VỀ ĐỊNH LÍ ĐIỂM BẤT ĐỘNG CHO LỚP ÁNH XẠ *C*-CO YẾU TRONG KHÔNG GIAN *S*-MÊTRIC SẮP THỨ TỰ

• ThS. Nguyễn Trung Hiếu (*), SV. Nguyễn Thị Vui (*)

Tóm tắt

Trong bài báo này, chúng tôi mở rộng các định lí điểm bất động của lớp ánh xạ C-co yếu trên không gian mêtric sắp thứ tự trong bài báo [4] sang không gian S-mêtric sắp thứ tự. Đồng thời, chúng tôi xây dựng ví dụ minh họa cho kết quả đạt được.

*Từ khóa: điểm bất động, ánh xạ C-*co *yếu, không gian S-mêtric thứ tự.*

1. Giới thiệu

Các định lí điểm bất động có vai trò quan trọng trong việc khảo sát sự tồn tại nghiệm của các bài toán liên quan đến phương trình vi phân, phương trình tích phân và phương trình đạo hàm riêng. Trong các định lí điểm bất động, nguyên lí ánh xạ co Banach trong không gian mêtric đầy đủ được xem là định lí cơ bản nhất. Từ nguyên lí này, nhiều tác giả đã mở rộng sang các không gian khác nhau cũng như các lớp ánh xạ khác nhau. Trong hướng nghiên cứu này, một số tác giả đã xây dựng những không gian mêtric suy rộng và thiết lập những định lí điểm bất động trên các không gian mêtric suy rộng này.

Gần đây, trong bài báo [7], S. Sedghi, N. Shobe và A. Aliouche đã giới thiệu một khái niệm mêtric suy rộng là *S*-mêtric. Đồng thời, các tác giả đã mở rộng nguyên lí ánh xạ co Banach trong không gian mêtric đầy đủ sang không gian *S*-mêtric, xem [7, Theorem 3.1]. Từ đó việc mở rộng các định lí điểm bất động trong không gian mêtric sang không gian *S*-mêtric được một số tác giả quan tâm nghiên cứu [1], [2], [3], [5], [6]. Khái niệm *S*-mêtric và các khái niệm liên quan được trình bày trong [7] như sau.

Định nghĩa 1.1 ([7], Definition 2.1)**.** Cho X là một tập khác rỗng. Một *S-mêtric* trên X là ánh xạ $S: X\times X\times X \to [0,\infty)$ thỏa mãn các điều kiện sau với mọi $x,y,z,a\in X$.

(i) $S(x,y,z)=0$ nếu và chỉ nếu $x=y=z$;

(ii) $S(x,y,z)\le S(x,x,a)+S(y,y,a)+S(z,z,a)$.

Cặp (X,S) được gọi là *không gian S-mêtric.*

Mệnh đề 1.2 ([7], Lemma 2.5)**.** *Cho* (X,S) *là một không gian S-mêtric. Khi đó*

$$S(x,x,y)=S(y,y,x) \text{ với mọi } x,y\in X.$$

Mệnh đề 1.3 ([3], Lemma 1.4)**.** *Cho* (X,S) *là một không gian S-mêtric. Khi đó*

(*) Khoa Sư phạm Toán - Tin, Trường Đại học Đồng Tháp.

$$S(x,x,z) \le 2S(x,x,y)+S(y,y,z),$$
$$S(x,x,z) \le 2S(x,x,y)+S(z,z,y)$$

với mọi $x,y,z \in X$.

Định nghĩa 1.4 ([7], Denifition 2.8). Cho (X,S) là một không gian *S*-mêtric. Khi đó

(i) Một dãy (x_n) trong X được gọi là *hội tụ về* x nếu và chỉ nếu $S(x_n,x_n,x) \to 0$ khi $n \to \infty$, nghĩa là với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $n \ge n_0$, $S(x_n,x_n,x) < \varepsilon$. Kí hiệu là $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

(ii) Một dãy (x_n) trong X được gọi là *dãy Cauchy* nếu với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $S(x_n,x_n,x_m) < \varepsilon$ với mọi n, $m \ge n_0$.

(iii) Không gian *S-mêtric* (X,S) được gọi là *đầy đủ* nếu mỗi dãy Cauchy trong (X,S) đều hội tụ.

Mệnh đề 1.5 ([7], Lemma 2.10). *Cho* (X,S) *là một không gian S-mêtric. Nếu dãy* (x_n) *trong* X *hội tụ thì giới hạn đó duy nhất.*

Mệnh đề 1.6 ([7], Lemma 2.11). *Cho* (X,S) *là một không gian S-mêtric. Nếu dãy* (x_n) *trong* X *hội tụ về* $x \in X$ *thì* (x_n) *là một dãy Cauchy.*

Mệnh đề 1.7 ([7], Lemma 2.12). *Cho* (X,S) *là một không gian S-mêtric. Nếu tồn tại dãy* (x_n) *và* (y_n) *sao cho* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *và* $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ *thì* $\lim_{n\to\infty} S(x_n,x_n,y_n) = S(x,x,y)$.

Trong bài báo [4], J. Harjani và các cộng sự đã giới thiệu khái niệm ánh xạ *C*-co yếu trong không gian mêtric sắp thứ tự. Khái niệm này là sự mở rộng của các dạng ánh xạ co suy rộng trong các tài liệu tham khảo của [4]. Đồng thời, trong bài báo này, các tác giả đã thiết lập định lí điểm bất động cho lớp ánh xạ *C*-co yếu trong không gian mêtric sắp thứ tự. Trong phần tiếp theo, chúng tôi giới thiệu lại kết quả này.

Kí hiệu Ψ là tập các hàm $\varphi : [0,\infty)^2 \to [0,\infty)$ thỏa mãn các điều kiện sau.

(i) φ là ánh xạ liên tục;

(ii) $\varphi(x,y) = 0$ khi và chỉ khi $x = y = 0$ với mọi $x, y \in X$.

Định nghĩa 1.8 ([4], Definition 2.1). Giả sử $(X,\le)$ là một tập sắp thứ tự và $T : X \to X$. Khi đó T được gọi là *ánh xạ đơn điệu không giảm* nếu với mọi $x, y \in X$, mà $x \le y$ ta có $Tx \le Ty$.

Định lí 1.9 ([4], Theorem 2.1)**.** *Cho* $(X,\leq,d)$ *là một không gian mêtric sắp thứ tự đầy đủ, ánh xạ* $\varphi\in\Psi$ *và* $T:X\to X$ *là một ánh xạ đơn điệu không giảm sao cho*

$$(i)\ d(Tx,Ty)\leq\frac{1}{2}(d(x,Ty)+d(y,Tx))-\varphi(d(x,Ty),d(y,Tx))\ \text{với}\ x\geq y; \qquad (1)$$

(ii) *Tồn tại* $x_0\in X$ *sao cho* $x_0\leq Tx_0$;

(iii) T *là ánh xạ liên tục.*

Khi đó, T *có điểm bất động.*

Trên cơ sở nghiên cứu các tài liệu tham khảo có liên quan, chúng tôi nhận thấy rằng các định lí điểm bất động cho lớp ánh xạ *C*-co yếu chưa được khảo sát trên không gian *S*-mêtric sắp thứ tự. Do đó, trong bài báo này, chúng tôi đặt vấn đề mở rộng các định lí điểm bất động của lớp ánh xạ *C*-co yếu trên không gian mêtric sắp thứ tự trong bài báo [4] sang không gian *S*-mêtric sắp thứ tự. Đồng thời, chúng tôi xây dựng ví dụ minh họa cho kết quả đạt được.

2. Các kết quả chính

Trước hết, chúng tôi thiết lập và chứng minh định lí chính của bài báo.

Định lí 2.1. *Cho* $(X,\leq,S)$ *là một không gian S-mêtric sắp thứ tự đầy đủ, ánh xạ* $\varphi\in\Psi$ *và* $T:X\to X$ *là một ánh xạ đơn điệu không giảm sao cho*

$$(i)\ S(Tx,Tx,Ty)\leq\frac{1}{3}(S(x,x,Ty)+S(y,y,Tx))-\varphi(S(x,x,Ty),S(y,y,Tx))\ \text{với}\ x\geq y;$$

(ii) *Tồn tại* $x_0\in X$ *sao cho* $x_0\leq Tx_0$;

(iii) T *là ánh xạ liên tục.*

Khi đó, T *có điểm bất động.*

Chứng minh. Lấy $x_0\in X$ sao cho $x_0\leq Tx_0$. Do T là một ánh xạ không giảm nên bằng quy nạp ta chứng minh được

$$x_0\leq Tx_0\leq T^2x_0\leq\ldots\leq T^nx_0\leq T^{n+1}x_0\leq\ldots \qquad (2)$$

Đặt $x_{n+1}=Tx_n$. Khi đó, với mỗi số nguyên $n\geq 1$, từ (2) ta có

$$x_0\leq x_1\leq\ldots\leq x_n\leq x_{n+1}\leq\ldots \qquad (3)$$

Từ (1), (3) và Mệnh đề 1.3, ta có

$$\begin{aligned}S(x_{n+1},x_{n+1},x_n)&=S(Tx_n,Tx_n,Tx_{n-1})\\&\leq\frac{1}{3}(S(x_n,x_n,Tx_{n-1})+S(x_{n-1},x_{n-1},Tx_n))\\&\quad-\varphi(S(x_n,x_n,Tx_{n-1}),S(x_{n-1},x_{n-1},Tx_n))\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3}(S(x_n, x_n, x_n) + S(x_{n-1}, x_{n-1}, x_{n+1}))$$

$$-\varphi(S(x_n, x_n, x_n), S(x_{n-1}, x_{n-1}, x_{n+1}))$$

$$= \frac{1}{3} S(x_{n-1}, x_{n-1}, x_{n+1}) - \varphi(0, S(x_{n-1}, x_{n-1}, x_{n+1}))$$

$$\le \frac{1}{3} S(x_{n-1}, x_{n-1}, x_{n+1})$$

$$\le \frac{1}{3}(2S(x_{n-1}, x_{n-1}, x_n) + S(x_n, x_n, x_{n+1})). \tag{4}$$

Từ (4) và sử dụng Mệnh đề 1.2, ta được

$$3S(x_{n+1}, x_{n+1}, x_n) \le 2S(x_n, x_n, x_{n-1}) + S(x_{n+1}, x_{n+1}, x_n).$$

Do đó

$$S(x_{n+1}, x_{n+1}, x_n) \le S(x_n, x_n, x_{n-1}).$$

Suy ra $(S(x_{n+1}, x_{n+1}, x_n))$ là dãy số đơn điệu giảm và không âm. Khi đó, tồn tại $r \ge 0$ sao cho

$$\lim_{n\to\infty} S(x_{n+1}, x_{n+1}, x_n) = r. \tag{5}$$

Cho $n \to \infty$ trong (4) và sử dụng (5), ta được

$$r \le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} S(x_{n-1}, x_{n-1}, x_{n+1}) \le \frac{1}{3}(2r + r) = r.$$

Do đó $\lim_{n\to\infty} S(x_{n-1}, x_{n-1}, x_{n+1}) = 3r.$ (6)

Cho $n \to \infty$ trong (4), sử dụng (6) và tính chất của $\varphi,$ ta được

$$r \le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} S(x_{n-1}, x_{n-1}, x_{n+1}) - \lim_{n\to\infty} \varphi(0, S(x_{n-1}, x_{n-1}, x_{n+1})) = r - \varphi(0, 3r) \le r.$$

Từ đó $\varphi(0, 3r) = 0$ nên $r = 0.$ Vì vậy, ta có

$$\lim_{n\to\infty} S(x_{n+1}, x_{n+1}, x_n) = 0. \tag{7}$$

Trong phần tiếp theo, ta sẽ chứng minh (x_n) là dãy Cauchy trong X. Giả sử ngược lại, (x_n) không là dãy Cauchy trong X. Khi đó, tồn tại $\varepsilon > 0$ và chọn được hai dãy con $(x_{n(k)})$ và $(x_{m(k)})$ của (x_n) với $n(k) > m(k) > k$ thỏa mãn

$$S(x_{m(k)}, x_{m(k)}, x_{n(k)}) \ge \varepsilon \text{ với mỗi } k. \tag{8}$$

Với $m(k)$ ta có thể chọn $n(k)$ nhỏ nhất sao cho $n(k) \ge m(k) > k$ và thỏa (8). Khi đó

$$S(x_{n(k)-1}, x_{n(k)-1}, x_{m(k)}) < \varepsilon. \tag{9}$$

Sử dụng (8), (9) và Mệnh đề 1.3, ta được

$$\begin{aligned}\varepsilon &\le S(x_{n(k)}, x_{n(k)}, x_{m(k)})\\ &\le 2S(x_{n(k)}, x_{n(k)}, x_{n(k)-1}) + S(x_{n(k)-1}, x_{n(k)-1}, x_{m(k)})\\ &< 2S(x_{n(k)}, x_{n(k)}, x_{n(k)-1}) + \varepsilon. \end{aligned} \tag{10}$$

Cho $k \to \infty$ trong (10) và sử dụng (7), ta được

$$\lim_{k\to\infty} S(x_{n(k)}, x_{n(k)}, x_{m(k)}) = \lim_{k\to\infty} S(x_{n(k)-1}, x_{n(k)-1}, x_{m(k)}) = \varepsilon. \tag{11}$$

Sử dụng Mệnh đề 1.2 và Mệnh đề 1.3, ta có

$$\begin{aligned}S(x_{n(k)-1}, x_{n(k)-1}, x_{m(k)}) &\le 2S(x_{n(k)-1}, x_{n(k)-1}, x_{n(k)}) + S(x_{n(k)}, x_{n(k)}, x_{m(k)}) .\\ &= 2S(x_{n(k)-1}, x_{n(k)-1}, x_{n(k)}) + S(x_{m(k)}, x_{m(k)}, x_{n(k)})\\ &\le 2S(x_{n(k)-1}, x_{n(k)-1}, x_{n(k)}) + 2S(x_{m(k)}, x_{m(k)}, x_{m(k)-1})\\ &\quad + S(x_{m(k)-1}, x_{m(k)-1}, x_{n(k)})\\ &\le 2S(x_{n(k)-1}, x_{n(k)-1}, x_{n(k)}) + 2S(x_{m(k)}, x_{m(k)}, x_{m(k)-1}) \quad (12)\\ &\quad + 2S(x_{m(k)-1}, x_{m(k)-1}, x_{m(k)}) + S(x_{m(k)}, x_{m(k)}, x_{n(k)}).\end{aligned}$$

Cho $n \to \infty$ trong (12) và sử dụng (7), (11) ta được

$$\varepsilon \le \lim_{k\to\infty} S(x_{m(k)-1}, x_{m(k)-1}, x_{n(k)}) \le \lim_{k\to\infty} S(x_{m(k)}, x_{m(k)}, x_{n(k)}) = \lim_{k\to\infty} S(x_{n(k)}, x_{n(k)}, x_{m(k)}) = \varepsilon.$$

Do đó

$$\lim_{k\to\infty} S(x_{m(k)-1}, x_{m(k)-1}, x_{n(k)}) = \varepsilon. \tag{13}$$

Vì $x_{n(k)-1} \ge x_{m(k)-1}$ nên từ (1), ta có

$$\begin{aligned}\varepsilon \le S(x_{n(k)}, x_{n(k)}, x_{m(k)}) &= S(Tx_{n(k)-1}, Tx_{n(k)-1}, Tx_{m(k)-1})\\ &\le \frac{1}{3}(S(x_{n(k)-1}, x_{n(k)-1}, Tx_{m(k)-1}) + S(x_{m(k)-1}, x_{m(k)-1}, Tx_{n(k)-1}))\\ &\quad -\varphi(S(x_{n(k)-1}, x_{n(k)-1}, Tx_{m(k)-1}), S(x_{m(k)-1}, x_{m(k)-1}, Tx_{n(k)-1}))\\ &= \frac{1}{3}(S(x_{n(k)-1}, x_{n(k)-1}, x_{m(k)}) + S(x_{m(k)-1}, x_{m(k)-1}, x_{n(k)}))\end{aligned}$$

$$-\varphi(S(x_{n(k)-1},x_{n(k)-1},x_{m(k)}),S(x_{m(k)-1},x_{m(k)-1},x_{n(k)})).$$

Cho $k\to\infty$ trong đẳng thức cuối, sử dụng (11), (13) và tính chất của $\varphi,$ ta được

$$\varepsilon\le\frac{1}{3}(\varepsilon+\varepsilon)-\varphi(\varepsilon,\varepsilon)=\frac{2}{3}\varepsilon-\varphi(\varepsilon,\varepsilon)<\varepsilon.$$

Suy ra $\varphi(\varepsilon,\varepsilon)=0$ hay $\varepsilon=0.$ Điều này mâu thuẫn với giả thiết tồn tại $\varepsilon>0.$ Vậy (x_n) là dãy Cauchy trong $X.$ Vì X là không gian S-mêtric đầy đủ nên tồn tại $z\in X$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=z.$ Do T liên tục nên ta có

$$z=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}Tx_n=T(\lim_{n\to\infty}x_n)=Tz.$$

Điều này chứng tỏ z là một điểm bất động của $T.$ □

Trong phần tiếp theo, chúng tôi chứng minh rằng Định lí 2.1 vẫn còn đúng khi giả thiết liên tục của ánh xạ T được thay bởi một giả thiết khác.

Định lí 2.2. *Cho $(X,\le,S)$ là một không gian S-mêtric sắp thứ tự đầy đủ và $T:X\to X$ là một ánh xạ đơn điệu không giảm sao cho*

(i) $S(Tx,Tx,Ty)\le\frac{1}{3}(S(x,x,Ty)+S(y,y,Tx))-\varphi(S(x,x,Ty),S(y,y,Tx))$

với $x\ge y;$ (14)

(ii) Tồn tại $x_0\in X$ sao cho $x_0\le Tx_0;$

(iii) Nếu (x_n) là một dãy không giảm trong X sao cho $x_n\to x$ thì $x_n\le x$ với mọi $n\in\mathbb{N}.$

Khi đó, T có một điểm bất động.

Chứng minh. Lập luận như chứng minh trong Định lí 2.1, ta tìm được dãy (x_n) trong X và $x_n\to z.$ Ta chứng minh $Tz=z.$

Theo giả thiết (iii), ta suy ra $x_n\le z$ với mọi $n\in\mathbb{N}.$ Do đó, từ (14) ta được

$$\begin{aligned}S(Tz,Tz,x_{n+1})&=S(Tz,Tz,Tx_n)\\&\le\frac{1}{3}(S(z,z,Tx_n)+S(x_n,x_n,Tz))-\varphi(S(z,z,Tx_n),S(x_n,x_n,Tz))\\&=\frac{1}{3}(S(z,z,x_{n+1})+S(x_n,x_n,Tz))-\varphi(S(z,z,x_{n+1}),S(x_n,x_n,Tz)).\end{aligned}$$

Cho $n\to\infty$ và sử dụng tính chất của $\varphi,$ ta được

$$S(Tz,Tz,z)\le\frac{1}{3}(S(z,z,z)+S(z,z,Tz))-\varphi(S(z,z,z),S(z,z,Tz))$$

$$= \frac{1}{3}S(z,z,Tz) - \varphi(0, S(z,z,Tz))$$

$$\leq \frac{1}{3}S(z,z,Tz) = \frac{1}{3}S(Tz,Tz,z).$$

Suy ra $S(Tz,Tz,z) \leq 0$. Vậy T có điểm bất động là z. □

Định lí 2.3. *Giả sử*

(i) Các giả thiết trong Định lí 2.1 hoặc Định lí 2.2 được thoả mãn;

(ii) Với mỗi $x, y \in X$, *tồn tại* $z \in X$ *sao cho* z *so sánh được với* x, y.

Khi đó, T *có duy nhất một điểm bất động.*

Chứng minh. Theo chứng minh trong Định lí 2.1 và Định lí 2.2, ánh xạ T có điểm bất động. Giả sử y, z là hai điểm bất động của T. Khi đó, $Ty = y$ và $Tz = z$. Do T là ánh xạ không giảm nên bằng quy nạp ta chứng minh được $T^n y = y$ và $T^n z = z$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Theo giả thiết tồn tại $x \in X$ sao cho x so sánh được với y và z. Do T là ánh xạ không giảm nên bằng quy nạp ta chứng minh được $T^n x$ so sánh được với $T^n y$ và $T^n z$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Giả sử $T^n x$ so sánh được với $T^n z$. Khi đó

$$\begin{aligned}
S(z,z,T^n x) &= S(T^n z, T^n z, T^n x)\\
&= S(T(T^{n-1}z), T(T^{n-1}z), T(T^{n-1}x))\\
&\leq \frac{1}{3}(S(T^{n-1}z, T^{n-1}z, T^n x) + S(T^{n-1}x, T^{n-1}x, T^n z))\\
&\qquad -\varphi(S(T^{n-1}z, T^{n-1}z, T^n x), S(T^{n-1}x, T^{n-1}x, T^n z))\\
&= \frac{1}{3}(S(z,z,T^n x) + S(T^{n-1}x, T^{n-1}x, z))\\
&\qquad -\varphi(S(z,z,T^n x), S(T^{n-1}x, T^{n-1}x, z))\\
&\leq \frac{1}{3}(S(z,z,T^n x) + S(T^{n-1}x, T^{n-1}x, z)) \qquad (15)
\end{aligned}$$

Suy ra

$$3S(z,z,T^n x) \leq (S(z,z,T^n x) + S(T^{n-1}x, T^{n-1}x, z))$$

$$2S(z,z,T^n x) \leq S(T^{n-1}x, T^{n-1}x, z) = S(z,z,T^{n-1}x).$$

Điều này cho thấy $(S(z,z,T^n x))$ là dãy số đơn điệu giảm và không âm. Khi đó, tồn tại $r \geq 0$ sao cho

$$\lim_{n\to\infty} S(z,z,T^n x) = r.$$

Cho $n \to \infty$ trong (15) và sử dụng tính liên tục của φ, ta được

$$r \le \frac{1}{3}(r+r) - \varphi(r,r) = \frac{2}{3}r - \varphi(r,r) \le r$$

Suy ra $\varphi(r,r) = 0$ khi và chỉ khi $r = 0$. Do đó $\lim\limits_{n\to\infty} S(z,z,T^n x) = 0$. Suy ra

$$\lim_{n\to\infty} T^n x = z. \tag{16}$$

Lập luận tương tự như trên, ta chứng minh được

$$\lim_{n\to\infty} T^n x = y. \tag{17}$$

Sử dụng Mệnh đề 1.5, từ (16) và (17) ta suy ra $z = y$ hay T có duy nhất một điểm bất động. □

Trong điều kiện (1) ta chọn hàm $\varphi : [0,\infty)^2 \to [0,\infty)$ xác định bởi

$$\varphi(a,b) = (\frac{1}{3} - k)(a+b) \text{ với } k \in (0,\frac{1}{3}).$$

Khi đó, $\varphi \in \Psi$ và điều kiện (1) trở thành

$$S(Tx,Tx,Ty) \le k(S(x,x,Ty) + S(y,y,Tx)).$$

Do đó từ Định lí 2.1, Định lí 2.2 và Định lí 2.3 ta có các hệ quả sau.

Hệ quả 2.4. *Cho $(X,\le,S)$ là một không gian S-mêtric sắp thứ tự đầy đủ và $T : X \to X$ là một ánh xạ đơn điệu không giảm thoả mãn*

(i) Tồn tại số $k \in [0,\frac{1}{3})$ sao cho

$$S(Tx,Tx,Ty) \le k(S(x,x,Ty) + S(y,y,Tx)) \text{ với } x \ge y;$$

(ii) Tồn tại $x_0 \in X$ sao cho $x_0 \le Tx_0$;

(iii) T là ánh xạ liên tục.

Khi đó, T có điểm bất động.

Hệ quả 2.5. *Cho $(X,\le,S)$ là một không gian S-mêtric sắp thứ tự đầy đủ và $T : X \to X$ là một ánh xạ đơn điệu không giảm thoả mãn*

(i) Tồn tại số $k \in [0,\frac{1}{3})$ sao cho

$$S(Tx,Tx,Ty) \le k(S(x,x,Ty) + S(y,y,Tx)) \text{ với } x \ge y;$$

(ii) Tồn tại $x_0 \in X$ *sao cho* $x_0 \leq Tx_0$;

(iii) Nếu (x_n) *là một dãy không giảm trong* X *sao cho* $x_n \to x$ *thì* $x_n \leq x$ *với mọi* $n \in \mathbb{N}$.

Khi đó, T *có điểm bất động.*

Hệ quả 2.6. *Giả sử*

(i) Các giả thiết trong Hệ quả 2.4 hoặc Hệ quả 2.5 được thoả mãn;

(ii) Với mỗi $x,\ y \in X$, *tồn tại* $z \in X$ *sao cho* z *so sánh được với* x, y.

Khi đó, T *có duy nhất một điểm bất động.*

Cuối cùng, chúng tôi xây dựng một số ví dụ minh họa cho kết quả đạt được.

Ví dụ 2.7. Trên $X = \{(0,1),(1,0),(1,1)\} \subset \mathbb{R}^2$ xét thứ tự $\leq$ cho bởi:

$$x \leq y \text{ khi và chỉ khi } x = y.$$

Trên X xét S-mêtric xác định bởi $S_d(x,y,z) = \frac{1}{2}[d(x,z)+d(y,z)]$, với mọi $x,y,z \in X$ và d là mêtric thông thường trên $\mathbb{R}^2$. Khi đó, $(X,\leq,S)$ là một không gian S-mêtric sắp thứ tự đầy đủ.

Xét ánh xạ $T: X \to X$ xác định bởi $T(1,0) = (0,1)$, $T(0,1) = (1,0)$, $T(1,1) = (1,1)$. Ta có T là ánh xạ liên tục. Do $x \in X$ so sánh được với chính nó nên T là ánh xạ không giảm. Ta lại có $(1,1) \leq T(1,1) = (1,1)$.

Xét hàm số $\varphi: [0,\infty)^2 \to [0,\infty)$ xác định bởi $\varphi(a,b) = \frac{a+b}{3}$. Khi đó, với mọi $x, y \in X$ mà $x \geq y$ ta có $x = y$. Do đó $S(Tx,Tx,Ty) = S(Tx,Tx,Tx) = 0$ và

$$\frac{1}{3}[S(x,\ x,Ty)+S(y,\ y,Tx)] - \varphi[S(x,\ x,Ty),S(y,\ y,Tx)]$$

$$= \frac{2}{3}S(x,x,Tx) - \varphi(S(x,x,Tx),S(x,x,Tx))$$

$$= \frac{2}{3}d(x,Tx) - \varphi(d(x,Tx),d(x,Tx))$$

$$= \frac{2}{3}d(x,Tx) - \frac{2}{3}d(x,Tx) = 0.$$

Suy ra điều kiện (i) trong Định lí 2.1 được thoả mãn. Vậy ánh xạ T có điểm bất động. Hơn nữa, $(1,1)$ là điểm bất động của ánh xạ T.

Bằng cách sử dụng [5, Ví dụ 2.6], chúng tôi cũng chứng tỏ được rằng Hệ quả 2.4 mạnh hơn [7, Theorem 3.1].

Ví dụ 2.8. Trên $X = \{-3,-1,0,2,4\}$ xét *S*-mêtric xác định bởi $S(x,y,z) = |x-z| + |y-z|$, với mọi $x,y,z \in X$ và thứ tự $x \geq y$ trên X khi và chỉ khi $x,y \in \{-3,-1,0\}$ và $x \geq y$ trên $\mathbb{R}$. Khi đó, $(X, \leq, S)$ là một không gian *S*-mêtric sắp thứ tự đầy đủ.

Trên X xét ánh xạ T xác định bởi:

$$T(-3) = T(-1) = T(0) = 0,\ T(2) = -1,\ T(4) = -3.$$

Ta có

$$S(T2,T2,T4) = S(-1,-1,-3) = |-1+3| + |-1+3| = 4,$$

$$S(2,2,4) = |2-4| + |2-4| = 4.$$

Suy ra không tồn tại $L \in [0,1)$ để $S(T2,T2,T4) \leq LS(2,2,4)$. Do đó, điều kiện co của [7, Theorem 3.1] không thỏa mãn. Do đó, không thể áp dụng [7, Theorem 3.1] cho ánh xạ T này. Mặt khác, với $x \geq y$ ta có $x,y \in \{-3,-1,0\}$, suy ra $T(x) = T(y) = 0$. Do đó T là ánh xạ không giảm và

$$S(Tx,Tx,Ty) = S(0,0,0) = 0 \leq k(S(x,x,Ty) + S(y,y,Tx)) \text{ với } k \in [0,\frac{1}{3}).$$

Ta lại có T là ánh xạ liên tục và $0 \leq T(0) = 0$. Vậy các giả thiết của Hệ quả 2.4 đều thỏa mãn. Do đó, T có điểm bất động. Hơn nữa, 0 là điểm bất động của ánh xạ T./.

Tài liệu tham khảo

[1]. P. Chouhan (2013), “A common unique fixed point theorem for expansive type mappings in *S*-metric space”, *Int. Math. Forum*, 8(26), pp. 1287-1293.

[2]. N. V. Dung, N. T. Hieu and N. T. T. Ly (2013), “A generalization of Ciric quasi-contractions for maps on *S*-metric spaces”, *Thai. J. Math.*, Inpress.

[3]. N. V. Dung (2013), “On coupled common fixed points for mixed weakly monotone maps in partially ordered *S*-metric spaces”, *Fixed Point Theory Appl.*, 2013:48, pp. 1-24.

[4]. J. Harjani, B. López and K. Sadarangani (2011), “Fixed point theorems for weakly C-contractive mappings in ordered metric spaces”, *Comput. Math. Appl.*, (61), pp. 790-796.

[5]. N. T. Hiếu (2013), “Về định lí điểm bất động trên không gian *S*-mêtric thứ tự bộ phận”, *Tạp chí Khoa học Đại học Đồng Tháp*, (3), tr. 47-55.

[6]. S. Sedghi and N. V. Dung (2014), “Fixed point theorem on *S*-metric spaces”, *Mat. Vesnik*, 66(1), pp. 113-124.

[7]. S. Sedghi, N. Shobe and A. Aliouche (2011), “A generalization of fixed point theorem in *S*-metric spaces”, *Mat. Vesnik*, 64(3), pp. 258-266.

Summary

In this paper, we extend some fixed point theorems of weak C-contractive mappings from ordered metric spaces in [4] to ordered S-metric spaces. Also, we construct examples to illustrate the results obtained.

Keywords: fixed point, weakly C-contractive mappings, partially ordered S-metric spaces.

Ngày nhận bài: 28/10/2013; ngày nhận đăng: 04/3/2014.