơn nữa, 1 là điểm bất động chung của f và g.

Tài liệu tham khảo

[1]. T. Abdeljawad (2013), ''Meir-Keeler α-contractive fixed and common fixed point theorems'', Fixed Point Theory Appl., 2013:19, 11 pages.

[2]. N. V. Dung, N. T. T. Ly, V. D. Thinh and N. T. Hieu (2013), "Suzuki-type fixed point theorems for two maps in metric-type spaces", J. Nonlinear Anal. Optim., 4(2), pp. 17-29.

[3]. N. T. Hieu and V. T. L. Hang (2013), "Coupled fixed point theorems for generalized - -contactive mappings in partially ordered metric-type spaces", J. Nonlinear Anal. Optim., submitted.

[4]. M. Jovanovic, Z. Kadelburg and S. Radenovic (2010), "Common fixed point results in metric-type space", Fixed Point Theory Appl., (2010), 15 pages.

[5]. M. A. Khamsi (2010), "Remarks on cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings", Fixed Point Theory Appl., (2010), 7 pages.

[6]. B. Samet, C. Vetro and P. Vetro (2012), “Fixed point theorems for α-ψ-contractive type mappings”, Nonlinear Anal., (75), pp. 2154-2165.

Summary

In this paper, we introduce the notions of Meir-Keeler α-contractive mappings, generalized Meir-Keeler α-contractive mappings, generalized Meir-Keeler α-contractive mappings pair, Meir-Keeler α-f-contractive mappings and generalized Meir-Keeler α-contractive mappings in metric-type spaces. Also, we establish and prove a number of fixed point theorems for these mappings. These results are modifications of the fixed point theorems in [1]. Moreover, we provide examples to illustrate the obtained results.

Key words: fixed point, Meir-Keeler α-contractive, metric-type.

Ngày nhận bài; 28/10/2013. Ngày nhận đăng 25/4/2014.