# SỰ HỘI TỤ CỦA DÃY LẶP ĐẾN ĐIỂM BẤT ĐỘNG CHUNG CỦA HAI ÁNH XẠ TỰA TIỆM CẬN KHÔNG GIÃN HOÀN TOÀN BREGMAN TRONG KHÔNG GIAN BANACH PHẢN XẠ

**Trần Tân Tiến[1] và Nguyễn Trung Hiếu[2*]**

[1]*Sinh viên, Khoa Sư phạm Toán - Tin, Trường Đại học Đồng Tháp, Việt Nam*

[2]*Khoa Sư phạm Toán - Tin, Trường Đại học Đồng Tháp, Việt Nam*

[*]*Tác giả liên hệ: Nguyễn Trung Hiếu, Email: ngtrunghieu@dthu.edu.vn*

**Lịch sử bài báo**

*Ngày nhận: 02/6/2021; Ngày nhận chỉnh sửa: 27/7/2021; Ngày duyệt đăng: 28/8/2021*

**Tóm tắt**

*Trong bài báo này, chúng tôi giới thiệu một dãy lặp lai ghép và chứng minh sự hội tụ của dãy lặp này đến điểm bất động chung của hai ánh xạ tựa tiệm cận không giãn hoàn toàn Bregman trong không gian Banach phản xạ. Từ kết quả này, chúng tôi nhận được một số kết quả hội tụ của dãy lặp cho ánh xạ tựa tiệm cận không giãn Bregman, ánh xạ tựa $\phi$-không giãn tiệm cận và ánh xạ tựa $\phi$-tiệm cận không giãn hoàn toàn. Đồng thời, chúng tôi xây dựng ví dụ minh họa cho sự hội tụ của dãy lặp được giới thiệu.*

**Từ khóa:** *Ánh xạ tựa tiệm cận không giãn hoàn toàn Bregman, khoảng cách Bregman, không gian Banach phản xạ.*

---

# CONVERGENCE OF AN ITERATION TO COMMON FIXED POINTS OF TWO BREGMAN TOTALLY QUASI-ASYMPTOTICALLY NONEXPANSIVE MAPPINGS IN REFLEXIVE BANACH SPACES

**Tran Tan Tien[1] and Nguyen Trung Hieu[2*]**

[1]*Student, Faculty of Mathematics - Informatics Technology Education, Dong Thap University, Vietnam*

[2]*Faculty of Mathematics - Informatics Technology Education, Dong Thap University, Vietnam*

[*]*Corresponding author: Nguyen Trung Hieu, Email: ngtrunghieu@dthu.edu.vn*

**Article history**

*Received: 02/6/2021; Received in revised form: 27/7/2021; Accepted: 28/8/2021*

**Abstract**

*In this paper, we introduce a hybrid iteration method and prove the convergence of this iteration process to common fixed points of two Bregman totally quasi-asymptotically nonexpansive mappings in reflexive Banach spaces. From this result, we gain some convergence results by such iterations for Bregman quasi-asymptotically nonexpansive mappings, totally quasi-$\phi$-asymptotically nonexpansive mappings and quasi-$\phi$-asymptotically nonexpansive mappings. In addition, we provide an example to illustrate the convergence of the proposed iteration.*

**Keywords:** *Bregman totally quasi-asymptotically nonexpansive mapping, Bregman distance, reflexive Banach space.*

---

DOI: https://doi.org/10.52714/dthu.11.2.2022.934

Trích dẫn: Trần, T. T., & Nguyễn, T. H. (2022). Sự hội tụ của dãy lặp đến điểm bất động chung của hai ánh xạ tựa tiệm cận không giãn hoàn toàn Bregman trong không gian Banach phản xạ. *Tạp chí Khoa học Đại học Đồng Tháp*, *11*(2), 19-32. https://doi.org/10.52714/dthu.11.2.2022.934.

## 1. Giới thiệu

Trong những năm gần đây, việc nghiên cứu mở rộng sự hội tụ của dãy lặp đến điểm bất động của ánh xạ không giãn từ không gian Hilbert sang không gian Banach được một số tác giả quan tâm. Vì một số kết quả đặc trưng trong không gian Hilbert không còn đúng trong không gian Banach nên cần có cách tiếp cận mới trong hướng nghiên cứu này. Một cách tiếp cận trong không gian Banach trơn là sử dụng ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc, phiếm hàm Lyapunov và phép chiếu suy rộng. Một cách tiếp cận khác trong không gian Banach phản xạ là sử dụng khoảng cách Bregman và phép chiếu Bregman. Với cách tiếp cận thứ hai, một số tác giả đã mở rộng ánh xạ không giãn và những ánh xạ không giãn suy rộng thành ánh xạ không giãn Bregman, ánh xạ tựa không giãn Bregman, ánh xạ không giãn mạnh Bregman, ánh xạ không giãn tương đối Bregman… Từ đó, nhiều kết quả hội tụ bởi những dãy lặp khác nhau đã được nghiên cứu trong những lớp ánh xạ này.

Năm 2014, bằng cách sử dụng khoảng cách Bregman, Chang & cs. (2014) đã giới thiệu khái niệm ánh xạ tựa tiệm cận không giãn hoàn toàn Bregman. Lớp ánh xạ này là tổng quát của nhiều lớp ánh xạ liên quan đến khoảng cách Bregman. Đồng thời, các tác giả cũng đã giới thiệu dãy lặp lai ghép để nghiên cứu điểm bất động chung của họ đếm được các ánh xạ tựa tiệm cận không giãn hoàn toàn Bregman trong không gian Banach phản xạ. Sau đó, một kết quả hội tụ đến điểm chung của tập điểm bất động của ánh xạ tựa tiệm cận không giãn hoàn toàn Bregman và tập nghiệm bài toán cân bằng đã được thiết lập (Ni & Wen, 2018; Zhu & Huang, 2016). Tuy nhiên, theo hiểu biết của chúng tôi, tính đến nay chưa có nhiều kết quả hội tụ của những dãy lặp khác nhau đến điểm bất động cũng như điểm bất động chung của những ánh xạ tựa tiệm cận không giãn hoàn toàn Bregman. Do đó, trong bài báo này, chúng tôi đề xuất một dãy lặp lai ghép mới cho hai ánh xạ tựa tiệm cận không giãn hoàn toàn Bregman và chứng minh sự hội tụ của dãy lặp này đến điểm bất động chung của hai ánh xạ tựa tiệm cận không giãn hoàn toàn Bregman trong không gian Banach phản xạ.

## 2. Một số khái niệm và kết quả cơ bản trong không gian Banach

Mục này trình bày một số khái niệm và kết quả cơ bản được sử dụng trong bài báo.

Cho $E$ là không gian Banach thực và $f: E \to (-\infty, +\infty]$ là hàm số. Kí hiệu miền xác định của $f$ là

$$\mathrm{dom} f = \{x \in E : f(x) < +\infty\}.$$

Với $x \in \mathrm{int}(\mathrm{dom} f)$ và $y \in E,$ kí hiệu $f'(x,y)$ là đạo hàm bên phải của $x$ tại theo hướng $y,$ được xác định bởi:

$$f'(x,y) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x+ty) - f(x)}{t}. \qquad (2.1)$$

Hàm $f$ được gọi là *khả vi Gâteaux tại* $x$ nếu giới hạn (1.1) tồn tại với bất kì $y.$ Trong trường hợp này, $f'(x,y)$ trùng với $\nabla f(x)$ (giá trị gradient của $\nabla f$ tại $x$). Hàm $f$ được gọi là *khả vi Fréchet tại* $x$ nếu giới hạn (2.1) tồn tại đều trên $\|y\| = 1.$ Hàm $f$ được gọi là *khả vi Fréchet đều* trên tập con $C$ của $E$ nếu giới hạn (1.1) tồn tại đều với mỗi $x \in C$ và $\|y\| = 1.$

Lưu ý rằng nếu $E$ là không gian Banach phản xạ và $f: E \to (-\infty, +\infty]$ là hàm khả vi Fréchet đều trên $X$ thì $f$ liên tục đều trên $X,$ xem (Ambrosetti & Prodi, 1993, Theorem 1.8).

Mệnh đề 2.1 [Reich và Sabach, 2009, Proposition 1]. *Cho $E$ là không gian Banach phản xạ, $f: E \to (-\infty, +\infty]$ là hàm khả vi Fréchet đều và bị chặn trên mỗi tập con bị chặn của $E.$ Khi đó, $\nabla f$ là hàm liên tục đều trên mỗi tập con bị chặn của $E.$*

Cho $E$ là không gian Banach phản xạ, $E^*$ là không gian liên hợp của $E,$ $f: E \to (-\infty, +\infty]$ là hàm lồi, chính thường và nửa liên tục dưới. Với $x \in \mathrm{int}(\mathrm{dom} f),$ dưới vi phân của $f$ tại $x \in E$ được xác định bởi:

$$\partial f(x) = \{x^* \in E^* : f(x) + \langle x^*, y - x\rangle \le f(y)$$

với mọi $y \in E\}$

và $f^*: E^* \to (-\infty, +\infty]$ là đối ngẫu Fenchel của $f$ được xác định bởi

$$f^*(x^*) = \sup\{\langle x^*, x\rangle - f(x) : x \in E\}$$

với mọi $x^* \in E^*.$

**Định nghĩa 2.2** (Chang & cs., 2014, Định nghĩa 2.2)**.** Cho $E$ là không gian Banach phản xạ và $f: E \to (-\infty, +\infty]$ là hàm số. Khi đó, $f$ được gọi là *Legendre* nếu thỏa mãn hai điều kiện sau:

(1) $\text{int}(\text{dom} f) \neq \varnothing$, $f$ khả vi Gâteaux trên $\text{int}(\text{dom} f)$ và $\text{dom}(\nabla f) = \text{int}(\text{dom} f)$.

(2) $\text{int}(\text{dom} f^*) \neq \varnothing$, $f$ khả vi Gâteaux trên $\text{int}(\text{dom} f^*)$ và $\text{dom}(\nabla f^*) = \text{int}(\text{dom} f^*)$.

**Nhận xét 2.3** (Chang & cs., 2014, Lưu ý 2.3). *Cho $E$ là không gian Banach phản xạ và $f: E \to (-\infty, +\infty]$ là hàm Legendre. Khi đó,*

*(1) $f$ là hàm Legendre khi và chỉ khi $f^*$ là hàm Legendre.*

*(2) $(\partial f)^{-1} = \partial f^*$.*

*(3) $\nabla f = (\nabla f^*)^{-1}$, $\text{ran}(\nabla f) = \text{dom}(\nabla f^*)$ và $\text{ran}(\nabla f^*) = \text{dom}(\nabla f) = \text{int}(\text{dom} f)$, trong đó $\text{ran}(\nabla f)$ là miền giá trị của $\nabla f$.*

**Định nghĩa 2.4** (Censor & Lent, 1981, tr. 324). Cho $E$ là không gian Banach phản xạ, $f: E \to (-\infty, +\infty]$ là hàm Legendre, lồi và khả vi Gâteaux. Khi đó, hàm $D_f: \text{dom} f \times \text{int}(\text{dom} f) \to [0, +\infty)$ xác định bởi $D_f(x,y) = f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle$ được gọi là *khoảng cách Bregman* đối với $f$.

Lưu ý rằng khoảng cách Bregman không giống như những khoảng cách đã biết. Trong trường hợp tổng quát, $D_f$ không có tính chất đối xứng và không thỏa mãn bất đẳng thức tam giác. Khoảng cách Bregman có một số tính chất sau, trong đó, tính chất (2) được gọi là đẳng thức ba điểm, còn tính chất (3) được gọi là đẳng thức bốn điểm của khoảng cách Bregman. Để ý rằng nếu $y = w \in \text{int}(\text{dom} f)$ thì tính chất (3) trở thành tính chất (2).

(1) Với $x, y \in \text{int}(\text{dom} f)$, ta có

$$D_f(x,y) + D_f(y,x) = \langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle.$$

(2) Với $x \in \text{dom} f$ và $y, z \in \text{int}(\text{dom} f)$, ta có

$$D_f(x,y) + D_f(y,z) - D_f(x,z)$$
$$= \langle \nabla f(z) - \nabla f(y), x - y \rangle.$$

(3) Với $x, w \in \text{dom} f$ và $y, z \in \text{int}(\text{dom} f)$, ta có

$$D_f(x,y) + D_f(w,z) - D_f(x,z) - D_f(w,y)$$
$$= \langle \nabla f(z) - \nabla f(y), x - w \rangle.$$

Cho $f: E \to \mathbb{R}$ là hàm khả vi Gâteaux. Xét hàm $V_f: E \times E^* \to [0, +\infty)$ xác định bởi $V_f(x, x^*) = f(x) - \langle x^*, x \rangle + f^*(x^*)$ với mọi $x \in E, x^* \in E^*$. Khi đó, ta có nhận xét sau.

**Nhận xét 2.5.** *Cho $E$ là không gian Banach phản xạ, $f: E \to \mathbb{R}$ là hàm khả vi Gâteaux. Khi đó*

(1) (Kohsaka & Takahashi, 2005, Bổ đề 3.2) *$V_f$ là hàm không âm và với với mọi $x \in E$ và $x^* \in E^*$, ta có*

$$V_f(x, x^*) = D_f(x, \nabla f^*(x^*)).$$

(2) (Kumam & cs., 2016, tr. 7) *$V_f$ là hàm lồi theo biến thứ hai và với mọi $u \in E$, $\{x_i\}_{i=1}^k \subset E$ và $\{\lambda_i\}_{i=1}^k \subset (0,1)$ với $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$, ta có*

$$D_f(u, \nabla f^*(\sum_{i=1}^k \lambda_i \nabla f(x_i))) \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i D_f(u, x_i).$$

**Định nghĩa 2.6** (Chang & cs., 2014, tr. 40). Cho $E$ là không gian Banach phản xạ, $f: E \to (-\infty, +\infty]$ là hàm lồi, khả vi Gâteaux và $C$ là tập lồi, đóng, khác rỗng của $\text{int}(\text{dom} f)$. Phép chiếu Bregman của $x \in \text{int}(\text{dom} f)$ lên $C$ là vectơ duy nhất $P_C^f(x) \in C$ sao cho

$$D_f(P_C^f(x), x) = \inf\{D_f(y,x) : y \in C\}.$$

**Nhận xét 2.7** (Ni & Wen, 2018, Lưu ý 2.2). *Xét $E$ là không gian Banach trơn và $f(x) = \|x\|^2$ với $x \in E$. Khi đó, $\nabla f(x) = 2J(x)$ với $x \in E$ và $J$ là ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc xác định bởi*

$J(x) = \{x^* \in E^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$ *với $x \in E$. Hàm khoảng cách Bregman có dạng $D_f(x,y) = \|x\|^2 - 2\langle x, Jy \rangle + \|y\|^2 = \phi(x,y)$ là phiếm hàm Lyapunov. Do đó, phép chiếu Bregman trở thành phép chiếu suy rộng $\prod_C$ xác định bởi*

$$\phi(\textstyle\prod_C(x), x) = \min\{\phi(y,x) : y \in C\}.$$

**Định nghĩa 2.8** (Resmerita, 2004, tr. 1). Cho $E$ là không gian Banach phản xạ, $f: E \to (-\infty, +\infty]$ là hàm lồi và khả vi Gâteaux. Khi đó,

(1) $f$ được gọi là *lồi hoàn toàn* tại $x \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$ nếu với bất kì $t > 0$, ta có $v_f(x,t) = \inf\{D_g(y,x) : y \in \operatorname{dom} f, \| y - x \| = t\} > 0.$

(2) $f$ được gọi là *lồi hoàn toàn* nếu $f$ lồi hoàn toàn tại mọi $x \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$.

(3) $f$ được gọi là *lồi hoàn toàn trên mỗi tập con bị chặn của* $E$ nếu với bất kì tập con khác rỗng, bị chặn $B$ của $E$ và $t > 0,$ ta có $v_f(B,t) = \inf\{v_f(x,t) : x \in B \cap \operatorname{dom} f\} > 0.$

**Mệnh đề 2.9** (Resmerita, 2004, Mệnh đề 2.2). *Cho* $E$ *không gian Banach phản xạ,* $f : E \to (-\infty, +\infty]$ *là hàm lồi và khả vi Gâteaux. Khi đó,* $f$ *là hàm lồi hoàn toàn tại* $x \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$ *khi và chỉ khi với bất kì dãy* $\{y_n\} \subset \operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$ *sao cho* $\lim_{n \to +\infty} D_f(y_n, x) = 0,$ *ta có* $\lim_{n \to +\infty} \| y_n - x \| = 0.$

**Mệnh đề 2.10** (Butnariu & Iusem, 2000, Bổ đề 2.1.2). *Cho* $E$ *không gian Banach phản xạ,* $f : E \to (-\infty, +\infty]$ *là hàm lồi và khả vi Gâteaux. Khi đó,* $f$ *là hàm lồi hoàn toàn trên những tập bị chặn khi và chỉ khi với bất kì dãy* $\{x_n\} \subset \operatorname{dom} f$ *và* $\{y_n\} \subset \operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$ *sao cho* $\{x_n\}$ *là dãy bị chặn và* $\lim_{n \to +\infty} D_f(y_n, x_n) = 0$, *ta có*

$$\lim_{n \to \infty} \| y_n - x_n \| = 0.$$

**Mệnh đề 2.11** (Butnariu & Resmerita, 2006, Hệ quả 4.4). *Cho* $E$ *là không gian Banach phản xạ,* $f : E \to (-\infty, +\infty]$ *là hàm khả vi Gateaux, lồi hoàn toàn trong* $\operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$, $C$ *là tập lồi đóng, khác rỗng của* $\operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$ *và* $x \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$. *Khi đó, các khẳng định sau tương đương.*

*(1)* $z = P_C^f(x).$

*(2)* $z$ *là vectơ duy nhất thỏa mãn* $\langle \nabla f(x) - \nabla f(z), z - y \rangle \geq 0$ *với mọi* $y \in C.$

*(3)* $z$ *là vectơ duy nhất thỏa mãn* $D_f(y,z) + D_f(z,x) \leq D_f(y,x)$ *với mọi* $y \in C.$

**Mệnh đề 2.12.** *Cho* $E$ *không gian Banach và* $f : E \to (-\infty, +\infty]$ *là hàm số. Khi đó,*

*(1)* (Reich & Sabach, 2010, Bổ đề 1) *Nếu* $f$ *là hàm khả vi Gâteaux và lồi hoàn toàn trên* $\operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$, $x_0 \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$ và $\{x_n\} \subset \operatorname{dom} f$ *là dãy sao cho* $\{D_f(x_n, x_0)\}$ *bị chặn thì* $\{x_n\}$ *là dãy bị chặn.*

*(2)* (Sabach, 2011, Mệnh đề 2.3) *Nếu* $f$ *là hàm Legendre sao cho* $\nabla f^*$ *bị chặn trên mỗi tập con bị chặn của* $\operatorname{int}(\operatorname{dom} f^*)$, $x_0 \in \operatorname{dom} f$ và $\{x_n\} \subset \operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$ *là dãy sao cho* $\{D_f(x_0, x_n)\}$ *bị chặn thì* $\{x_n\}$ *là dãy bị chặn.*

**Định nghĩa 2.13** (Zalinescu, 2002, tr. 203, tr. 207, tr. 221). Cho $E$ là không gian Banach, kí hiệu $S_1 = \{x \in E : \|x\| < 1\}$ và $B_r = \{x \in E : \|x\| \leq r\}$ với $r > 0.$ Khi đó

(1) Hàm $f : E \to \mathbb{R}$ được gọi là *lồi đều trên mỗi tập con bị chặn* của $E$ nếu $\rho_r(t) > 0$ với mọi $t, r > 0,$ trong đó hàm số $\rho_r : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ được xác định bởi:

$$\rho_r(t) = \inf_{x, y \in B_r, \|x - y\| = t, \alpha \in (0,1)} \frac{\alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) - f(\alpha x + (1-\alpha) y)}{\alpha(1-\alpha)}.$$

(2) Hàm $f : E \to \mathbb{R}$ được gọi là *trơn đều trên mỗi tập con bị chặn* của $E$ nếu $\lim_{t \to 0} \frac{\sigma_r(t)}{t} = 0$ với mọi $r > 0,$ trong đó hàm số $\sigma_r : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ được xác định bởi:

$$\sigma_r(t) = \inf_{x \in B_r, y \in S_1, \alpha \in (0,1)} \frac{\alpha f(x + (1-\alpha) t y) + (1-\alpha) f(x - \alpha t y) - f(x)}{\alpha(1-\alpha)}.$$

**Nhận xét 2.14** (Naraghirad & Yao, 2013, tr.7). *Hàm* $f$ *lồi hoàn toàn trên mỗi tập con bị chặn của* $E$ *khi và chỉ khi hàm* $f$ *lồi đều trên mỗi tập con bị chặn của* $E$.

**Định nghĩa 2.15** (Kohsaka & Takahashi, 2005, tr.509). Cho $E$ là không gian Banach. Khi đó, hàm $f : E \to (-\infty, +\infty]$ được gọi là *thỏa mãn điều kiện bức mạnh* nếu

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} \frac{f(x)}{\| x \|} = +\infty.$$

**Mệnh đề 2.16** (Zalinescu, 2002, Mệnh đề 3.6.3). *Cho* $E$ *là không gian Banach phản xạ và* $f : E \to \mathbb{R}$ *là hàm lồi, liên tục và thỏa mãn điều kiện bức mạnh. Khi đó, các khẳng định sau tương đương.*

*(1)* $f$ *là hàm bị chặn trên mỗi tập con bị chặn của* $E$ *và trơn đều trên mỗi tập con bị chặn của* $E$.

*(2) $f$ là hàm khả vi Fréchet và $\nabla f$ liên tục đều trên mỗi tập con bị chặn của $E$.*

*(3) $\mathrm{Dom}(f^*) = E^*$, $f^*$ là hàm thỏa mãn điều kiện bức mạnh và lồi đều trên mỗi tập con bị chặn của $E^*$.*

**Mệnh đề 2.17** (Zalinescu, 2002, Mệnh đề 3.6.4)**.** *Cho $E$ là không gian Banach phản xạ và $f: E \to \mathbb{R}$ là hàm lồi, liên tục và bị chặn trên mỗi tập con bị chặn của $E$. Khi đó, các khẳng định sau là tương đương.*

*(1) $f$ là hàm thỏa mãn điều kiện bức mạnh và lồi đều trên mỗi tập con bị chặn của $E$.*

*(2) $\mathrm{Dom}(f^*) = E^*$, $f^*$ là hàm bị chặn trên mỗi tập con bị chặn của $E$ và trơn đều trên mỗi tập con bị chặn của $E^*$.*

*(3) $\mathrm{Dom}(f^*) = E^*$, $f^*$ là hàm khả vi Fréchet và $\nabla f^*$ liên tục đều trên mỗi tập con bị chặn của $E^*$.*

**Bổ đề 2.18** (Naraghirad & Yao, 2013, Bổ đề 2.2)**.** *Cho $E$ là không gian Banach, $r > 0$ và $f: E \to \mathbb{R}$ là hàm lồi và lồi đều trên mỗi tập con bị chặn của $E$. Khi đó*

$$f(\sum_{n=1}^{m} a_n x_n) \le \sum_{n=1}^{m} a f(x_n) - a_i a_j \rho_r(\| x_i - x_j \|) \text{ với}$$

*$i, j \in \{1, 2, ..., n\}$, $a_n \in [0,1]$ sao cho $\sum_{n=1}^{m} a_n = 1$ và $x_n \in B_r = \{x \in E : \| x \| \le r\}$, hàm $\rho_r$ trong Định nghĩa 2.13.*

Kí hiệu $F(T) = \{x \in C : Tx = x\}$ là tập điểm bất động của ánh xạ $T: C \to C$.

**Định nghĩa 2.19** (Chang & cs., 2014, Định nghĩa 2.10)**.** Cho $E$ là không gian Banach phản xạ, $C$ là tập con của $E$ và $T: C \to C$ là ánh xạ. Khi đó, $T: C \to C$ là *ánh xạ tựa tiệm cận không giãn hoàn toàn Bregman* nếu $F(T) \ne \varnothing$ và tồn tại hai dãy số thực không âm $\{v_n\}, \{\mu_n\}$ sao cho $v_n \to 0$, $\mu_n \to 0$ và $\zeta: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ là hàm liên tục và tăng chặt với $\zeta(0) = 0$ sao cho với mọi $x \in C$ và $p \in F(T)$, ta có

$$D_f(p, T^n x) \le D_f(p, x) + v_n \zeta(D_f(p, x)) + \mu_n. \quad (2.2)$$

**Nhận xét 2.20** (Ni & Wen, 2018, Định nghĩa 2.34)**.** *(1) Chọn $\zeta(t) = t$ với $t \ge 0$, $v_n = k_n - 1$ với $k_n \ge 1$ mà $\lim_{n\to\infty} k_n = 1$, $\mu_n = 0$, bất đẳng thức (2.2) trở thành*

$$D_f(p, T^n x) \le k_n D_f(p, x) \quad (2.3)$$

*với mọi $x \in C$ và $p \in F(T)$.*

*Điều này dẫn đến $T$ là ánh xạ tựa tiệm cận không giãn Bregman.*

*(2) Xét $E$ là không gian Banach trơn, phản xạ và $f(x) = \| x \|^2$ với $x \in E$. Theo Nhận xét 1.6, bất đẳng thức (2.2) và (2.3) lần lượt trở thành*

$$\phi(p, T^n x) \le \phi(p, x) + v_n \zeta(\phi(p, x)) + \mu_n$$

*và $\phi(p, T^n x) \le k_n \phi(p, x)$ với mọi $x \in C$ và $p \in F(T)$. Điều này dẫn đến $T$ lần lượt là ánh xạ tựa $\phi$-tiệm cận không giãn hoàn toàn và ánh xạ tựa $\phi$-không giãn tiệm cận.*

**Bổ đề 1.21** (Chang & cs., 2014, Bổ đề 2.16)**.** *Cho $E$ là không gian Banach phản xạ, $C$ là tập con khác rỗng, lồi, đóng của $E$, $f: E \to (-\infty, +\infty]$ là hàm Legendre lồi hoàn toàn trên những tập con bị chặn của $E$, $T: C \to C$ là ánh xạ tựa không giãn hoàn toàn Bregman với hai dãy số thực không âm $\{v_n\}, \{\mu_n\}$ và hàm tăng chặt, liên tục $\zeta: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ sao cho*

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} \mu_n = 0 \text{ và } \zeta(0) = 0.$$

*Khi đó, $F(T)$ là tập con lồi và đóng của $C$.*

**Định nghĩa 2.22** (Zhu & Huang, 2016, Định nghĩa 2.10)**.** Cho $E$ là không gian Banach, $C$ là tập con khác rỗng của $E$ và $T: C \to C$ là ánh xạ. Khi đó

(1) $T$ được gọi là *ánh xạ đóng* nếu với bất kì dãy $\{x_n\}$ trong $C$ sao cho

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \in C \text{ và } \lim_{n\to\infty} Tx_n = y \in C,$$

ta có $Tx = y$.

(2) $T$ được gọi là *ánh xạ chính qui tiệm cận đều* nếu với bất kì tập con bị chặn $\Omega$ của $C$ ta có $\limsup_{n\to\infty} \sup_{x\in\Omega} \| T^{n+1}x - T^n x \| = 0$.

## 3. Kết quả chính

Trước hết, chúng tôi chứng minh một số kết quả được sử dụng để chứng minh kết quả chính.

**Bổ đề 3.1.** *Cho $E$ là không gian Banach phản xạ và $f: E \to \mathbb{R}$ là hàm Legendre, thỏa mãn điều kiện bức mạnh và khả vi Fréchet đều, bị chặn trên mỗi tập con bị chặn của $E$. Khi đó*

$$D_f(u, \nabla f^*(\sum_{n=1}^{m} a_n \nabla f(x_n))) \le \sum_{n=1}^{m} a_n D_f(u, x_n)$$
$$- a_i a_j \rho_r^*(\| \nabla f(x_i) - \nabla f(x_j) \|)$$

*với* $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$, $u \in \mathrm{dom} f$, $a_n \in [0,1]$ *sao cho* $\sum_{n=1}^{m} a_n = 1$, *hàm* $\rho_r^*$ *xác định như hàm* $\rho_r$ *trong Định nghĩa 2.13 và*

$$\nabla f(x_n) \in B_r^* = \{x \in E^* : \| x \| \le r\}.$$

**Chứng minh.** Vì $f$ là hàm khả vi Fréchet đều và bị chặn trên mỗi tập con bị chặn của $E$ nên theo Mệnh đề 2.1, ta có $\nabla f$ liên tục trên mỗi tập con bị chặn của $E$. Kết hợp điều này với tính khả vi Fréchet của $f$, theo Mệnh đề 2.16, ta có $f^*$ là hàm lồi đều trên mỗi tập con bị chặn của $E^*$. Khi đó, theo Bổ đề 2.18, ta có

$$f^*(\sum_{n=1}^{m} a_n \nabla f(x_n)) \le \sum_{n=1}^{m} a_n f^*(\nabla f(x_n))$$
$$- a_i a_j \rho_r^*(\| \nabla f(x_i) - \nabla f(x_j) \|)$$ *với* $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$,

$u \in \mathrm{dom} f$, $a_n \in [0,1]$ *sao cho* $\sum_{n=1}^{m} a_n = 1$, *hàm* $\rho_r^*$ *xác định như hàm* $\rho_r$ *trong Định nghĩa 2.13 và*

$$\nabla f(x_n) \in B_r^* = \{x \in E^* : \| x \| \le r\}.$$

Khi đó, với $u \in \mathrm{dom} f$, sử dụng Nhận xét 2.4.(1) và định nghĩa của $V_f$, ta có

$$D_f(u, \nabla f^*(\sum_{n=1}^{m} a_n \nabla f(x_n)))$$
$$= V_f(u, \sum_{n=1}^{m} a_n \nabla f(x_n))$$
$$\le f(u) - \langle \sum_{n=1}^{m} a_n \nabla f(x_n), u \rangle + \sum_{n=1}^{m} a_n f^*(\nabla f(x_n))$$
$$- a_i a_j \rho_r^*(\| \nabla f(x_i) - \nabla f(x_j) \|)$$
$$= \sum_{n=1}^{m} a_n [f(u) - \langle \nabla f(x_n), u \rangle + f^*(\nabla f(x_n))]$$
$$- a_i a_j \rho_r^*(\| \nabla f(x_i) - \nabla f(x_j) \|)$$
$$= \sum_{n=1}^{m} a_n V_f(u, \nabla f(x_n))$$
$$- a_i a_j \rho_r^*(\| \nabla f(x_i) - \nabla f(x_j) \|)$$
$$= \sum_{n=1}^{m} a_n D_f(u, \nabla f^*(\nabla f(x_n)))$$
$$- a_i a_j \rho_r^*(\| \nabla f(x_i) - \nabla f(x_j) \|)$$
$$= \sum_{n=1}^{m} a_n D_f(u, x_n)$$
$$- a_i a_j \rho_r^*(\| \nabla f(x_i) - \nabla f(x_j) \|). \qquad \square$$

**Bổ đề 3.2.** *Cho $E$ là không gian Banach phản xạ, $C$ là tập con khác rỗng, lồi, đóng của $E$, $f: E \to (-\infty, +\infty]$ là hàm Legendre bị chặn, khả vi Fréchet đều, $T_1, T_2 : C \to C$ là hai ánh xạ tựa tiệm cận không giãn hoàn toàn Bregman. Khi đó, tồn tại hai dãy số thực $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ sao cho $\alpha_n \to 0, \beta_n \to 0$ và hàm $\varphi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $\varphi(0) = 0$ liên tục và tăng chặt sao cho với mọi $x \in C$, $p \in F(T_1) \cap F(T_2)$, ta có*

$$D_f(p, T_i^n x) \le D_f(p, x) + \alpha_n \varphi(D_f(p, x)) + \beta_n$$

*với* $i = 1, 2$.

**Chứng minh.** Vì $T_i$ (với $i = 1, 2$) là ánh xạ tựa tiệm cận không giãn hoàn toàn Bregman nên tồn tại hai dãy số thực $\{v_n^{(i)}\}, \{\mu_n^{(i)}\}$ với $v_n^{(i)} \to 0, \mu_n^{(i)} \to 0$ và hàm $\zeta^{(i)} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $\zeta^{(i)}(0) = 0$ liên tục và tăng chặt sao cho với mọi $x \in C$, $p_i \in F(T_i)$, ta có

$$D_f(p_i, T_i^n x) \le D_f(p_i, x) + v_n^{(i)} \zeta^{(i)}(D_f(p_i, x)) + \mu_n^{(i)}.$$

Đặt $\varphi(t) = \max\{\zeta^{(i)}(t) : i = 1, 2\}$ với $t \ge 0$, $\alpha_n = \max\{v_n^{(i)} : i = 1, 2\}$ và $\beta_n = \max\{\mu_n^{(i)} : i = 1, 2\}$. Khi đó, $\alpha_n \to 0$, $\beta_n \to 0$ và hàm $\varphi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $\varphi(0) = 0$ liên tục và tăng chặt sao cho với mọi $x \in C$, $p \in F(T_1) \cap F(T_2)$, ta có

$$D_f(p, T_i^n x) \le D_f(p, x) + \alpha_n \varphi(D_f(p, x)) + \beta_n$$

với $i = 1, 2$. $\square$

Kết quả sau thiết lập sự hội tụ của dãy lặp lai ghép đến điểm bất động chung của hai ánh xạ tựa tiệm cận không giãn hoàn toàn Bregman trong không gian Banach phản xạ.

**Định lí 3.3.** *Giả sử $E$ là không gian Banach phản xạ, $C$ là tập con khác rỗng, lồi, đóng của $E$, $f: E \to \mathbb{R}$ là hàm Legendre, thỏa mãn điều kiện bức mạnh, bị chặn, khả vi Frechet đều, lồi hoàn toàn trên mỗi tập con bị chặn của $E$, $T_1, T_2 : C \to C$ là ánh xạ đóng, chính qui tiệm cận đều, tựa tiệm cận không giãn hoàn toàn Bregman sao cho $\mathcal{F} = F(T_1) \cap F(T_2) \neq \varnothing$ và bị chặn. Xét $\{x_n\}$ là dãy được xác định bởi:*

$$\begin{cases} x_1 \in C, C_1 = C \\ y_n = \nabla f^*[(1-b_n)\nabla f(x_n) + b_n \nabla f(T_1^n x_n)] \\ z_n = \nabla f^*[(1-a_n)\nabla f(T_2^n x_n) + a_n \nabla f(y_n)] \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : D_f(z, z_n) \le D_f(z, x_n) + \gamma_n\} \\ x_{n+1} = P^f_{C_{n+1}}(x_1), \end{cases}$$

*trong đó $\gamma_n = \alpha_n \sup_{p \in \mathcal{F}} \varphi(D_f(p, x_n)) + \beta_n$, với $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ và hàm $\varphi$ xác định như trong chứng minh Bổ đề 3.2, $P^f_{C_{n+1}}$ là phép chiếu Bregman của $E$ vào $C_{n+1}$, $\{a_n\}, \{b_n\} \subset [0,1]$ sao cho $\liminf_{n\to\infty} a_n(1-a_n) > 0$ và $\liminf_{n\to\infty} b_n(1-b_n) > 0$. Khi đó, $\{x_n\}$ hội tụ đến $P^f_{\mathcal{F}}(x_1)$.*

**Chứng minh.** Phép chứng minh được chia thành 6 bước như sau.

**Bước 1:** *Chứng minh $P_{\mathcal{F}}(x_1)$ xác định.* Thật vậy, theo Bổ đề 2.21, ta có $F(T_1), F(T_2)$ là tập đóng và lồi. Do đó $\mathcal{F} = F(T_1) \cap F(T_2)$ là tập đóng và lồi trong $C$. Vậy $P^f_{\mathcal{F}}(x_1)$ được xác định.

**Bước 2:** *Chứng minh $P^f_{C_{n+1}}$ xác định với mọi $n \in \mathbb{N}$.* Ta có

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= \{z \in C_n : D_f(z, z_n) \le D_f(z, x_n) + \gamma_n\} \\ &= \{z \in C_n : f(z) - f(z_n) - \langle \nabla f(z_n), z - z_n \rangle \\ &\le f(z) - f(x_n) - \langle \nabla f(x_n), z - x_n \rangle + \gamma_n\} \\ &= \{z \in C_n : \langle \nabla f(x_n), z - x_n \rangle - \langle \nabla f(z_n), z - z_n \rangle \\ &\le f(x_n) - f(z_n) + \gamma_n\}. \end{aligned}$$

Đặt

$$\begin{aligned} H_n = \{z \in E : \langle \nabla f(x_n) - \nabla f(z_n), z \rangle &\le \\ \langle \nabla f(x_n), x_n \rangle - \langle \nabla f(z_n), z_n \rangle &+ f(x_n) - f(z_n) + \gamma_n\}. \end{aligned}$$

Khi đó, $C_{n+1} = C_n \cap H_n$. Do đó

$$C_{n+1} = C_1 \cap (\textstyle\bigcap_{k=1}^n H_k)$$

Ta có $H_k$ là tập lồi, đóng với mọi $k$. Do đó, vì $C_1 = C$ là tập lồi, đóng nên $C_{n+1}$ là tập lồi, đóng với mọi $n$.

Tiếp theo, ta chứng minh $\mathcal{F} \subset C_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Ta có $\mathcal{F} \subset C_1 = C$. Giả sử $\mathcal{F} \subset C_k$ với $k \in \mathbb{N}^*$. Ta chứng minh $\mathcal{F} \subset C_{k+1}$. Thật vậy, ta lấy $x \in \mathcal{F}$. Vì $\mathcal{F} \subset C_k$ nên $x \in C_k$. Sử dụng Nhận xét 2.4 (2), ta có

$$\begin{aligned} D_f(x, y_k) &= D_f(x, \nabla f^*[(1-b_k)\nabla f(x_k) + b_k \nabla f(T_1^k x_k)]) \\ &\le b_k D_f(x, T_1^k x_k) + (1-b_k) D_f(x, x_k) \\ &\le b_k [D_f(x, x_k) + \alpha_k \varphi(D_f(x, x_k)) + \beta_k] \\ &\quad + (1-b_k) D_f(x, x_k) \\ &= D_f(x, x_k) + b_k \alpha_k \varphi(D_f(x, x_k)) + b_k \beta_k \\ &\le D_f(x, x_k) + \alpha_k \varphi(D_f(x, x_k)) + \beta_k, \quad (3.1) \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} D_f(x, z_k) &= D_f(x, \nabla f^*[(1-a_k)\nabla f(T_2^k x_k) + a_k \nabla f(y_k)]) \\ &\le a_k D_f(x, y_k) + (1-a_k) D_f(x, T_2^k x_k) \\ &\le a_k D_f(x, y_k) + (1-a_k)[D_f(x, x_k) \\ &\quad + \alpha_k \varphi(D_f(x, x_k)) + \beta_k]. \quad (3.2) \end{aligned}$$

Thay (3.1) vào (3.2) ta được

$$\begin{aligned} D_f(x, z_k) &\le a_k [D_f(x, x_k) + \alpha_k \varphi(D_f(x, x_k)) + \beta_k] \\ &\quad + (1-a_k)[D_f(x, x_k) + \alpha_k \varphi(D_f(x, x_k)) + \beta_k] \\ &= D_f(x, x_k) + \alpha_k \varphi(D_f(x, x_k)) + \beta_k \\ &\le D_f(p, x_k) + \alpha_k \sup_{x \in \mathcal{F}} \varphi(D_f(x, x_k)) + \beta_k \\ &= D_f(x, x_k) + \gamma_k. \end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ $x \in C_{k+1}$. Vậy $\mathcal{F} \subset C_{k+1}$. Theo nguyên lý quy nạp ta được $\mathcal{F} \subset C_{n+1}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Vì $\mathcal{F} \subset C_{n+1}$ và $\mathcal{F} \neq \varnothing$ nên $C_{n+1} \neq \varnothing$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Do đó, $P^f_{C_{n+1}}(x_1)$ xác định.

**Bước 3:** *Chứng minh* $\{x_n\}$ *bị chặn và* $\lim_{n\to\infty} D_f(x_n, x_1)$ *tồn tại*. Thật vậy, vì $x_n = P_{C_n}^f(x_1)$ nên theo Mệnh đề 2.11 ta có

$$D_f(u, x_n) + D_f(x_n, x_1) \le D_f(u, x_1) \quad (3.3)$$

với $u \in C_n$. Lấy $x \in \mathcal{F}$. Vì $\mathcal{F} \subset C_n$ nên $x \in C_n$. Khi đó, trong (3.3), lấy $u = x$, ta có

$$D_f(x, x_n) + D_f(x_n, x_1) \le D_f(x, x_1).$$

Khi đó

$D_f(x_n, x_1) \le D_f(x, x_1) - D_f(x, x_n) \le D_f(x, x_1)$. Suy ra $\{D_f(x_n, x_1)\}$ bị chặn. Theo Mệnh đề 1.12(1), ta được $\{x_n\}$ bị chặn. Vì

$x_{n+1} = P_{C_{n+1}}^f(x_1) \in C_{n+1} \subset C_n$ nên lấy $u = x_{n+1}$ trong (3.3), ta có

$$D_f(x_{n+1}, x_n) + D_f(x_n, x_1) \le D_f(x_{n+1}, x_1).$$

Suy ra $D_f(x_n, x_1) \le D_f(x_{n+1}, x_1) - D_f(x_{n+1}, x_n)$

$$\le D_f(x_{n+1}, x_1).$$

Do đó $\{D_f(x_n, x_1)\}$ là dãy không giảm. Vậy giới hạn $\lim_{n\to\infty} D_f(x_n, x_1)$ tồn tại.

**Bước 4:** *Chứng minh* $\lim_{n\to\infty} x_n = p \in C$. Thật vậy, với $m > n$, $x_m = P_{C_m}^f(x_1) \in C_m \subset C_n$. Trong (3.3) chọn $u = x_m$, ta được

$$D_f(x_m, x_n) + D_f(x_n, x_1) \le D_f(x_m, x_1). \quad (3.4)$$

Khi đó, từ (3.4) ta có

$$0 \le D_f(x_m, x_n) \le D_f(x_m, x_1) - D_f(x_n, x_1). \quad (3.5)$$

Trong (3.5), cho $n, m \to \infty$ và sử dụng giới hạn $\lim_{n\to\infty} D_f(x_n, x_1)$ tồn tại, ta được $\lim_{n,m\to\infty} D_f(x_m, x_n) = 0$. Vì $\{x_n\}$ bị chặn và $\lim_{n,m\to\infty} D_f(x_m, x_n) = 0$ nên theo Mệnh đề 2.10, ta có $\lim_{n,m\to\infty} \| x_n - x_m \| = 0$. Suy ra $\{x_n\}$ là dãy Cauchy trong $C$. Vì $E$ là không gian Banach và $C$ là tập đóng nên tồn tại $p \in C$ sao cho $\lim_{n\to\infty} x_n = p$.

**Bước 5:** *Chứng minh* $p \in \mathcal{F}$. Thật vậy, vì $\lim_{n,m\to\infty} \| x_n - x_m \| = 0$ nên

$$\lim_{n\to\infty} \| x_n - x_{n+1} \| = 0. \quad (3.6)$$

Vì $x_{n+1} \in C_{n+1}$ nên

$$D_f(x_{n+1}, z_n) \le D_f(x_{n+1}, x_n) + \gamma_n. \quad (3.7)$$

Với $x \in \mathcal{F}$, sử dụng (3.3), ta có

$$D_f(x, x_n) \le D_f(x, x_1) - D_f(x_n, x_1).$$

Kết hợp điều này với dãy $\{D_f(x_n, x_1)\}$ bị chặn, ta suy ra $\{D_f(x, x_n)\}$ bị chặn. Do đó, tồn tại $M > 0$ sao cho $D_f(x, x_n) \le M$. Khi đó

$$0 \le \gamma_n = \alpha_n \sup_{x\in\mathcal{F}} \varphi(D_f(x, x_n)) + \beta_n$$

$$\le \alpha_n \sup_{x\in\mathcal{F}} \varphi(M) + \beta_n = \alpha_n \varphi(M) + \beta_n. \quad (3.8)$$

Trong (3.8) cho $n \to \infty$, sử dụng $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ và $\lim_{n\to\infty} \beta_n = 0$, ta được $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0$. Cho $n \to \infty$ trong (3.7) ta được

$$\lim_{n\to\infty} D_f(x_{n+1}, z_n) = 0. \quad (3.9)$$

Theo Bước 2, ta có $D_f(x, z_n) \le D_f(x, x_n) + \gamma_n$. Kết hợp điều này với dãy $\{D_f(x, x_n)\}$ bị chặn, ta suy ra dãy $\{D_f(x, z_n)\}$ bị chặn. Theo Mệnh đề 1.12(2), ta được dãy $\{z_n\}$ bị chặn. Do đó, sử dụng Mệnh đề 2.10, từ (3.9), ta có $\lim_{n\to\infty} \| x_{n+1} - z_n \| = 0$. Ta lại có

$$\| x_n - z_n \| \le \| x_n - x_{n+1} \| + \| x_{n+1} - z_n \|. \quad (3.10)$$

Lấy giới hạn trong (3.10) và sử dụng (3.6), ta được

$$\lim_{n\to\infty} \| x_n - z_n \| = 0. \quad (3.11)$$

Vì $f$ là hàm khả vi Frechet đều nên $f$ liên tục đều trên tập con bị chặn của $E$. Hơn nữa, theo Mệnh đề 2.1, ta có $\nabla f$ liên tục đều trên tập con bị chặn của $E$. Do đó, từ (3.11), ta được

$$\lim_{n\to\infty} \| f(x_n) - f(z_n) \| = 0. \quad (3.12)$$

và

$$\lim_{n\to\infty} \| \nabla f(x_n) - \nabla f(z_n) \| = 0. \quad (3.13)$$

Tương tự (3.2), ta có

$$D_f(x, z_n) \le a_n D_f(x, y_n) + (1 - a_n)[D_f(x, x_n)$$

$$+ \alpha_n \varphi(D_f(x, x_n)) + \beta_n]. \quad (3.14)$$

Vì $\{x_n\}$ bị chặn và $\nabla f$ liên tục đều nên $\{\nabla f(x_n)\}$ bị chặn. Kết hợp điều này với (3.13), ta suy ra $\{\nabla f(z_n)\}$ bị chặn. Tiếp theo, kết hợp bất đẳng thức

$$D_f(x, T_1^n x_n) \le D_f(x, x_n) + \alpha_n \varphi(D(x, x_n)) + \beta_n$$

với $\{D_f(p, x_n)\}, \{\alpha_n\}$ và $\{\beta_n\}$ là các dãy bị chặn, ta suy ra dãy $\{D_f(x, T_1^n x_n)\}$ bị chặn. Theo Mệnh đề 2.12(2), ta được $\{T_1^n x_n\}$ bị chặn.Từ đó, ta suy ra $\{\nabla f(T_1^n x_n)\}$ bị chặn. Do đó tồn tại $r > 0$ sao cho $\{\nabla f(x_n)\} \subset B_r$ và $\{\nabla f(T_1^n x_n)\} \subset B_r$. Khi đó, sử dụng Bổ đề 3.1, ta có

$$\begin{aligned} D_f(x, y_n) &= D_f(x, \nabla f^*[(1-b_n)\nabla f(x_n) + b_n \nabla f(T_1^n x_n)]) \\ &\le (1-b_n) D_f(x, x_n) + b_n D_f(x, T_1^n x_n) \\ &\quad - b_n(1-b_n)\rho_r^*(\|\nabla f(x_n) - \nabla f(T_1^n x_n)\|) \\ &\le (1-b_n) D_f(x, x_n) + b_n [D_f(x, x_n) \\ &\qquad + \alpha_n \varphi(D_f(x, x_n)) + \beta_n] \\ &\quad - b_n(1-b_n)\rho_r^*(\|\nabla f(x_n) - \nabla f(T_1^n x_n)\|) \\ &\le D_f(x, x_n) + \alpha_n \varphi(D_f(x, x_n)) + \beta_n \\ &\quad - b_n(1-b_n)\rho_r^*(\|\nabla f(x_n) - \nabla f(T_1^n x_n)\|). \quad (3.15) \end{aligned}$$

Thay (3.15) vào (3.14) ta được

$$\begin{aligned} D_f(x, z_n) &\le a_n [D_f(x, x_n) + \alpha_n \varphi(D_f(x, x_n)) \\ &\quad + \beta_n - b_n(1-b_n)\rho_r^*(\|\nabla f(x_n) - \nabla f(T_1^n x_n)\|)] \\ &\quad + (1-a_n)[D_f(x, x_n) + \alpha_n \varphi(D_f(x, x_n)) + \beta_n] \\ &\le D_f(x, x_n) + \gamma_n \\ &\quad - a_n b_n (1-b_n)\rho_r^*(\|\nabla f(x_n) - \nabla f(T_1^n x_n)\|). \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} & a_n b_n (1-b_n)\rho_r^*(\|\nabla f(x_n) - \nabla f(T_1^n x_n)\|) \\ &\qquad \le D_f(x, x_n) - D_f(x, z_n) + \gamma_n. \quad (3.16) \end{aligned}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} & |D_f(x, x_n) - D_f(x, z_n)| \\ &= |-D_f(x_n, z_n) + \langle \nabla f(z_n) - \nabla f(x_n), x - z_n \rangle| \\ &\le |D_f(x_n, z_n)| + |\langle \nabla f(z_n) - \nabla f(x_n), x - z_n \rangle| \\ &= |f(x_n) - f(z_n) - \langle \nabla f(z_n), x_n - z_n \rangle| \\ &\quad + |\langle \nabla f(z_n) - \nabla f(x_n), x - z_n \rangle| \\ &\le \| f(x_n) - f(z_n) \| + \| \langle \nabla f(z_n), x_n - z_n \rangle \| \\ &\quad + \| x - x_n \| . \| \nabla f(z_n) - \nabla f(x_n) \| \\ &\le \| f(x_n) - f(z_n) \| + \| \nabla f(z_n) \| . \| x_n - z_n \| \\ &\quad + \| x - x_n \| . \| \nabla f(z_n) - \nabla f(x_n) \| . \quad (3.17) \end{aligned}$$

Trong (3.17) cho $n \to \infty$, sử dụng (3.11), (3.12), (3.18), tính bị chặn của tập $\mathcal{F}$, dãy $\{x_n\}$, $\{\nabla f(x_n)\}$ và $\{\nabla f(z_n)\}$, ta được

$$\lim_{n\to\infty} |D_f(x, x_n) - D_f(x, z_n)| = 0$$

hay $\lim_{n\to\infty} D_f(x, x_n) - D_f(x, z_n) = 0. \quad (3.18)$

Lấy giới hạn trong (3.14) và sử dụng (3.18), $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0$, $\liminf_{n\to\infty} a_n b_n (1-b_n) > 0$, ta được $\lim_{n\to\infty} \rho_r^*(\|\nabla f(x_n) - \nabla f(T_1^n x_n)\|) = 0$. Từ tính chất của $\rho_r^*$, ta suy ra

$$\lim_{n\to\infty} \| \nabla f(x_n) - \nabla f(T_1^n x_n) \| = 0. \quad (3.19)$$

Vì $x_n \to p$ khi $n \to \infty$ và $\nabla f$ liên tục đều trên mỗi tập con bị chặn nên

$$\lim_{n\to\infty} \| \nabla f(x_n) - \nabla f(p) \| = 0. \quad (3.20)$$

Ta có

$$\begin{aligned} \| \nabla f(T_1^n x_n) - \nabla f(p) \| &\le \| \nabla f(p) - \nabla f(x_n) \| \\ &\quad + \| \nabla f(x_n) - \nabla f(T_1^n x_n) \| . \quad (3.21) \end{aligned}$$

Lấy giới hạn trong (3.21) và sử dụng (3.19), (3.20) ta được

$$\lim_{n\to\infty} \| \nabla f(T_1^n x_n) - \nabla f(p) \| = 0.$$

Lưu ý rằng theo Mệnh đề 1.16, ta có $\nabla f = (\nabla f^*)^{-1}$ và $\nabla f^*$ liên tục đều trên mỗi tập con bị chặn. Do đó, từ đẳng thức trên ta được

$$\lim_{n\to\infty} \| T_1^n x_n - p \| = 0. \quad (3.22)$$

Lập luận tương tự như trên, từ (3.19) ta được $\lim_{n\to\infty} \| T_1^n x_n - x_n \| = 0.$ Ta lại có

$$\| T_1^{n+1} x_n - p \| \le \| T_1^{n+1} x_n - T_1^n x_n \| + \| T_1^n x_n - p \| . \quad (3.23)$$

Vì $T_1$ chính qui tiệm cận đều trên $C$ nên

$$\limsup_{n\to\infty} \| T_1^{n+1} x_n - T_1^n x_n \| = 0. \quad (3.24)$$

Trong (3.23) cho $n \to \infty$ và sử dụng (3.21), (3.24) ta được $\lim_{n\to\infty} \| T_1^{n+1} x_n - p \| = 0.$ Do đó, $\lim_{n\to\infty} T_1(T_1^n x_n) = p.$ Kết hợp điều này với (3.22) và tính đóng của $T_1$, ta được $T_1 p = p$ hay

$$p \in F(T_1). \qquad (3.25)$$

Tiếp theo, với $x \in \mathcal{F}$, tương tự với chứng minh (3.1), ta có

$$D_f(x, y_n) \le D_f(x, x_n) + \alpha_n \varphi(D_f(x, x_n)) + \beta_n. \qquad (3.26)$$

Do $\{D_f(x, x_n)\}, \{\alpha_n\}$ và $\{\beta_n\}$ là dãy bị chặn nên từ (3.26), ta có $\{D_f(x, y_n)\}$ là dãy bị chặn. Theo Mệnh đề 1.12(2), ta suy ra $\{y_n\}$ bị chặn. Vì $\{y_n\}$ bị chặn và $\nabla f$ liên tục đều nên $\{\nabla f(y_n)\}$ bị chặn. Tiếp theo, kết hợp bất đẳng thức

$$D_f(x, T_2^n x_n) \le D_f(x, x_n) + \alpha_n \varphi(D(x, x_n)) + \beta_n$$

với $\{D_f(x, x_n)\}, \{\alpha_n\}$ và $\{\beta_n\}$ là các dãy bị chặn, ta có $\{D_f(x, T_2^n x_n)\}$ bị chặn. Theo Mệnh đề 2.12(2), ta được $\{T_2^n x_n\}$ bị chặn. Điều này dẫn đến $\{\nabla f(T_2^n x_n)\}$ bị chặn. Do đó tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho

$$\{\nabla f(y_n)\} \subset B_\varepsilon \text{ và } \{\nabla f(T_2^n x_n)\} \subset B_\varepsilon.$$

Khi đó, sử dụng Bổ đề 3.1, ta được

$$\begin{aligned} D_f(x, z_n) &= D_f(x, \nabla f^*[(1-a_n)\nabla f(T_2^n x_n) + a_n \nabla f(y_n)]) \\ &\le a_n D_f(x, y_n) + (1-a_n) D_f(x, T_2^n x_n) \\ &\le a_n D_f(x, y_n) + (1-a_n)[D_f(x, x_n) \\ &\quad + \alpha_n \varphi(D_f(x, x_n)) + \beta_n] \\ &\quad - a_n(1-a_n)\rho_\varepsilon^*(\| \nabla f(T_2^n x_n) - \nabla f(y_n) \|). \qquad (3.27) \end{aligned}$$

Khi đó, thay (3.26) vào (3.27), ta được

$$\begin{aligned} D_f(x, z_n) &\le D_f(x, x_n) + \alpha_n \varphi(D_f(x, x_n)) + \beta_n \\ &\quad - a_n(1-a_n)\rho_\varepsilon^*(\| \nabla f(T_2^n x_n) - \nabla f(y_n) \|) \\ &\le D_f(x, x_n) + \gamma_n \\ &\quad - a_n(1-a_n)\rho_\varepsilon^*(\| \nabla f(T_2^n x_n) - \nabla f(y_n) \|). \end{aligned}$$

Điều này dẫn đến

$$\begin{aligned} &a_n(1-a_n)\rho_\varepsilon^*(\| \nabla f(T_2^n x_n) - \nabla f(y_n) \|) \\ &\le D_f(x, x_n) - D_f(x, z_n) + \gamma_n. \qquad (3.28) \end{aligned}$$

Lấy giới hạn trong (3.28) và sử dụng (3.18), $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0$ ta được

$$\lim_{n\to\infty} a_n(1-a_n)\rho_\varepsilon^*(\| \nabla f(T_2^n x_n) - \nabla f(y_n) \|) = 0. \qquad (3.29)$$

Trong (3.29) cho $n \to \infty$ và sử dụng

$$\liminf_{n\to\infty} a_n(1-a_n) > 0,$$

kết hợp tính chất của $\rho_\varepsilon^*$, ta được

$$\lim_{n\to\infty} \| \nabla f(T_2^n x_n) - \nabla f(y_n) \| = 0. \qquad (3.30)$$

Tiếp theo, kết hợp $f$ liên tục đều trên tập con bị chặn của $E$ và $\lim_{n\to\infty} \| x_n - p \| = 0,$ ta được $\lim_{n\to\infty} \| f(x_n) - f(p) \| = 0.$ Ta lại có

$$\begin{aligned} |D_f(p, x_n)| &= | f(p) - f(x_n) - \langle \nabla f(x_n), p - x_n \rangle | \\ &\le | f(p) - f(x_n) | \\ &\quad + \| \nabla f(x_n) \| . \| p - x_n \| . \qquad (3.31) \end{aligned}$$

Lấy giới hạn trong (3.31), sử dụng $\lim_{n\to\infty} \| x_n - p \| = 0$ và $\lim_{n\to\infty} \| f(x_n) - f(p) \| = 0,$ ta được $\lim_{n\to\infty} |D_f(p, x_n)| = 0$ hay

$$\lim_{n\to\infty} D_f(p, x_n) = 0. \qquad (3.32)$$

Vì $p \in F(T_1)$ nên tương tự với chứng minh (3.1), ta có $D_f(p, y_n) \le D_f(p, x_n) + \alpha_n \varphi(D_f(p, x_n)) + \beta_n.$ Lấy giới hạn trong bất đẳng thức trên, sử dụng $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \beta_n = 0$ và (3.32) ta được $\lim_{n\to\infty} D_f(p, y_n) = 0.$ Theo Mệnh đề 2.8, ta có

$$\lim_{n\to\infty} \| y_n - p \| = 0. \qquad (3.33)$$

Khi đó, kết hợp (3.33) với $\nabla f$ liên tục đều, ta được

$$\lim_{n\to\infty} \| \nabla f(y_n) - \nabla f(p) \| = 0. \qquad (3.34)$$

Hơn nữa, ta có

$$\begin{aligned} \| \nabla f(T_2^n x_n) - \nabla f(p) \| &\le \| \nabla f(T_2^n x_n) - \nabla f(y_n) \| \\ &\quad + \| \nabla f(y_n) - \nabla f(p) \| . \qquad (3.35) \end{aligned}$$

Lấy giới hạn trong (3.35) và sử dụng (3.30), (3.34) ta được $\lim_{n\to\infty} \| \nabla f(T_2^n x_n) - \nabla f(p) \| = 0.$ Kết hợp điều này với $\nabla f = (\nabla f^*)^{-1}$ và $\nabla f^*$ liên tục đều trên mỗi tập con bị chặn, ta có

$$\lim_{n\to\infty}\| T_2^n x_n - p\| = 0. \quad (3.36)$$

Ta lại có

$$\| T_2^{n+1} x_n - p\| \le \| T_2^{n+1} x_n - T_2^n x_n\| + \| T_2^n x_n - p\|. \quad (3.37)$$

Vì $T_2$ tiệm cận chính qui đều trên $C$ nên

$$\lim_{n\to\infty}\| T_2^{n+1} x_n - T_2^n x_n\| = 0. \quad (3.38)$$

Lấy giới hạn trong (3.37) và sử dụng (3.36), (3.38) ta được $\lim_{n\to\infty}\| T_2^{n+1} x_n - p\| = 0$ hay $\lim_{n\to\infty} T_2(T_2^n x_n) = p$. Kết hợp điều này với (3.36) và tính đóng của $T_2$, ta được $T_2 p = p$ hay $p \in F(T_2)$. Kết hợp điều này với (3.25), ta được $p \in F(T_1) \cap F(T_2)$ hay $p \in \mathcal{F}$.

Bước 6: *Chứng minh* $p = P_{\mathcal{F}}(x_1)$. Thật vậy, vì $x_n = P_{C_n}(x_1)$ nên theo Mệnh đề 1.10, ta có

$$\langle \nabla f(x_1) - \nabla f(x_n), x_n - y\rangle \ge 0 \quad (3.39)$$

với mọi $y \in C_n$. Lấy $w \in \mathcal{F}$. Vì $\mathcal{F} \subset C_n$ nên $w \in C_n$. Khi đó, chọn $y = w$ trong (3.39), ta được

$$\langle \nabla f(x_1) - \nabla f(x_n), x_n - w\rangle \ge 0 \quad (3.40)$$

với mọi $w \in \mathcal{F}$. Lấy giới hạn trong (3.40) và sử dụng $\lim_{n\to\infty} x_n = p$ ta có

$$\langle \nabla f(x_1) - \nabla f(p), p - w\rangle \ge 0.$$

Do đó, theo Mệnh đề 2.11, ta được $p = P_{\mathcal{F}}(x_1)$. □

**Hệ quả 3.4.** Theo Nhận xét 2.20, mỗi ánh xạ tựa tiệm cận không giãn Bregman là ánh xạ tựa tiệm cận không giãn hoàn toàn Bregman. Do đó, từ Định lí 3.3 ta nhận được kết quả hội tụ của dãy lặp (3.41) đến điểm bất động chung của hai ánh xạ tựa tiệm cận không giãn Bregman.

$$\begin{cases} x_1 \in C, C_1 = C \\ y_n = \nabla f^*[(1-b_n)\nabla f(x_n) + b_n \nabla f(T_1 x_n)] \\ z_n = \nabla f^*[(1-a_n)\nabla f(T_2 x_n) + a_n \nabla f(y_n)] \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : D_f(z, z_n) \le D_f(z, x_n)\} \\ x_{n+1} = P^f_{C_{n+1}}(x_1). \end{cases} \quad (3.41)$$

**Hệ quả 3.5.** Xét $E$ là không gian Banach trơn và phản xạ, $f(x) = \| x\|^2$ với $x \in E$. Theo Nhận xét 2.7, dãy lặp $\{x_n\}$ trong Định lí 3.3 trở thành

$$\begin{cases} x_1 \in C, C_1 = C \\ y_n = J^{-1}[(1-b_n)J(x_n) + b_n J(T_1^n x_n)] \\ z_n = J^{-1}[(1-a_n)J(T_2^n x_n) + a_n J(y_n)] \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : \phi(z, z_n) \le \phi(z, x_n) + \gamma_n\} \\ x_{n+1} = \prod_{C_{n+1}}(x_1), \end{cases} \quad (3.42)$$

với $\gamma_n = \alpha_n \sup_{p\in\mathcal{F}} \varphi(\phi(p, x_n)) + \beta_n$ và dãy lặp (3.41) trở thành

$$\begin{cases} x_1 \in C, C_1 = C \\ y_n = J^{-1}[(1-b_n)J(x_n) + b_n J(T_1 x_n)] \\ z_n = J^{-1}[(1-a_n)J(T_2 x_n) + a_n J(y_n)] \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : \phi(z, z_n) \le \phi(z, x_n)\} \\ x_{n+1} = \prod_{C_{n+1}}(x_1). \end{cases} \quad (3.43)$$

Đồng thời, ánh xạ tựa tiệm cận không giãn hoàn toàn Bregman trở thành ánh xạ tựa $\phi$-tiệm cận không giãn hoàn toàn; ánh xạ tựa tiệm cận không giãn Bregman trở thành ánh xạ tựa $\phi$-tiệm cận không giãn. Do đó, kết luận của Định lí 3.3 đúng cho dãy lặp (3.42) với $T_1, T_2$ là hai ánh xạ tựa $\phi$-tiệm cận không giãn hoàn toàn; kết luận của Hệ quả 3.4 đúng cho dãy lặp (3.43) với $T_1, T_2$ là hai ánh xạ tựa $\phi$-không giãn tiệm cận.

Ví dụ sau minh họa cho sự hội tụ của dãy lặp trong Định lí 3.3.

**Ví dụ 3.6.** Xét $E = \mathbb{R}$, $C = [0, 0.9]$ và ánh xạ $f(x) = x^2$ với $x \in \mathbb{R}$. Khi đó, $\nabla f(x) = 2x$ và

$$f^*(z) = \sup\{\langle z, x\rangle - f(x) : x \in \mathbb{R}\}$$
$$= \sup\{zx - x^2 : x \in \mathbb{R}\} = \frac{z^2}{4},$$

$\nabla f^*(z) = \frac{z}{2}$. Do đó, với $x, y \in \mathbb{R}$, ta có

$$D_f(x, y) = f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y\rangle$$
$$= x^2 - y^2 - \langle 2y, x - y\rangle$$
$$= x^2 - y^2 - 2yx + 2y^2 = (x - y)^2.$$

Xét ánh xạ $T_1, T_2 : C \to C$ xác định bởi $T_1 x = x^2$ và $T_2 x = x^3$ với $x \in C$. Khi đó,

$F(T_1) = F(T_2) = \{0\}$ và

$\mathcal{F} = F(T_1) \cap F(T_2) = \{0\}.$

Hơn nữa, với $x \in C,$ ta có $(x^{2^n})^2 \le x^2.$ Điều này dẫn đến

$$D_f(p, T_1^n x) = D_f(0, T_1^n x) = (x^{2^n})^2 \le x^2 = D_f(0, x)$$
$$= D_f(p, x) + \alpha_n \varphi(D_f(p, x)) + \beta_n$$

với $\alpha_n = \beta_n = 0.$ Do đó, $T_1$ là ánh xạ tựa tiệm cận không giãn hoàn toàn Bregman. Tương tự, $T_2$ là ánh xạ tựa tiệm cận không giãn hoàn toàn Bregman. Như vậy, các giả thiết của Định lí 3.3 được thỏa mãn. Do đó, dãy lặp $\{x_n\}$ trong Định lí 3.3 có dạng dãy (3.44) hội tụ đến $0 = P_{\mathcal{F}}(x_1)$ với $x_1 = 0,5.$

$$\begin{cases} y_n = (1-b_n)x_n + b_n(x_n)^{2^n} \\ z_n = (1-a_n)(x_n)^{3^n} + a_n y_n \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n + z_n}{2}. \end{cases} \quad (3.44)$$

Tiếp theo, chúng tôi minh họa dáng điệu hội tụ của dãy lặp (3.44) trong một số trường hợp cụ thể của hai dãy tham số $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$. Kí hiệu $m$ là số bước lặp mà dãy $\{x_n\}$ xấp xỉ 0 với sai số $10^{-16}$. Bằng tính toán trên phần mềm Sci-lab 6.0 ta được kết quả sau:

***Trường hợp 1:*** $a_n = \dfrac{98n+1}{100n}$ và một số trường hợp $b_n \in (0,1)$ như sau:

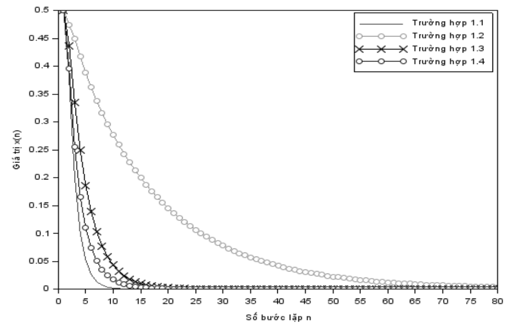
*Trường hợp 1.1:* $b_n = \dfrac{98n+1}{100n},$ tính được $m = 56.$

*Trường hợp 1.2:* $b_n = \dfrac{n+1}{10n},$ tính được $m = 590.$

*Trường hợp 1.3:* $b_n = \dfrac{1}{2},$ tính được $m = 125.$

*Trường hợp 1.4:* $b_n = \dfrac{n+4}{2n+4},$ tính được $m = 116.$

Dáng điệu hội tụ của 4 dãy lặp trong trường hợp 1 được thể hiện như sau:




**Hình 1. Dáng điệu hội tụ của 4 dãy lặp trong trường hợp 1**

***Trường hợp 2:*** $a_n = \dfrac{n+1}{100n}$ và một số trường hợp $b_n \in (0,1)$ như sau:

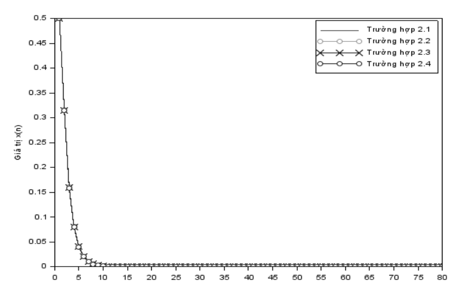
*Trường hợp 2.1:* $b_n = \dfrac{98n+1}{100n},$ tính được $m = 54.$

*Trường hợp 2.2:* $b_n = \dfrac{n+1}{10n},$ tính được $m = 55.$

*Trường hợp 2.3:* $b_n = \dfrac{1}{2},$ tính được $m = 54.$

*Trường hợp 2.4:* $b_n = \dfrac{n+4}{2n+4},$ tính được $m = 54.$

Dáng điệu hội tụ của 4 dãy lặp trong trường hợp 2 được thể hiện như sau:




**Hình 2. Dáng điệu hội tụ của 4 dãy lặp trong trường hợp 2**

***Trường hợp 3:*** $a_n = \dfrac{n+1}{3n+12}$ và một số trường hợp $b_n \in (0,1)$ như sau:

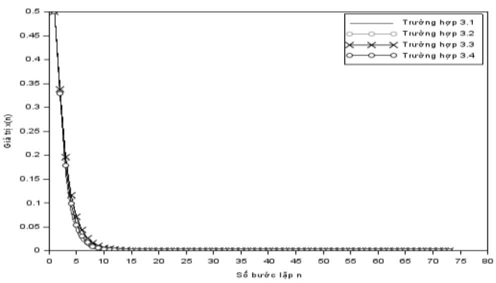
*Trường hợp 3.1:* $b_n = \dfrac{98n+1}{100n},$ tính được $m = 54.$

*Trường hợp 3.2:* $b_n = \dfrac{n+1}{3n+12},$ tính được $m = 73.$

*Trường hợp 3.3:* $b_n = \dfrac{n+1}{100n}$, tính được $m = 85$.

*Trường hợp 3.4:* $b_n = \dfrac{1}{2}$, tính được $m = 67$.

Dáng điệu hội tụ của 4 dãy lặp trong trường hợp 3 được thể hiện như sau:




**Hình 3. Dáng điệu hội tụ của 4 dãy lặp trong trường hợp 3**

*Trường hợp 4:* $a_n = \dfrac{2n+5}{3n+12}$ và một số trường hợp $b_n \in (0,1)$ như sau:

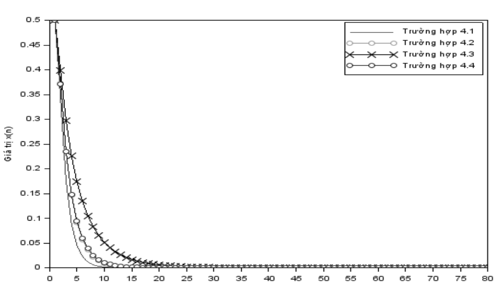
*Trường hợp 4.1:* $b_n = \dfrac{98n+1}{100n}$, tính được $m = 55$.

*Trường hợp 4.2:* $b_n = \dfrac{2n+5}{3n+12}$, tính được $m = 76$.

*Trường hợp 4.3:* $b_n = \dfrac{n+1}{100n}$, tính được $m = 183$.

*Trường hợp 4.4:* $b_n = \dfrac{1}{2}$, tính được $m = 88$.

Dáng điệu hội tụ của 4 dãy lặp trong trường hợp 4 được thể hiện như sau:




**Hình 4. Dáng điệu hội tụ của 4 dãy lặp trong trường hợp 4**

*Trường hợp 5:* $a_n = \dfrac{1}{2}$ và một số trường hợp $b_n \in (0,1)$ như sau:

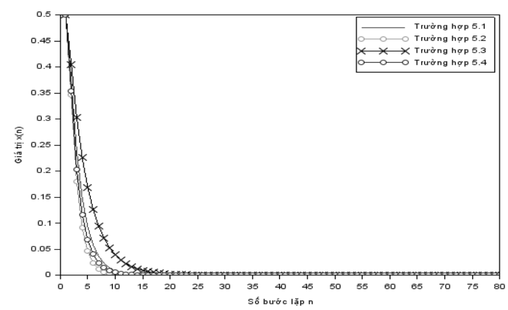
*Trường hợp 5.1:* $b_n = \dfrac{1}{2}$, tính được $m = 79$.

*Trường hợp 5.2:* $b_n = \dfrac{98n+1}{100n}$, tính được $m = 55$.

*Trường hợp 5.3:* $b_n = \dfrac{n+1}{100n}$, tính được $m = 126$.

*Trường hợp 5.4:* $b_n = \dfrac{n+4}{2n+4}$, tính được $m = 86$.

Dáng điệu hội tụ của 4 dãy lặp trong trường hợp 5 được thể hiện như sau:




**Hình 5. Dáng điệu hội tụ của 4 dãy lặp trong trường hợp 5**

Từ 5 trường hợp trên, ta thấy tốc độ hội tụ của dãy lặp dạng (3.44) đến điểm bất động chung 0 phụ thuộc vào việc chọn dãy $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$. Hơn nữa, trong trường hợp 1, với dãy $\{a_n\}$ lớn (gần 1) và trong một số trường hợp của dãy $\{b_n\} \subset (0,1)$, tốc độ hội tụ của dãy (3.44) chậm hơn trong các trường hợp còn lại; còn trong trường hợp 2, với dãy $\{a_n\}$ nhỏ (gần 0) và trong một số trường hợp của dãy $\{b_n\} \subset (0,1)$, tốc độ hội tụ của dãy (3.44) nhanh hơn trong các trường hợp còn lại.

**Lời cảm ơn:** Bài báo này được hỗ trợ bởi Trường Đại học Đồng Tháp với Đề tài nghiên cứu khoa học của sinh viên mã số SPD2020.02.03.

**Tài liệu tham khảo**

Ambrosetti, A., & Prodi, G. (1993). *A Primer of Nonlinear Analysis*. Cambridge: Cambridge University Press.

Butnariu, D., & Iusem, A. N. (2000). *Totally Convex Functions For Fixed Points*

*Computation And Infinite Dimensional Optimization*,*Applied Optimization*, *Vol. 40*. Dordrecht: Kluwer Academic.

Butnariu, D., & Resmerita, E. (2006). Bregman distances, totally convex functions and a method for solving operator equations in Banach spaces. *Abstr. Appl. Anal.*, *2006*, 1-39.

Censor, Y., & Lent, A. (1981). An iterative row-action method for interval convex programming. *J. Optim. Theory Appl*., *34*, 321-353.

Chang, S. S., Wang, L., Wang, X. R., & Chan, C. K. (2014). Strong convergence theorems for Bregman totally quasi-asymptotically nonexpansive mappings in reflexive Banach spaces. *Appl. Math. Comput., 228*, 38-48.

Kohsaka, F., & Takahashi, W. (2005). Proximal point algorithms with Bregman functions in Banach spaces. *J. Nonlinear Convex Anal.*, *6(3)*, 505-523.

Kumam, W., Witthayarat, U., Kumam, P., Suantai, S., & Wattanawitoon, K. (2016). Convergence theorem for equilibrium problem and Bregman strongly nonexpansive mappings in Banach spaces. *Optimization*, *65(2)*, 265-280.

Naraghirad, X., & Yao, J. C. (2013). Bregman weak relatively nonexpansive mappings in Banach spaces, *Fixed Point Theory Appl.*, *2013(141)*, 1-43.

Ni, R., & Wen, C. (2018). Hybrid projection methods for Bregman totally quasi-D asymptotically nonexpansive mappings. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, *41*, 807-836.

Reich, S., & S. Sabach, S. (2010). Two strong convergence theorems for a proximal method in reflexive Banach spaces. *Numer. Funct. Anal. Optim.*, *31*, 22-44.

Reich, S., & Sabach, S. (2009). A strong convergence theorem for a proximal-type algorithm in reflexive Banach spaces. *J. Nonlinear Convex Anal.*,*10*, 471-485.

Resmerita, E. (2004). On total convexity, Bregman projections and stability in Banach spaces, *J. Nonlinear Convex Anal.*, *11*, 1-16.

Sabach, S. (2011). Products of finitely many resolvents of maximal monotone mappings in reflexive Banach spaces. *SIAM J. Optim.*, *21*, 1289-1308.

Zalinescu, Z.(2002). *Convex Analysis In General Vector Spaces*. River Xdge: World Scientific.

Zhu, S., & Huang, J. H. (2016). Strong convergence theorems for equilibrium problem and Bregman totally quasi-asymptotically nonexpansivemapping in Banach spaces. *Acta Math. Sci. Ser. B. 36B(5)*,1433-1444.