VỀ ĐỊNH LÍ ĐIỂM BẤT ĐỘNG CHUNG CHO ÁNH XẠ TRONG KHÔNG GIAN KIỂU-MÊTRIC

• ThS. Nguyễn Trung Hiếu (*), SV. Hoàng Hiền Hưởng (*)

Tóm tắt

Trong bài báo này, chúng tôi giới thiệu khái niệm ánh xạ (μ,ψ) - f *-co yếu tổng quát trên không gian kiểu-mêtric sắp thứ tự. Đồng thời, chúng tôi thiết lập một định lí điểm bất động chung cho lớp ánh xạ này trên không gian kiểu-mêtric sắp thứ tự và suy ra một số hệ quả từ định lí này. Hơn nữa, chúng tôi cũng xây dựng ví dụ minh họa cho kết quả đạt được.*

Từ khóa: điểm bất động, kiểu-mêtric, ánh xạ (μ,ψ) - f *-co yếu tổng quát.*

1. Giới thiệu

Các định lí điểm bất động là công cụ hữu ích trong việc khảo sát sự tồn tại nghiệm của các bài toán liên quan đến phương trình vi phân, phương trình tích phân và phương trình đạo hàm riêng. Trong các định lí điểm bất động, nguyên lí ánh xạ co Banach trong không gian mêtric đầy đủ được xem là định lí cơ bản nhất. Cùng với sự phát triển của toán học, nguyên lí ánh xạ co Banach được mở rộng cho các lớp ánh xạ khác nhau cũng như cho các không gian khác nhau. Trong hướng nghiên cứu mở rộng nguyên lí ánh xạ co Banach cho các không gian khác nhau, một số tác giả đã xây dựng những không gian mêtric suy rộng như *2*-mêtric [2], *D*-mêtric [4], *G*-mêtric [11], *S*-mêtric [12]… và thiết lập định lí điểm bất động trên các không gian mêtric suy rộng đó.

Gần đây, trong [8], Khamsi đã giới thiệu một khái niệm mêtric suy rộng mới như sau.

Định nghĩa 1.1 ([8], Definition 2.7). Cho X là tập khác rỗng, $K \geq 1$ là một số thực và $D : X \times X \to [0,+\infty)$ là một ánh xạ thoả mãn các điều kiện sau.

(1) $D(x,y) = 0$ khi và chỉ khi $x = y$;

(2) $D(x,y) = D(y,x)$ với mọi $x,y \in X$;

(3) $D(x,z) \leq K(D(x,y_1) + D(y_1,y_2) + \ldots + D(y_n,z))$ với mọi $x,y_1,y_2,\ldots,y_n,z \in X$, mọi $n \in \mathbb{N}$.

Khi đó, D được gọi là *kiểu-mêtric* trên X và (X,D,K) được gọi là *không gian kiểu-mêtric*.

Rõ ràng, mỗi không gian mêtric (X,d) là một không gian kiểu-mêtric $(X,d,1)$.

Trong [3], [6], [7], các tác giả đã xét một không gian kiểu-mêtric khác, trong đó điều kiện (3) của Định nghĩa 1.1 được thay bởi điều kiện sau

(3’) $D(x,z) \leq K(D(x,y) + D(y,z))$ với mọi $x,y,z \in X$.

Trong bài báo này, chúng tôi xét không gian kiểu-mêtric theo Định nghĩa 1.1. Một số khái niệm liên quan đến không gian kiểu-mêtric này được trình bày như sau.

(*) Khoa Sư phạm Toán – Tin, Trường Đại học Đồng Tháp.

Định nghĩa 1.2 ([8], Definition 2.8)**.** Cho (X,D,K) là không gian kiểu-mêtric và $\{x_n\}$ là một dãy trong X. Khi đó

(1) Dãy $\{x_n\}$ được gọi là *hội tụ đến* $x \in X$, viết là $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, hoặc $\{x_n\} \to x$ nếu $\lim_{n\to\infty} D(x_n, x) = 0$. Khi đó, x được gọi là *điểm giới hạn* của dãy $\{x_n\}$.

(2) Dãy $\{x_n\}$ được gọi là *dãy Cauchy* nếu $\lim_{n,m\to\infty} D(x_n, x_m) = 0$.

(3) Không gian (X,D,K) được gọi là *đầy đủ* nếu mọi dãy Cauchy trong (X,D,K) là dãy hội tụ.

Nhận xét 1.3. Trong không gian kiểu-mêtric (X,D,K), tôpô được hiểu là tôpô cảm sinh bởi sự hội tụ của nó. Điều này có nghĩa là tập G mở trong không gian kiểu-mêtric (X,D,K) khi và chỉ khi với mỗi $x \in G$, mọi dãy $\{x_n\} \subset X$ mà $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ thì tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $x_n \in G$ với mọi $n \geq n_0$. Khi đó, kiểu-mêtric $D: X \times X \to [0,+\infty)$ liên tục tại (x,y) nếu và chỉ nếu $\lim_{n\to\infty} D(x_n, y_n) = D(x,y)$ với mọi dãy $\{x_n\}, \{y_n\}$ trong X mà $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ và $\lim_{n\to\infty} y_n = y$.

Nhận xét 1.4. Trong [5], các tác giả đã chứng tỏ rằng kiểu-mêtric trong Định nghĩa 1.1 là ánh xạ không liên tục, xem ([5], Example 2.1).

Mệnh đề 1.5. *Cho (X,D,K) là không gian kiểu-mêtric. Nếu dãy $\{x_n\}$ hội tụ thì điểm giới hạn đó duy nhất.*

Chứng minh. Giả sử tồn tại $x, y \in X$ sao cho $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ và $\lim_{n\to\infty} x_n = y$. Ta có

$$D(x,y) \leq K[D(x,x_n) + D(x_n,y)].$$

Suy ra $D(x,y) = 0$ hay $x = y$. Vậy $\{x_n\}$ hội tụ tới một phần tử duy nhất. □

Trong [1], Chandok đã giới thiệu khái niệm ánh xạ (μ,ψ)-f-co yếu tổng quát trên không gian mêtric sắp thứ tự. Lớp ánh xạ này là sự mở rộng của các dạng ánh xạ co trong [1]. Đồng thời, tác giả đã thiết lập định lí điểm bất động cho lớp ánh xạ co này trong không gian mêtric sắp thứ tự ([1], Theorem 2.1). Trong phần tiếp theo, chúng tôi trình bày lại khái niệm ánh xạ (μ,ψ)-f-co yếu tổng quát trên không gian mêtric sắp thứ tự như sau.

Định nghĩa 1.6 ([9])**.** Hàm $\mu: [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ được gọi là *hàm biến thiên khoảng cách* nếu μ thoả mãn hai điều kiện sau

(1) μ liên tục và không giảm;

(2) $\mu(t) = 0$ khi và chỉ khi $t = 0$.

Định nghĩa 1.7 ([10]). Cho X, Y là hai tập con của tập số thực. Hàm $\psi : X \times X \to Y$ được gọi là *nửa liên tục dưới* trên $X \times X$ nếu với mỗi dãy $\{(x_n, y_n)\} \subset X \times X$, $\{(x_n, y_n)\}$ hội tụ đến $(x, y) \in X \times X$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} \inf \psi(x_n, y_n) \geq \psi(x, y)$.

Kí hiệu Ψ là tập các hàm $\psi : [0, +\infty)^2 \to [0, +\infty)$ với ψ là hàm nửa liên tục dưới sao cho $\psi(x, y) = 0$ khi và chỉ khi $x = y = 0$.

Định nghĩa 1.8 ([1]). Cho $(X, \prec)$ là tập sắp thứ tự, hai ánh xạ $T, f : X \to X$, hàm biến thiên khoảng cách μ và hàm $\psi \in \Psi$. Khi đó, ánh xạ T được gọi là (μ, ψ) - f *-co yếu tổng quát* nếu T thoả mãn

$$\mu(d(Tx, Ty)) \leq \mu(\frac{1}{2}(d(fx, Ty) + d(fy, Tx))) - \psi(d(fx, Ty), d(fy, Tx))$$

với mọi $x, y \in X$, $fx \succ fy$.

Trong bài báo này, chúng tôi mở rộng các định lí điểm bất động cho lớp ánh xạ (μ, ψ) - f -co yếu tổng quát trên không gian mêtric sắp thứ tự trong [1] sang không gian kiểu-mêtric sắp thứ tự. Đồng thời, chúng tôi xây dựng ví dụ minh họa cho kết quả thu được.

Trước hết, chúng tôi giới thiệu một số khái niệm cần sử dụng trong các kết quả chính.

Định nghĩa 1.9 ([1]). Cho $(X, \prec)$ là tập sắp thứ tự và hai ánh xạ $T, f : X \to X$. Khi đó

(1) Ánh xạ T được gọi là f *-đơn điệu không giảm* nếu với mọi $x, y \in X$ sao cho $fx \prec fy$ thì $Tx \prec Ty$.

(2) Ánh xạ T được gọi là *đơn điệu không giảm* nếu với mọi $x, y \in X$ sao cho $x \prec y$ thì $Tx \prec Ty$.

Định nghĩa 1.10 ([1]). Cho X là không gian mêtric và hai ánh xạ $T, f : X \to X$. Khi đó

(1) Điểm $x \in X$ được gọi là *điểm trùng* của T và f nếu $Tx = fx$.

(2) Điểm $x \in X$ được gọi là *điểm bất động* của f nếu $fx = x$.

(3) Điểm $x \in X$ được gọi là *điểm bất động chung* của T và f nếu $Tx = fx = x$.

Kí hiệu, $F(T; f)$ là tập các điểm bất động chung của T và f.

(4) T và f được gọi là *giao hoán* nếu $Tfx = fTx$ với mọi $x \in X$.

(5) T và f được gọi là *tương thích yếu* nếu nó giao hoán tại những điểm trùng.

Định nghĩa 1.11 ([1]). Cho $(X, \prec)$ là tập sắp thứ tự và W là tập con của X. Tập W được gọi là *tập sắp thứ tự tốt* nếu với $u, v \in W$ thì $u \prec v$ hoặc $v \prec u$.

Định nghĩa 1.12. Cho X là tập khác rỗng. Khi đó $(X, D, K, \prec)$ được gọi là *không gian kiểu-mêtric sắp thứ tự* nếu (X, D, K) là không gian kiểu-mêtric và $(X, \prec)$ là tập sắp thứ tự.

Hơn nữa, nếu không gian (X, D, K) đầy đủ thì $(X, D, K, \prec)$ được gọi là *không gian kiểu-mêtric sắp thứ tự đầy đủ.*

2. Các kết quả chính

Trước hết, chúng tôi giới thiệu khái niệm ánh xạ (μ, ψ) - f -co yếu tổng quát trên không gian kiểu-mêtric sắp thứ tự.

Định nghĩa 2.1. Cho $(X, D, K, \prec)$ là không gian kiểu-mêtric sắp thứ tự, hai ánh xạ $T, f: X \to X,$ hàm biến thiên khoảng cách μ và hàm $\psi \in \Psi.$ Ánh xạ T được gọi là (μ, ψ) - f *-co yếu tổng quát* nếu

$$\mu(D(Tx,Ty)) \le \mu(\frac{1}{K(K+1)}(D(fx,Ty)+D(fy,Tx))) - \psi(D(fx,Ty),D(fy,Tx)) \quad (2.1)$$

với mọi $x, y \in X,\ fx \succ fy.$

Tiếp theo, chúng tôi thiết lập và chứng minh định lí điểm bất động cho lớp xạ (μ, ψ) - f - co yếu tổng quát trên không gian kiểu-mêtric sắp thứ tự.

Định lí 2.2. *Cho $(X, D, K, \prec)$ là không gian kiểu-mêtric đầy đủ sắp thứ tự, trong đó D là ánh xạ liên tục và hai ánh xạ $T, f: X \to X$ thoả mãn các điều kiện sau*

(1) $TX \subset fX$ và fX là tập đóng;

(2) T là ánh xạ f -đơn điệu không giảm và (μ, ψ) - f -co yếu tổng quát;

(3) f và T là tương thích yếu;

(4) Nếu $\{fx_n\}$ là dãy không giảm và $\{fx_n\} \to fz \in fX$ thì $fx_n \prec fz$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ và $fz \prec f(fz)$;

(5) Tồn tại $x_0 \in X$ sao cho $fx_0 \prec Tx_0$.

Khi đó, f và T có điểm bất động chung. Hơn nữa, $F(T;f)$ là tập sắp thứ tự tốt khi và chỉ khi f và T có duy nhất điểm bất động chung.

Chứng minh. Khi $K = 1$, Định lí 2.2 trở thành ([1], Theorem 2.1). Do đó, trong chứng minh này ta chỉ xét $K > 1$. Chọn $x_0 \in X$ sao cho $fx_0 \prec Tx_0$. Do $TX \subset fX$ nên tồn tại $x_1 \in X$ sao cho $fx_1 = Tx_0$. Do $Tx_1 \in fX$ nên tồn tại $x_2 \in X$ sao cho $fx_2 = Tx_1$. Tiếp tục quá trình này, ta xây dựng được dãy $\{x_n\} \subset X$ sao cho $fx_{n+1} = Tx_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Vì $fx_0 \prec Tx_0 = fx_1$ và T là ánh xạ f -đơn điệu không giảm nên $Tx_0 \prec Tx_1$ hay $fx_1 \prec fx_2$. Vì $fx_1 \prec fx_2$ và T là ánh xạ f -đơn điệu không giảm nên $Tx_1 \prec Tx_2$ hay $fx_2 \prec fx_3$. Tiếp tục quá trình này, ta chứng minh được

$$fx_n \prec fx_{n+1} \text{ và } Tx_n \prec Tx_{n+1} \text{ với } n \in \mathbb{N}. \quad (2.2)$$

Do $fx_n \prec fx_{n+1}$ nên từ (2.1) ta được

$$\mu(D(Tx_{n+1}, Tx_n)) \le \mu(\frac{1}{K(K+1)}(D(fx_{n+1}, Tx_n) + D(fx_n, Tx_{n+1})))$$
$$-\psi(D(fx_{n+1}, Tx_n), D(fx_n, Tx_{n+1}))$$
$$\le \mu(\frac{1}{K(K+1)} D(Tx_{n-1}, Tx_{n+1})).$$

Vì μ đơn điệu không giảm nên

$$D(Tx_{n+1}, Tx_n) \le \frac{1}{K(K+1)} D(Tx_{n-1}, Tx_{n+1}) \le \frac{1}{(K+1)}(D(Tx_n, Tx_{n-1}) + D(Tx_{n+1}, Tx_n)).$$

Điều này tương đương với $D(Tx_{n+1}, Tx_n) \le \frac{1}{K} D(Tx_n, Tx_{n-1})$ với mọi $n \ge 1$. Lặp lại quá trình này ta được

$$D(Tx_{n+1}, Tx_n) \le \frac{1}{K} D(Tx_n, Tx_{n-1}) \le ... \le \frac{1}{K^n} D(Tx_1, Tx_0). \qquad (2.3)$$

Theo tính chất (3) của kiểu-mêtric D, với $m, n \in \mathbb{N}$ mà $n > m$ ta có

$$D(Tx_m, Tx_n) \le K(D(Tx_m, Tx_{m+1}) + D(Tx_{m+1}, Tx_{m+2}) + ... + D(Tx_{n-1}, Tx_n)). \qquad (2.4)$$

Từ (2.4), sử dụng (2.3) và do $K > 1$ nên

$$D(Tx_m, Tx_n) \le K(\frac{1}{K^m} + \frac{1}{K^{m+1}} + ... + \frac{1}{K^{n-1}})D(Tx_1, Tx_0)$$
$$= K\frac{1}{K^m}\frac{1 - \frac{1}{K^{n-m}}}{1 - \frac{1}{K}} D(Tx_1, Tx_0) \le \frac{1}{K-1}\frac{1}{K^{m-2}} D(Tx_1, Tx_0). \qquad (2.5)$$

Cho $m, n \to \infty$ trong (2.5) ta được $\lim_{m,n\to\infty} D(Tx_m, Tx_n) = 0$. Do đó $\{Tx_n\}$ là dãy Cauchy. Vì $fx_{n+1} = Tx_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ nên $\{fx_n\}$ cũng là dãy Cauchy trong fX. Do X đầy đủ và fX là tập đóng nên fX đầy đủ. Do đó $\{fx_n\}$ hội tụ trong fX, tức là tồn tại $z \in X$ sao cho

$$\lim_{n\to\infty} fx_{n+1} = \lim_{n\to\infty} Tx_n = fz. \qquad (2.6)$$

Từ (2.2), (2.6) và theo giả thiết (4) suy ra $fx_n \prec fz$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ và $fz \prec f(fz)$.

Do T là (μ,ψ) - f -co yếu tổng quát nên

$$\mu(D(Tz,fx_{n+1}))=\mu(D(Tz,Tx_n))$$
$$\le \mu\Big(\frac{1}{K(K+1)}(D(fz,Tx_n)+D(fx_n,Tz))\Big)-\psi(D(fz,Tx_n),D(fx_n,Tz)). \quad (2.7)$$

Cho $n\to\infty$ trong (2.7) ta được $\mu(D(Tz,fz))\le \mu\big(\frac{1}{K(K+1)}D(fz,Tz)\big)$. Vì μ là hàm không giảm nên $D(Tz,fz)\le \frac{1}{K(K+1)}D(fz,Tz)$. Từ đó, ta có $D(Tz,fz)=0$, suy ra $Tz=fz$. Do đó, z là điểm trùng của T và f.

Do T và f là tương thích yếu nên đặt $w=Tz=fz$. Khi đó

$$Tw=Tfz=fTz=fw. \quad (2.8)$$

Do $fw=ffz\succ fz$ và T là (μ,ψ) - f -co yếu tổng quát nên

$$\mu(D(Tw,Tz)\le \mu\Big(\frac{1}{K(K+1)}(D(fw,Tz)+D(fz,Tw))\Big)-\psi(D(fw,Tz),D(fz,Tw))$$
$$\le \mu\Big(\frac{2}{K(K+1)}D(Tw,Tz)\Big).$$

Vì μ là hàm không giảm nên $D(Tw,Tz)\le \frac{2}{K(K+1)}D(Tw,Tz)$. Kết hợp với $K>1$ ta có

$$D(Tw,Tz)=0 \text{ hay } Tw=Tz. \quad (2.9)$$

Từ (2.8) và (2.9) suy ra $fw=Tw=w$ hay w là điểm bất động chung của T và f.

Bây giờ, giả sử rằng $F(T;f)$ là sắp thứ tự tốt. Ta chứng tỏ rằng điểm bất động chung của T và f là duy nhất. Giả sử tồn tại u,v sao cho $fu=Tu=u$ và $fv=Tv=v$. Vì $u,v\in F(T;f)$ và $F(T;f)$ là sắp thứ tự tốt nên u và v so sánh được. Không mất tính tổng quát, giả sử $u\succ v$. Suy ra $fu=u\succ v=fv$. Do $fu\succ fv$ và T là (μ,ψ) - f -co yếu tổng quát nên

$$\mu(D(u,v))=\mu(D(Tu,Tv))$$
$$\le \mu\Big(\frac{1}{K(K+1)}(D(fu,Tv)+D(fv,Tu))\Big)-\psi(D(fu,Tv),D(fv,Tu))$$
$$\le \mu\Big(\frac{2}{K(K+1)}D(u,v)\Big).$$

Vì μ là hàm không giảm nên $D(u,v)\le \frac{2}{K(K+1)}D(u,v)$. Từ đó kết hợp với $K>1$ ta có $D(u,v)=0$ hay $u=v$. Vậy điểm bất động chung của T và f là duy nhất.

Ngược lại, nếu T và f có duy nhất một điểm bất động chung thì $F(T;f)$ chỉ có một phần tử nên sắp thứ tự tốt. □

Hệ quả 2.3. *Cho $(X,D,K,\prec)$ là không gian kiểu-mêtric đầy đủ sắp thứ tự, trong đó D là ánh xạ liên tục và ánh xạ $T: X \to X$ thoả mãn các điều kiện sau*

(1) T là ánh xạ đơn điệu không giảm thỏa mãn

$$\mu(D(Tx,Ty)) \le \mu(\frac{1}{K(K+1)}(D(x,Ty)+D(y,Tx))) - \psi(D(x,Ty),D(y,Tx))$$

với mọi $x,y \in X, x \succ y$, trong đó μ là hàm biến thiên khoảng cách và hàm $\psi \in \Psi$;

(2) Tồn tại $x_0 \in X$ sao cho $x_0 \prec Tx_0$;

(3) T liên tục hoặc nếu $\{x_n\}$ là dãy không giảm và $\{x_n\} \to z \in X$ thì $x_n \prec z$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Khi đó, T có điểm bất động. Hơn nữa, nếu với bất kỳ $x,y \in X$ luôn tồn tại $w \in X$ sao cho w so sánh được với x và y thì điểm bất động của T là duy nhất.

Chứng minh. Ta xét hai trường hợp.

Trường hợp 1. T liên tục. Lập luận tương tự như trong chứng minh Định lí 2.2 với f là ánh xạ đồng nhất ta chứng minh được $\{x_n\}$ là dãy Cauchy. Do X là đầy đủ nên $\{x_n\}$ hội tụ. Giả sử $\lim_{n\to\infty} x_n = z$.

Khi đó, vì $x_{n+1} = Tx_n$ và T liên tục nên $z = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} Tx_n = T\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = Tz$.

Do đó, T có điểm bất động là z.

Bây giờ, giả sử u và v là hai điểm bất động của T. Khi đó, tồn tại $w \in X$ sao cho w so sánh được với u và v. Vì w so sánh được với u, không mất tính tổng quát ta giả sử $u \succ w$. Vì T là ánh xạ không giảm nên suy ra $T^n u \succ T^n w$. Theo giả thiết (1) ta có

$$\begin{aligned}\mu(D(u,T^n w)) &= \mu(D(T^n u,T^n w)) = \mu(D(TT^{n-1}u,TT^{n-1}w))\\
&\le \mu(\frac{1}{K(K+1)}(D(T^{n-1}u,T^n w)+D(T^{n-1}w,T^n u)))\\
&\qquad -\psi(D(T^{n-1}u,T^n w),D(T^{n-1}w,T^n u))\\
&= \mu(\frac{1}{K(K+1)}(D(u,T^n w)+D(T^{n-1}w,u))) - \psi(D(u,T^n w),D(T^{n-1}w,u)) \quad (2.10)\\
&\le \mu(\frac{1}{K(K+1)}(D(u,T^n w)+D(T^{n-1}w,u))).\end{aligned}$$

Vì μ là hàm không giảm nên suy ra $D(u,T^n w) \le \dfrac{1}{K(K+1)}(D(u,T^n w) + D(T^{n-1}w,u))$.

Điều này dẫn đến $D(u,T^n w) \le \dfrac{1}{K^2+K-1} D(u,T^{n-1}w) \le D(u,T^{n-1}w)$. Do đó $\{D(u,T^n w)\}$ là dãy đơn điệu giảm không âm. Suy ra tồn tại $r \ge 0$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} D(u,T^n w) = r$. Khi đó cho $n \to \infty$ trong (2.10) và từ tính liên tục của μ và nửa liên tục dưới của ψ ta được $\mu(r) \le \mu(\dfrac{2r}{K(K+1)}) - \psi(r,r) \le \mu(\dfrac{2r}{K(K+1)})$. Vì μ là hàm không giảm nên suy ra $r \le \dfrac{2r}{K(K+1)}$. Từ đó kết hợp với $K > 1$ suy ra $r = 0$. Do đó $\lim\limits_{n\to\infty} D(u,T^n w) = 0$ hay $\lim\limits_{n\to\infty} T^n w = u$.

Tương tự, w so sánh được với v ta cũng chứng minh được $\lim\limits_{n\to\infty} T^n w = v$. Do tính duy nhất của giới hạn nên $u = v$.

Trường hợp 2. Nếu $\{x_n\}$ là dãy không giảm và $\{x_n\} \to z \in X$ thì $x_n \prec z$. Khi đó, trong Định lí 2.2 bằng cách chọn f là ánh xạ đồng nhất, ta được điều phải chứng minh. □

Trong Hệ quả 2.3, chọn μ là ánh xạ đồng nhất, ta thu được kết quả sau.

Hệ quả 2.4. *Cho $(X,D,K,\prec)$ là không gian kiểu-mêtric đầy đủ sắp thứ tự, trong đó D là ánh xạ liên tục và ánh xạ $T: X \to X$ thoả mãn các điều kiện sau.*

(1) T là ánh xạ đơn điệu không giảm thỏa mãn

$$D(Tx,Ty) \le \frac{1}{K(K+1)}(D(x,Ty) + D(y,Tx)) - \psi(D(x,Ty), D(y,Tx))$$

với mọi $x,y \in X$, $x \succ y$, trong đó hàm $\psi \in \Psi$;

(2) Tồn tại $x_0 \in X$ sao cho $x_0 \prec Tx_0$;

(3) Ánh xạ T liên tục hoặc nếu dãy $\{x_n\}$ là dãy không giảm và $\{x_n\} \to z \in X$ thì $x_n \prec z$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Khi đó, T có điểm bất động. Hơn nữa, nếu với bất kỳ $x,y \in X$ luôn tồn tại $w \in X$ sao cho w so sánh được với x và y thì điểm bất động của T là duy nhất.

Trong Hệ quả 2.4 nếu $\psi(x,y) = (\dfrac{1}{K(K+1)} - \lambda)(x+y), 0 < \lambda < \dfrac{1}{K(K+1)}$ thì ta thu được kết quả sau.

Hệ quả 2.5. *Cho* $(X, D, K, \prec)$ *là không gian kiểu-mêtric đầy đủ sắp thứ tự, trong đó* D *là ánh xạ liên tục và ánh xạ* $T : X \to X$ *thoả mãn các điều kiện sau.*

(1) T *là ánh xạ đơn điệu không giảm thỏa mãn*

$$D(Tx,Ty) \le \lambda(D(x,Ty) + D(y,Tx)), 0 < \lambda < \frac{1}{K(K+1)} \text{ với mọi } x,y \in X,\ x \succ y;$$

(2) Tồn tại $x_0 \in X$ *sao cho* $x_0 \prec Tx_0$;

(3) Ánh xạ T *liên tục hoặc nếu dãy* $\{x_n\}$ *là dãy không giảm và* $\{x_n\} \to z \in X$ *thì* $x_n \prec z$ *với mọi* $n \in \mathbb{N}$.

Khi đó, T *có điểm bất động. Hơn nữa, nếu với bất kỳ* $x, y \in X$ *tồn tại* $w \in X$ *sao cho* w *so sánh được với* x *và* y *thì điểm bất động của* T *là duy nhất.*

Cuối cùng, chúng tôi giới thiệu ví dụ minh họa cho Định lí 2.2.

Ví dụ 2.6. Xét $X = \{0,1,2\}$ với thứ tự thông thường trên $\mathbb{R}$ và ánh xạ $D : X \times X \to [0,+\infty)$ xác định bởi

$$D(0,0) = D(1,1) = D(2,2) = 0,$$
$$D(1,2) = D(2,1) = 4, D(0,1) = D(1,0) = D(0,2) = D(2,0) = 1.$$

Khi đó, (X, D) là không gian kiểu-mêtric sắp thứ tự đầy đủ với $K = 2$.

Xét hai ánh xạ $T, f : X \to X$ xác định bởi: $T0 = T1 = T2 = 0,\ f0 = 0, f1 = f2 = 2.$

Xét hàm $\mu(t) = 6t$ với mọi $t \ge 0$ và hàm $\psi(a,b) = \frac{1}{2}(a+b)$ với $a, b \ge 0$.

Khi đó, với mọi $fx \ge fy$ ta có $\mu(D(Tx,Ty)) = \mu(D(0,0)) = 0$ và

$$\mu(\frac{1}{6}[D(fx,Ty) + D(fy,Tx)]) - \psi(D(fx,Ty), D(fy,Tx))$$

$$= \mu(\frac{1}{6}[D(fx,0) + D(fy,0)]) - \psi(D(fx,0), D(fy,0)) = \frac{1}{2}[D(fx,0) + D(fy,0)].$$

Do đó, $\mu(D(Tx,Ty)) \le \mu(\frac{1}{6}[D(fx,Ty) + D(fy,Tx)]) - \psi(D(fx,Ty), D(fy,Tx))$ hay T là (μ,ψ)-f-co yếu tổng quát. Đồng thời, các giả thiết còn lại trong Định lí 2.2 đều thỏa mãn. Do đó T và f có điểm bất động chung./.

Tài liệu tham khảo

[1]. S. Chandok (2013), "Some common fixed point results for generalized weak contractive mappings in partially ordered metric spaces", *J. Nonlinear Anal. Optim.*, 4 (1), pp. 45-52.

[2]. B. C. Dhage (2000), "Generalized metric spaces and topological structure I", *An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi. Mat. (N.S.)*, XLVI, pp. 3-24.

[3]. N. V. Dung, N. T. T. Ly, V. D. Thinh and N. T. Hieu (2013), "Suzuki-type fixed point theorems for two maps in metric-type spaces", *J. Nonlinear Anal. Optim.*, 4 (2), pp. 17-29.

[4]. S. Gahler (1963/64), "2-metrische raume und ihre topologische struktur", *Math. Nachr.*, (26), pp. 115-118.

[5]. N. T. Hieu and V. T. L. Hang (2013), "Coupled fixed point theorems for generalized α-ψ-contactive mappings in partially ordered metric-type spaces", *J. Nonlinear Anal. Optim.*, submitted.

[6]. N. Hussain, D. Djori'c, Z. Kadelburg and S. Radenovi'c (2012), "Suzuki-type fixed point results in metric type spaces", *Fixed Point Theory Appl.*, 2012:126, 14 pages.

[7]. M. Jovanovic, Z. Kadelburg and S. Radenovic (2010), "Common fixed point results in metric-type space", *Fixed Point Theory Appl.*, (2010), 15 pages.

[8]. M. A. Khamsi (2010), "Remarks on cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings", *Fixed Point Theory Appl.*, (2010), 7 pages.

[9]. M. S. Khan, M. Swaleh and S. Sessa (1984), "Fixed point theorems by altering distances between the points", *Bull. Austral. Math. Soc*, 30 (1), pp. 1-9.

[10]. A. J. Kurdila and M. Zabarankin (2005), *Convex Functional Analysis*, Birkhauser Verlag.

[11]. Z. Mustafa and B. Sims (2006), "A new approach to generalized metric spaces", *J. Nonlinear Convex Anal.*, 7 (2), pp. 289-297.

[12]. S. Sedghi, N. Shobe and A. Aliouche (2012), "A generalization of fixed point theorem in S-metric spaces", *Mat. Vesnik*, 64 (3), pp. 258-266.

Summary

In this paper, we introduce the notion of (μ,ψ)-f-weakly contractive mappings in partially ordered metric-type spaces. Also, we establish a common fixed point theorem for these mappings in partially ordered metric-type spaces and then point out some consequences related. In addition, we provide illustrated examples for the findings.

Key words: fixed point, metric-type, (μ,ψ)-f-weakly contractive mapping.

Ngày nhận bài: 28/10/2013; ngày nhận đăng: 24/4/2014.