# HỆ THAM SỐ CỦA MÔĐUN BUCHSBAUM

• ThS. Ngô Tấn Phúc [(*)]

**Tóm tắt**

*Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu về hệ tham số thu gọn và lớp môđun Buchsbaum. Cụ thể, chúng tôi chỉ ra rằng tất cả các hệ tham số của môđun Buchsbaum đều là hệ tham số thu gọn. Ngoài ra, chúng tôi cũng giới thiệu một số ví dụ về lớp môđun này.*

## 1. Mở đầu

Trong suốt bài báo này, vành $R$ được nói đến là vành giao hoán, địa phương, Noether với iđêan tối đại duy nhất $\mathfrak{m}$; $M$ là một $R$-môđun hữu hạn sinh với số chiều Krull $\dim M = d > 0$; $\underline{x} = x_1, x_2, ..., x_d$ là hệ tham số của $M$.

Ta biết rằng $l(M/\underline{x}M) \geq e(\underline{x}; M)$, trong đó $l(M/\underline{x}M)$ là độ dài của $R$-môđun $M/\underline{x}M$, $e(\underline{x}; M)$ là số bội Zariski-Samuel của $M$ đối với hệ tham số $\underline{x}$ [3, tr.107]. Xét hiệu số

$$I_M(\underline{x}) = l(M/\underline{x}M) - e(\underline{x}; M).$$

Khi đó $I_M(\underline{x}) \geq 0$ và $I_M(\underline{x})$ cho ta biết nhiều thông tin về cấu trúc của môđun $M$. Chẳng hạn [7, tr. 1], $M$ là môđun Cohen-Macaulay khi và chỉ khi tồn tại một hệ tham số $\underline{x}$ của $M$ sao cho $I_M(\underline{x}) = 0$; $M$ là môđun Buchsbaum khi và chỉ khi $I_M(\underline{x})$ là hằng số với mọi hệ tham số $\underline{x}$ của $M$; $M$ là môđun Cohen-Macaulay suy rộng khi và chỉ khi $\underset{\underline{x}}{Sup}\, I_M(\underline{x}) < \infty$.

Ngoài ra, hệ tham số $\underline{x} = x_1, x_2, ..., x_d$ của $M$ được gọi là *hệ tham số thu gọn* [4, Definition 1] nếu thỏa mãn

$$I(\underline{x}; M) = l((x_1, ..., x_{d-1})M : x_d / (x_1, ..., x_{d-1})M).$$

Mục đích của bài viết là dùng hệ tham số thu gọn được giới thiệu trong [4] để đặc trưng cho môđun Buchsbaum. Ngoài ra, chúng tôi cũng giới thiệu một số ví dụ về lớp môđun này.

Trước hết, chúng tôi giới thiệu các khái niệm và kết quả được sử dụng trong bài báo này.

**Định nghĩa 1.** Một dãy $\{x_1, ..., x_r\}$ các phần tử của $R$ được gọi là

i) [3, tr. 104] một *hệ tham số của* $M$ nếu $r = d$ và $l(M/(x_1, ..., x_d)M)$ là hữu hạn;

ii) [4, Definition 1] một *hệ tham số thu gọn của* $M$ nếu nó là hệ tham số ($r = d$) thỏa mãn

[(*)] Khoa Sư phạm Toán - Tin, Trường Đại học Đồng Tháp.

$$I(\underline{x};M) = l((x_1,...,x_{d-1})M : x_d / (x_1,...,x_{d-1})M);$$

iii) [6, Definition 1.1] một $M$ -*dãy yếu* nếu

$$(x_1,\ldots, x_{i-1})\, M : x_i = (x_1,\ldots, x_{i-1})\, M : \mathfrak{m}$$

với mọi $1 \le i \le r$;

iv) [6, Definition 1.6] một $d$ -*dãy* trên $M$ nếu $r = d$ và

$$(x_1,...,x_{i-1})M : x_i x_j = (x_1,...,x_{i-1})M : x_j$$

với mọi $1 \le i \le j \le d$.

Môđun Buchsbaum được biết đến đầu tiên vào năm 1980 trong [2] như sau.

**Định nghĩa 2.** [2, Definition 2.1] $M$ được gọi là *môđun Buchsbaum* nếu hiệu

$$I(\underline{x};M) = l(M / \underline{x}M) - e(\underline{x};M)$$

không phụ thuộc vào cách chọn hệ tham số $\underline{x}$ của môđun $M$.

Năm 1986, trong [6], J. Stückrad và W. Vogel đã đưa ra một định nghĩa khác về môđun Buchsbaum như sau.

**Định nghĩa 3.** [6, Definition 1.5] $M$ được gọi là *môđun Buchsbaum* nếu mọi hệ tham số của $M$ đều là $M$ -dãy yếu.

Định nghĩa 2 và Định nghĩa 3 là tương đương với nhau nhờ vào định lí sau.

**Định lí 1.** [6, Theorem 1.12] *Nếu $M$ là môđun Buchsbaum thì hiệu*

$$I(\underline{x};M) = l(M / \underline{x}M) - e(\underline{x};M)$$

*không phụ thuộc vào cách chọn hệ tham số $\underline{x}$ của môđun $M$.*

**2. Kết quả chính**

Từ sự tương đương của Định nghĩa 2 và Định nghĩa 3 ta suy ra kết quả sau:

**Định lí 2.** *Cho môđun $M$. Các khẳng định sau là tương đương:*

*i) $I(\underline{x};M)$ không phụ thuộc vào cách chọn hệ tham số $\underline{x}$ của môđun $M$.*

*ii) Mọi hệ tham số của $M$ là một $M$ -dãy yếu.*

**Nhận xét 1.** Năm 1992, trong [1], GS. Nguyễn Tự Cường đã chỉ ra rằng bậc bé nhất của tất cả các đa thức theo chặn trên hàm số $I(\underline{x};M) = l(M / \underline{x}M) - e(\underline{x};M)$ là không phụ thuộc vào cách chọn hệ tham số $\underline{x}$. Vậy bậc bé nhất này là một bất biến của môđun $M$, kí hiệu là $p(M)$. Với bất biến này thì khái niệm môđun Buchsbaum có thể được phát biểu lại như sau: $M$ được gọi là môđun Buchsbaum nếu $p(M)$ không dương.

Nội dung chính của bài viết là đưa ra một điều kiện cần của môđun Buchsbaum thông qua hệ tham số thu gọn như sau:

**Định lí 3.** *Mọi hệ tham số của môđun Buchsbaum đều là hệ tham số thu gọn.*

*Chứng minh.* Giả sử $\underline{x} = x_1,...,x_d$ là hệ tham số của môđun Buchsbaum $M$. Ta chứng minh $\underline{x}$ là hệ tham số thu gọn.

Theo Định nghĩa 3, $\underline{x} = x_1,...,x_d$ là một $M$ -dãy yếu.

Gọi $1 \le i \le j \le d$. Khi đó các dãy $\{x_1,...,x_{i-1},x_ix_j\}$ và $\{x_1,...,x_{i-1},x_j\}$ đều là các hệ tham số con của $M$, kết hợp với $\underline{x} = x_1,...,x_d$ là một $M$ -dãy yếu ta suy ra:

$$(x_1,...,x_{i-1})M : x_ix_j = (x_1,...,x_{i-1})M : (x_1,...,x_d) = (x_1,...,x_{i-1})M : x_j .$$

Vì thế $\underline{x} = x_1,...,x_d$ là $d$ -dãy trên $M$. Do đó ta có

$$(x_1,...,x_{i-1})M : x_i = (x_1,...,x_{i-1})M : (x_1,...,x_d) \text{ với mọi } i \in \{1,...,d\}.$$

Vì vậy

$$\dim[(x_1,..,x_{i-1})M : x_i] / (x_1,...,x_{i-1})M = 0 \text{ với mọi } i \in \{1,...,d\}.$$

Suy ra $\underline{x} = x_1,...,x_d$ là hệ tham số thu gọn của $M$. □

Sau đây, chúng tôi giới thiệu một số ví dụ về môđun Buchsbaum.

**Ví dụ 1.** *Giả sử* $\dim M = 1$. *Khi đó,* $M$ *là môđun Buchsbaum.*

*Chứng minh.* Đặt $M' = M / H^0_{\mathfrak{m}}(M)$. Khi đó $\dim M' = 1$ và $depth M' > 0$. Vì vậy $M'$ là môđun Cohen-Macaulay. Suy ra $I_{M'}(\underline{x}) = 0$, với mọi hệ tham số $\underline{x}$ của $M'$. Nghĩa là, $I_M(\underline{x}) = 0$, với mọi hệ tham số $\underline{x}$ của $M$. Hay $M$ là môđun Buchsbaum. □

Ta nhắc lại một số kí hiệu sau: một dãy các số tự nhiên $n_1,n_2,...,n_d \ge 1$ kí hiệu là $\underline{n} := n_1,n_2,...,n_d$; cho $\underline{y} = y_1,...,y_d$ là hệ tham số của $M$, khi đó dãy $y_1^{n_1},...,y_d^{n_d}$ cũng là một hệ tham số của $M$ và được kí hiệu là $\underline{y}(\underline{n}) := y_1^{n_1},...,y_d^{n_d}$.

Ví dụ sau cho thấy tồn tại môđun $M$ sao cho $I_M(\underline{y}(\underline{n}))$ là hằng số với hệ tham số $\underline{y}$ nào đó của $M$ và với mọi $n_1,n_2,...,n_d \ge 1$, nhưng $M$ không là môđun Buchsbaum.

**Ví dụ 2.** *Xét R = K[X₁,…,Xₙ ] (n ≥ 2) là vành các chuỗi lũy thừa hình thức và*

$$M = (X_1^2, X_2,..., X_n)R.$$

*Khi đó tồn tại hệ tham số* $\underline{y}$ *của* $M$ *sao cho* $I_M(\underline{y}(\underline{n}))$ *là hằng số với mọi* $n_1,n_2,...,n_d \ge 1$, *nhưng* $M$ *không là môđun Buchsbaum.*

*Chứng minh.* Từ dãy khớp

$$0 \to M \to R \to R/(X_1^2, X_2, ..., X_n)R \to 0,$$

ta có $H_{\mathfrak{m}}^i(M) = 0$, với $i \notin \{1, n\}$ và $H_{\mathfrak{m}}^1(M) \cong R/(X_1^2, X_2, ..., X_n)R.$ Khi đó $M$ là môđun Cohen-Macaulay suy rộng. Do đó, tồn tại số nguyên dương $n_0$ sao cho với mọi hệ tham số $\underline{x} = x_1, ..., x_d$ của $M$,

$$I_M(\underline{x}(\underline{n})) = \sum_{i=1}^{d-1} \binom{d-1}{i-1} l(H_{\mathfrak{m}}^i(M)$$

với mọi $n_1, n_2, \ldots, n_d >> n_0$. Đặt $\underline{y} = x_1^{n_0}, ..., x_d^{n_0}$ với $\underline{x} = x_1, ..., x_d$ là một hệ tham số nào đó của $M$. Khi đó, ta có

$$I_M(\underline{y}(\underline{n})) = \sum_{i=1}^{d-1} \binom{d-1}{i-1} l(H_{\mathfrak{m}}^i(M))$$

với mọi $n_1, n_2, ..., n_d \geq 1$. Mặt khác, $U_M(0) = 0$. Vì vậy $M/U_M(0)$ không là môđun Buchsbaum. Do đó $M$ không là môđun Buchsbaum./.

## Tài liệu tham khảo


[1]. N. T. Cuong (1992), "On the least degree of polynomials bounding above the differences between lengths and multiplicities of certain systems of parameters in local rings", *Nagoya Math. J*, (125), pp. 105-114.

[2]. S. Goto (1980), "On Buchsbaum rings", *J. Algebra* , (67), pp. 272–279.

[3]. H. Matsumura (1986), *Commutative ring theory*, Cambridge studies in Adv. Math. 8, Cambridge university press, Cambridge, U.K.

[4]. B. Mäurer and J. Stückrad (2003), "Reducing system of parameters and the Cohen-Macaulay property", *Proc. Indian Acad. Sci* (Math. Sci), (117), pp. 159-163.

[5]. Ngô Tấn Phúc (2010), *Một số tính chất của hệ tham số thu gọn*, Luận văn thạc sĩ Toán học, Trường Đại học Vinh.

[6]. J. Stückrad and W. Vogel (1986), *Buchsbaum Rings and Applications,* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.

[7]. N. V. Trung (1986), "Toward a theory of Generalized Cohen-Macaulay modules", *Nagoya Math. J,* (102), pp. 1-49.



**Summary**

In this paper, we study the reducing system of parameters and Buchsbaum modules. Particularly, we show that all the parameter systems of Buchsbaum modules are the reducing ones. Besides, we also introduce some examples of these modules.


*Ngày nhận bài: 03/10/2013; ngày nhận đăng: 09/12/2013.*