DƯỚI VI PHÂN PARABOLIC VÀ ÁP DỤNG VÀO NGHIÊN CỨU ĐIỀU KIỆN TỐI ƯU

Phạm Ngọc Anh Thơ[1], Ngô Thị Kim Yến[2*], Võ Đức Thịnh[3] và Phạm Thị Trân Châu[2]

[1]*Trường Đại học Công nghệ Thông tin, Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam*

[2]*Sinh viên, Khoa Sư phạm Toán - Tin, Trường Đại học Đồng Tháp, Việt Nam*

[3]*Khoa Sư phạm Toán - Tin, Trường Đại học Đồng Tháp, Việt Nam*

[*]*Tác giả liên hệ: Ngô Thị Kim Yến, Email: ngothikimyen912000@gmail.com*

Lịch sử bài báo

Ngày nhận: 05/6/2022; Ngày nhận chỉnh sửa: 13/7/2022; Ngày duyệt đăng: 27/7/2022

Tóm tắt

Trong bài báo này chúng tôi đề xuất khái niệm dưới vi phân parabolic thông qua dưới đạo hàm parabolic. Bên cạnh đó, chúng tôi trình bày một số tính chất của dưới vi phân parabolic cũng như các áp dụng của dưới vi phân parabolic vào nghiên cứu điều kiện tối ưu. Hơn nữa, trong bài báo này chúng tôi cũng xây dựng ví dụ minh họa cho các kết quả đạt được.

Từ khóa: *Dưới đạo hàm parabolic, dưới vi phân parabolic, điều kiện tối ưu, nghiệm cô lập tĩnh địa phương.*

PARABOLIC SUBDIFFERENTIAL AND ITS APPLICATIONS TO OPTIMALITY CONDITIONS

Pham Ngoc Anh Tho[1], Ngo Thi Kim Yen[2*], Vo Duc Thinh[3], and Pham Thi Tran Chau[2]

[1]*University of Information Technology, Vietnam National University HCMC*

[2]*Student, Faculty of Mathematics - Informatics Teacher Education, Dong Thap University*

[3]*Faculty of Mathematics - Informatics Teacher Education, Dong Thap University*

[*]*Corresponding author: Ngo Thi Kim Yen, Email: ngothikimyen912000@gmail.com*

Article history

Received: 05/6/2022; Received in revised form: 13/7/2022; Accepted: 27/7/2022

Abstract

In this paper, we introduce the notion of parabolic subdifferential of funtions through their parabolic subderivative. Besides, we present some properties of parabolic subdifferential and applications of parabolic subdifferential to necessary optimality conditions. Furthermore, in this paper, we also establish illustrative examples for the obtained result.

Keywords: *Parabolic subderivative, parabolic subdifferential, optimality conditions, locally isolated calmness.*

DOI: https://doi.org/10.52714/dthu.12.2.2023.1029

Trích dẫn: Phạm, N. A. T., Ngô, T. K. Y., Võ, Đ. T., & Phạm, T. T. C. (2023). Dưới vi phân parabolic và áp dụng vào nghiên cứu điều kiện tối ưu. *Tạp chí Khoa học Đại học Đồng Tháp, 12*(2), 27-34. https://doi.org/10.52714/dthu.12.2.2023.1029.

1. Mở đầu

Đạo hàm và vi phân là các công cụ quan trọng trong việc nghiên cứu các bài toán tối ưu. Tuy nhiên trong thực tế ta có thể bắt gặp việc giải bài toán tối ưu mà các hàm không có đạo hàm theo nghĩa cổ điển. Vì vậy, cần thiết phải mở rộng khái niệm đạo hàm. Việc mở rộng khái niệm đạo hàm và vi phân đã thu hút nhiều nhà Toán học trong nước, đặc biệt trong các lĩnh vực lý thuyết tối ưu, giải tích biến phân và đã đạt nhiều kết quả quan trọng. Chi tiết hơn (Dinh, 1991, 99-111) đã tìm hiểu các tính chất của đạo hàm contingent và một số áp dụng của đạo hàm này trong tối ưu không trơn. Gần đây, (Huynh & cs., 2014, 463-488) đã đề xuất khái niệm đạo hàm suy rộng cấp cao cho tối ưu đa trị như: đạo hàm Studniarski cấp cao, đạo hàm theo tia cấp cao, trên đạo hàm theo tia cấp cao… Sau đó, một số tính chất và phép toán của các dạng đạo hàm này đã được tìm hiểu. Các kết quả này được áp dụng vào nghiên cứu điều kiện tối ưu và phân tích độ nhạy cấp cao cho một số dạng nghiệm của bài toán tối ưu đa trị.

Bên cạnh việc mở rộng các khái niệm vi phân, nhiều tác giả còn quan tâm đến các vi phân suy rộng bậc cao. Trong số các vi phân suy rộng bậc cao cho ánh xạ đơn trị, đạo hàm epi bậc hai (second-order epiderivative) được giới thiệu trong (Rockafellar, 1988, 75-108) có nhiều áp dụng quan trọng trong việc nghiên cứu điều kiện cần và đủ bậc hai và nghiên cứu tính ổn định tĩnh cô lập (isolated calm) cho tập nghiệm của một số bài toán tối ưu. Cũng trong bài báo đó Rockafellar đã giới thiệu một loại đạo hàm suy rộng cấp hai khác, gọi là dưới đạo hàm parabolic và được định nghĩa như sau: cho f ánh xạ từ không gian Banach E vào $\mathbb{R}$. Đạo hàm parabolic của f tại $\bar{x} \in E$ đối với $v, y \in E$, được xác định bởi:

$$d^2 f(x;v,y)$$

$$:= \liminf_{\substack{t \to 0^+ \\ w \to y}} \frac{f(x + tv + t^2 \frac{w}{2}) - f(x) - t.df(x,v)}{\frac{1}{2}t^2}.$$

Một số tính chất, quy tắc tính và áp dụng của dưới đạo hàm parabolic cũng được trình bày khá chi tiết trong quyển sách chuyên khảo của (Rockafellar & cs., 1998).

Tuy nhiên cho đến nay chưa có một loại vi phân suy rộng trên không gian đối ngẫu tương ứng với đạo hàm parabolic được đề xuất cũng như nghiên cứu. Trong bài báo này chúng tôi đề xuất khái niệm dưới vi phân parabolic, một loại vi phân suy rộng trên không gian đối ngẫu tương ứng với đạo hàm parabolic. Bên cạnh đó chúng tôi cũng thiết lập một số tính chất và nghiên cứu một số áp dụng của dưới vi phân parabolic.

2. Đạo hàm parabolic dưới

Trong mục này chúng tôi kí hiệu E, E_1 là các không gian Banach; S là tập con của E; $clS, \operatorname{int} S$ lần lượt là bao đóng và phần trong của S. Trong dãy số thực $t_n \to 0^+$ nghĩa là $t_n > 0$ và hội tụ về 0.

Cho f là ánh xạ $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, phần trên đồ thị của f được định nghĩa là

$$epif = \{(x,r) \in E \times \mathbb{R} : r \geq f(x)\};$$

miền hữu hiệu của f là $domf = \{x \in E \mid f(x) < +\infty\}$;

f được gọi là khả vi Fréchet tại $\bar{x} \in \operatorname{int}(dom\, f)$ nếu $f(\bar{x}+h) - f(\bar{x}) - f'(\bar{x})h = \theta\|h\|$; f được gọi là khả vi Fréchet cấp 2 tại $\bar{x}$ nếu tồn tại $\nabla^2 f(\bar{x}) : E \times E \to \mathbb{R}$ sao cho

$$f(\bar{x}+h) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})h + \frac{1}{2}\nabla^2 f(\bar{x})(h,h) + \theta(\|h\|^2);$$

tập hợp tất cả các hàm khả vi Fréchet cấp 2 được ký hiệu là C^2; hàm số f được gọi là hàm Lipschitz trên tập $\Omega \subset dom\, f$ nếu tồn tạo $L > 0$ sao cho $|f(x) - f(y)| \leq L\|x - y\|$, với mọi $x, y \in \Omega$; hàm số f được gọi là hàm Lipschitz địa phương tại $\bar{x} \in domf$ nếu tồn tại $L \geq 0, \delta > 0$ sao cho $|f(x) - f(y)| \leq L\|x - y\|$, với mọi $x, y \in IB(\bar{x};\delta)$; hàm số f được gọi là hàm lồi nếu $x, y \in domf$ ta có,

$$f(\theta x + (1-\theta)y) \leq \theta f(x) + (1-\theta) f(y), \forall \theta \in [0;1];$$

f được gọi là liên tục tại x_0 nếu $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$; Cho $x \in E, x^* \in E^*$. Giá trị của x^* tại x được ký hiệu là $x^*(x)$ hoặc $\langle x^*, x\rangle$. Sau đây, chúng tôi giới thiệu mối quan hệ tính Lipschitz và tính lồi của hàm số.

Mệnh đề 1 (Mordukhovich, 2013, Corollary 2.27). Mọi hàm lồi $f:\mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ thì Lipschitz địa phương tại mọi điểm thuộc phần trong của $domf$.

Tiếp theo chúng tôi cần nhắc lại định nghĩa và một số kết quả về đạo hàm parabolic dưới. Các kết quả này là cần thiết trong việc đề xuất khái niệm và thiết lập một số kết quả về dưới vi phân parabolic.

Định nghĩa 1 (Đạo hàm parabolic dưới) (Rockafellar, 1998, Định nghĩa 13.59).

Cho $f:E \to \overline{\mathbb{R}}$ hữu hạn tại x, $df(x,v)$ hữu hạn. *Đạo hàm parabolic dưới* của f tại x theo hướng v được xác định bởi

$$d^2 f(x;v,y)$$

$$:= \liminf_{\substack{t\to 0^+\\ w\to y}} \frac{f(x+tv+t^2\frac{w}{2}) - f(x) - t.df(x,v)}{\frac{1}{2}t^2},$$

trong đó $df(x,v) := \liminf_{\substack{t\to 0^+\\ y\to v}} \dfrac{f(x+ty)-f(x)}{t}$ là *đạo hàm dưới* của f tại x theo hướng v.

Sau đây chúng tôi trình bày ví dụ tính toán đạo hàm parabolic dưới cho một số hàm cụ thể.

Ví dụ 1. a) Đạo hàm parabolic dưới của $f(x)=2x$ được tính như sau: lấy $x,v\in\mathbb{R}$ đạo hàm dưới của f theo hướng v là

$$df(x,v) = \liminf_{\substack{t\to 0^+\\ y\to v}} \frac{f(x+ty)-f(x)}{t}$$

$$= \liminf_{\substack{t\to 0^+\\ y\to v}} \frac{2(x+ty)-2x}{t}$$

$$= \liminf_{\substack{t\to 0^+\\ y\to v}} (2y) = 2v.$$

Đạo hàm parabolic dưới của f là:

$$d^2 f(x;v,y)$$

$$= \liminf_{\substack{t\to 0^+\\ w\to y}} \frac{f(x+tv+\frac{t^2w}{2}) - f(x) - t.df(x,v)}{\frac{1}{2}.t^2}$$

$$= \liminf_{\substack{t\to 0^+\\ w\to y}} \frac{2(x+tv+\frac{t^2w}{2}) - 2x - t.2v}{\frac{1}{2}.t^2}$$

$$= \liminf_{\substack{t\to 0^+\\ w\to y}} \frac{x-tv+t^2w}{\frac{1}{2}.t^2}$$

$$= \liminf_{\substack{t\to 0^+\\ w\to y}} \left(\frac{2x}{t^2} - \frac{2v}{t} + 2w\right)$$

$$= 2y.$$

b) Đạo hàm parabolic dưới của $f(x)=|x|$ tại $\overline{x}=0$ được tính như sau: lấy $v\in\mathbb{R}$ đạo hàm dưới của f theo hướng v là:

$$df(\overline{x},v) = \liminf_{\substack{t\to 0^+\\ y\to v}} \frac{f(\overline{x}+ty)-f(\overline{x})}{t}$$

$$= \liminf_{\substack{t\to 0^+\\ y\to v}} \frac{|0+ty|-0}{t}$$

$$= \liminf_{\substack{t\to 0^+\\ y\to v}} \frac{|t||y|}{t}$$

$$= |v|.$$

Đạo hàm parabolic dưới của f là:

$$d^2 f(\overline{x},v,y)$$

$$= \liminf_{\substack{t\to 0^+\\ w\to y}} \frac{f(\overline{x}+tv+\frac{t^2w}{2}) - f(\overline{x}) - t.df(x,v)}{\frac{1}{2}t^2}$$

$$= \liminf_{\substack{t\to 0^+\\ w\to y}} \frac{\left|0+tv+\frac{t^2w}{2}\right| - |0| - t|v|}{\frac{1}{2}t^2}$$

$$\liminf_{\substack{t\to 0^+\\ w\to y}} \frac{\left|tv+\frac{t^2w}{2}\right| - t|v|}{\frac{1}{2}t^2}$$

$$= \liminf_{\substack{t\to 0^+\\ w\to y}} \frac{|tv| + \left|\frac{1}{2}t^2w\right| - t|v|}{\frac{1}{2}t^2}$$

$$= \liminf_{\substack{t\to 0^+\\ w\to y}} \frac{\left|\frac{1}{2}t^2w\right|}{\frac{1}{2}t^2}$$

$$= |y|.$$

Vậy $d^2 f(x,v,y) = |y|$.

Tiếp theo chúng tôi trình bày một số kết quả về đạo hàm dưới và đạo hàm parabolic dưới. Các kết quả này cần thiết trong các nghiên cứu tiếp theo của bài báo.

Mệnh đề 2 (Doug, 1993, Mệnh đề 2.3b). Cho E là một không gian Banach, $f: E \to \overline{\mathbb{R}}$ là hàm khả vi Fréchet cấp 2 tại $x \in E.$ Khi đó với mọi $y \in E$ ta có:

$$d^2 f(x,v,y) = \nabla f(x) y + \nabla^2 f(x)(v,v).$$

Định lý 1. Nếu $f: \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ là hàm lồi liên tục tại x thì với mọi $v \in \mathbb{R}^n$, ta có:

$$df(x,v) = \liminf_{t\to 0^+} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t},$$

$$d^2 f(x,v,w)$$

$$= \liminf_{t\to 0^+} \frac{f\left(x + tv + \frac{1}{2}t^2 w\right) - f(x) - t.df(x,v)}{\frac{1}{2}t^2}.$$

Chứng minh

Vì $df(x,v) := \liminf\limits_{\substack{t\to 0^+ \\ y\to v}} \frac{f(x+ty) - f(x)}{t}$

nên ta có $\forall t_n \to 0^+, \forall y_n \to v$ sao cho,

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{f(x + t_n y_n) - f(x)}{t_n} \geq df(x,v)$$

và $\exists \overline{t}_n \to 0^+, \overline{y}_n \to v$ sao cho

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{f(x + \overline{t}_n \overline{y}_n) - f(x)}{\overline{t}_n} = df(x,v).$$

$$\forall t_n \to 0^+,\ \frac{f(x + t_n v) - f(x)}{t_n} - \frac{f(x + t_n \overline{y}_n) - f(x)}{t_n}$$

$$= f(x + t_n v) - f(x) - \left[f(x + t_n y_n) - f(x)\right]$$

$$= f(x + t_n v) - f(x + t_n y_n)$$

$$\leq L.\left\| x + t_n v - (x + t_n y_n)\right\| \quad (1)$$

$$= L.\left\| t_n (v - y_n)\right\| = \theta(t_n)$$

trong đó (1) đúng do Mệnh đề 1.

Vậy $df(x,v) = \liminf\limits_{t\to 0^+} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}$. Vì

$$d^2 f(x;v,y)$$

$$:= \liminf_{\substack{t\to 0^+ \\ w\to y}} \frac{f(x + tv + t^2 \frac{w}{2}) - f(x) - t.df(x,v)}{\frac{1}{2}t^2}$$

nên ta có

$\forall t_n \to 0^+, \forall y_n \to w$ sao cho

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{f\left(x + t_n v + \frac{1}{2}t_n^2 y_n\right) - f(x) - t_n.df(x,v)}{\frac{1}{2}t_n^2} \geq d^2 f(x,v,w)$$

và $\exists \overline{t}_n \to 0^+, \overline{y}_n \to v$ sao cho

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{f\left(x + \overline{t}_n v + \frac{1}{2}\overline{t}_n^2 \overline{y}_n\right) - f(x) - \overline{t}_n.df(x,v)}{\frac{1}{2}\overline{t}_n^2} = d^2 f(x,v,w).$$

$$\forall t_n \to 0^+,\ \frac{f\left(x + t_n v + \frac{1}{2}t_n^2 w\right) - f(x) - t.df(x,v)}{\frac{1}{2}t_n}$$

$$- \frac{f\left(x + t_n v + \frac{1}{2}t_n^2 y_n\right) - f(x) - t_n.df(x,v)}{\frac{1}{2}\overline{t}_n^2}$$

$$= f\left(x + t_n v + \frac{1}{2}t_n^2 w\right) - f(x) - t.df(x,v)$$

$$- \left[f\left(x + t_n v + \frac{1}{2}t_n^2 y_n\right) - f(x) - t_n.df(x,v)\right]$$

$$= f\left(x + t_n v + \frac{1}{2}t_n^2 w\right) - f\left(x + t_n v + \frac{1}{2}t_n^2 y_n\right)$$

$$\leq L.\left\| x + t_n v + \frac{1}{2}t_n^2 w - \left(x + t_n v + \frac{1}{2}t_n^2 y_n\right)\right\| \ (2)$$

$$= L.\left\| \frac{1}{2}t_n^2 (w - y_n)\right\| = L.\theta(t_n^2)$$

trong đó (2) đúng do Mệnh đề 1.

Vậy

$$d^2 f(x,v,w)$$

$$= \liminf_{t\to 0^+} \frac{f\left(x + tv + \frac{1}{2}t^2 w\right) - f(x) - t.df(x,v)}{\frac{1}{2}t^2}. \quad \square$$

Ví dụ 2. Xét hàm số $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ nếu } x \in \mathbb{Q} \\ -1 \text{ nếu } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

tại $\overline{x} = 0, t = 0$

Đạo hàm dưới của f tại $\overline{x} = 0$ theo hướng $v = 0$ được tính như sau:

$$df\left(0,0\right)=\liminf_{\substack{t\to 0^+\\ v'\to 0}}\frac{f(0+tv')-f(0)}{t}$$
$$=\liminf_{\substack{t\to 0^+\\ v'\to 0}}\frac{f(tv')-f(0)}{t}$$
$$=\liminf_{\substack{t\to 0^+\\ v'\to 0}}\frac{-1-1}{t}$$
$$=-\infty.$$

Trong khi đó

$$\liminf_{t\to 0^+}\frac{f(t.0)-f(0)}{t}$$
$$=\liminf_{t\to 0^+}\frac{f(0)-f(0)}{t}$$
$$=0.$$

Vậy $df\left(0,0\right)\neq \liminf_{t\to 0^+}\dfrac{f\left(0+t.0\right)-f(0)}{t}.$

Tương tự ta có

$$d^2f\left(0,0,0\right)\neq \liminf_{t\to 0^+}\frac{f(t.0+\frac{1}{2}t^2 0)-f(0)-df\left(0,0\right)}{\frac{1}{2}t^2}.$$

3. Dưới vi phân parabolic

Trước tiên, trong mục này chúng tôi giới thiệu khái niệm dưới vi phân parabolic thông qua đạo hàm parabolic dưới như sau.

Định nghĩa 3 (Dưới vi phân parabolic).

Cho E là một không gian Banach, $f:E\to\overline{\mathbb{R}}$. Dưới vi phân parabolic của hàm f tại $\overline{x}$ theo hướng v được xác định bởi

$$\partial^2 f\left(\overline{x},v\right)=\left\{x^*\in E^* \mid x^*(w)\leq d^2 f\left(\overline{x},v,w\right),\forall w\in E\right\}.$$

Ví dụ 3. Dưới vi phân parabolic của hàm số $f(x)=x^2$ tại $\overline{x}=0$ được tính như sau: lấy $v\in\mathbb{R}$ đạo hàm dưới của f tại $\overline{x}$ theo hướng v là:

$$df(\overline{x},v)=\liminf_{\substack{t\to 0^+\\ y\to v}}\frac{f(\overline{x}+ty)-f(\overline{x})}{t}$$
$$=\liminf_{\substack{t\to 0^+\\ y\to v}}\frac{(\overline{x}+ty)^2-\overline{x}^2}{t}$$
$$=\liminf_{\substack{t\to 0^+\\ y\to v}}\frac{\overline{x}^2+2t\overline{x}y+t^2y^2-\overline{x}^2}{t}$$
$$=\liminf_{\substack{t\to 0^+\\ y\to v}}\left(2\overline{x}y+ty^2\right)=2\overline{x}v.$$

Đạo hàm parabolic dưới của f là:

$$d^2f(\overline{x};v,y)$$
$$=\liminf_{\substack{t\to 0^+\\ w\to y}}\frac{f(\overline{x}+tv+\frac{t^2w}{2})-f(\overline{x})-t.df(\overline{x},v)}{\frac{1}{2}.t^2}$$
$$=\liminf_{\substack{t\to 0^+\\ w\to y}}\frac{\left(\overline{x}+tv+\frac{t^2w}{2}\right)^2-\overline{x}^2-t.2\overline{x}v}{\frac{1}{2}.t^2}$$
$$=\liminf_{\substack{t\to 0^+\\ w\to y}}\frac{t^2v^2+\frac{1}{4}t^4w^2+t^2\overline{x}w+t^3vw}{\frac{1}{2}.t^2}$$
$$=\liminf_{\substack{t\to 0^+\\ w\to y}}\left(2v^2+\frac{1}{2}t^2\mathrm{w}^2+2\overline{x}w+2tvw\right)$$
$$=2v^2+2\overline{x}y.$$

Tại $\overline{x}=0$ thì $d^2f\left(\overline{x},v,w\right)=2v^2.$

Xét

$x^*(w)\leq d^2f\left(\overline{x},v,w\right)$

$\Leftrightarrow x^*(w)\leq 2v^2,$

với $v=1\Rightarrow x^*=0.$

Vậy $\partial^2 f\left(\overline{x},v\right)=\left\{0\right\}.$

Trên cơ sở tính chất của đạo hàm parabolic dưới chúng tôi đề xuất một số tính chất sau.

Định lý 2. Cho $f:E\to\mathbb{R}$ là ánh xạ khả vi Fréchet cấp 2 tại $\overline{x}$ và $v\in E$ thỏa mãn $f'\left(\overline{x},v\right)=0.$ Khi đó

$$\partial^2 f\left(\overline{x},v\right)=\begin{cases}\emptyset & \text{nếu } \nabla^2 f\left(\overline{x}\right)\left(v,v\right)<0\\ \left\{\nabla f(x)\right\} & \textit{nếu } \nabla^2 f\left(\overline{x}\right)\left(v,v\right)\geq 0\end{cases}$$

Chứng minh

Nếu $f'\left(\overline{x},v\right)=0$ nghĩa là $\nabla f\left(\overline{x}\right)\left(v\right)=0$ thì

$$d^2f(\overline{x},v,w)$$
$$=\liminf_{\substack{t\to 0^+\\ w'\to w}}\frac{f\left(\overline{x}+tv+\frac{1}{2}t^2w'\right)-f\left(\overline{x}\right)-t.f'\left(\overline{x},v\right)}{\frac{1}{2}t^2}$$

$$= \liminf_{\substack{t\to 0^+\\ w'\to w}} \frac{f\left(\bar{x}\right)+\nabla f\left(\bar{x}\right).\left(tv+\frac{1}{2}t^{2'}\right)}{\frac{1}{2}t^2}$$

$$+\frac{+\frac{1}{2}\nabla^2 f\left(\bar{x}\right).\left(tv+\frac{1}{2}t^2w',tv+\frac{1}{2}t^2w'\right)+\theta\left(\left\|tv+\frac{1}{2}t^2w\right\|^2\right)}{\frac{1}{2}t^2}$$

$$-\frac{-f\left(\bar{x}\right)-t.f'\left(\bar{x},v\right)}{\frac{1}{2}t^2}$$

$$= \liminf_{\substack{t\to 0^+\\ w'\to w}} \frac{\frac{1}{2}t^2\nabla f\left(\bar{x}\right)(w')+\frac{1}{2}t^2\nabla^2 f\left(\bar{x}\right)(v,v)}{\frac{1}{2}t^2}$$

$$+\frac{\frac{1}{2}t^3\nabla^2 f(x)(v,w')+\frac{1}{8}t^4\nabla^2 f(x)(w',w')+\theta\left(\left\|tv+\frac{1}{2}t^2w\right\|^2\right)}{\frac{1}{2}t^2}$$

$$=\nabla f\left(\bar{x}\right)(w)+\nabla^2 f\left(\bar{x}\right)(v,v).$$

$$*\partial^2 f\left(\bar{x},v\right)=\left\{\varepsilon\in\mathbb{R}^n \mid \langle\varepsilon,w\rangle\le d^2 f\left(\bar{x},v,v\right)\ \forall w\in\mathbb{R}^n\right\}$$

$$=\left\{\varepsilon\in\mathbb{R}^n \mid \langle\varepsilon,w\rangle\le \nabla f\left(\bar{x}\right)w+\nabla^2 f\left(\bar{x}\right)(v,v)\ \forall w\in\mathbb{R}^n\right\}$$

$$=\left\{\varepsilon\in\mathbb{R}^n \mid \left\langle\varepsilon-\nabla f\left(\bar{x}\right),w\right\rangle\le \nabla^2 f\left(\bar{x}\right)(v,v)\ \forall w\in\mathbb{R}^n\right\}.$$

Vậy $\partial^2 f\left(\bar{x},v\right)=\begin{cases}\emptyset & \text{nếu } \nabla^2 f\left(\bar{x}\right)\left(v,v\right)<0\\ \left\{\nabla f(\bar{x})\right\} & \text{nếu } \nabla^2 f\left(\bar{x}\right)\left(v,v\right)\ge 0\end{cases}$. □

Mệnh đề 3. Cho f_1, f_2 là các ánh xạ từ E vào $\overline{\mathbb{R}}$.

1. Với mọi $\bar{x}\in dom\, f$, $\lambda>0, v\in E$, ta có

$$\partial^2\left(\lambda f\right)\left(\bar{x},v\right)=\lambda.\partial^2 f\left(\bar{x},v\right).$$

2. Với mọi $\bar{x}\in dom\left(f_1\cap f_2\right)$ nếu $f_1\in C^2$, $v\in E$ thỏa mãn $\nabla^2 f_1\left(\bar{x}\right)\left(v,v\right)\ge 0$ thì

$$\partial^2\left(f_1+f_2\right)\left(\bar{x},v\right)\supset\partial^2 f_1\left(\bar{x},v\right)+\partial^2 f_2\left(\bar{x},v\right)\ (*).$$

Hơn nữa, (*) đúng như đẳng thức nếu $\nabla^2 f_1\left(\bar{x}\right)\left(v,v\right)=0.$

Chứng minh

1. Từ định nghĩa đạo hàm dưới ta có:

$$d\left(\lambda f\right)\left(\bar{x},v\right)=\liminf_{\substack{t\to 0^+\\ y\to v}}\frac{\left(\lambda f\right)\left(\bar{x}+ty\right)-\left(\lambda f\right)(\bar{x})}{t}$$

$$=\liminf_{\substack{t\to 0^+\\ y\to v}}\frac{\lambda f\left(\bar{x}+ty\right)-\lambda f(\bar{x})}{t}$$

$$=\liminf_{\substack{t\to 0^+\\ y\to v}}\lambda.\frac{f\left(\bar{x}+ty\right)-f(\bar{x})}{t}$$

$$=\lambda.\liminf_{\substack{t\to 0^+\\ y\to v}}\frac{f\left(\bar{x}+ty\right)-f(\bar{x})}{t}$$

$$=\lambda.df(\bar{x},v).$$

Từ định nghĩa của đạo hàm parabolic dưới ta có:

$$d^2\left(\lambda f\right)\left(\bar{x},v,w\right)$$

$$=\liminf_{\substack{t\to 0^+\\ y\to w}}\frac{\lambda.f\left(\bar{x}+tv+\frac{1}{2}t^2y\right)-\lambda.f(\bar{x})-t\lambda.df(\bar{x},v)}{\frac{1}{2}t^2}$$

$$=\liminf_{\substack{t\to 0^+\\ y\to w}}\lambda\frac{f\left(\bar{x}+tv+\frac{1}{2}t^2y\right)-f(\bar{x})-tdf(\bar{x},v)}{\frac{1}{2}t^2}$$

$$=\lambda\liminf_{\substack{t\to 0^+\\ y\to w}}\frac{f\left(\bar{x}+tv+\frac{1}{2}t^2y\right)-f(\bar{x})-tdf(\bar{x},v)}{\frac{1}{2}t^2}$$

$$=\lambda.d^2 f(\bar{x},v,w).$$

Suy ra

$$\partial^2\left(\lambda f\right)\left(\bar{x},v\right)=\left\{x^*\in E^* \mid x^*(w)\le d^2(\lambda f)(\bar{x},v,w)\right\}$$

$$=\left\{x^*\in E^* \mid x^*(w)\le \lambda d^2 f(\bar{x},v,w)\right\}$$

$$=\lambda\partial^2 f\left(\bar{x},v\right).$$

Vậy $\partial^2\left(\lambda f\right)\left(x,v\right)=\lambda.\partial^2 f\left(x,v\right)$ với mọi $\lambda>0.$

2. Từ định nghĩa của đạo hàm dưới ta có:

$$d\left(f_1+f_2\right)\left(\bar{x},v\right)$$

$$=\liminf_{\substack{t\to 0^+\\ y\to v}}\frac{\left(f_1+f_2\right)\left(\bar{x}+ty\right)-\left(f_1+f_2\right)(\bar{x})}{t}$$

$$=\liminf_{\substack{t\to 0^+\\ y\to v}}\frac{f_1\left(\bar{x}+ty\right)+f_2\left(\bar{x}+ty\right)-f_1\left(\bar{x}\right)-f_2\left(\bar{x}\right)}{t}$$

$$=\liminf_{\substack{t\to 0^+\\ y\to v}}\left[\frac{f_1\left(\bar{x}+ty\right)-f_1\left(\bar{x}\right)}{t}+\frac{f_2\left(\bar{x}+ty\right)-f_2\left(\bar{x}\right)}{t}\right]$$

$$=\lim_{\substack{t\to 0^+\\ y\to v}}\frac{f_1\left(\bar{x}+ty\right)-f_1\left(\bar{x}\right)}{t}+\liminf_{\substack{t\to 0^+\\ y\to v}}\frac{f_2\left(\bar{x}+ty\right)-f_2\left(\bar{x}\right)}{t}\quad(1)$$

$$= df_1(\bar{x},v) + df_2(\bar{x},v)$$

trong đó (1) đúng do $f_1 \in C^2$.

Từ định nghĩa của đạo hàm parabolic dưới ta có:

$$d^2(f_1+f_2)(\bar{x},v,w)$$

$$= \liminf_{\substack{t\to 0^+\\ y\to w}} \frac{(f_1+f_2)\left(\bar{x}+tv+\frac{1}{2}t^2y\right)-(f_1+f_2)(\bar{x})-td(f_1+f_2)(\bar{x},v)}{\frac{1}{2}t^2}$$

$$= \lim_{\substack{t\to 0^+\\ y\to w}} \frac{f_1\left(\bar{x}+tv+\frac{1}{2}t^2y\right)-f_1(\bar{x})-tdf_1(\bar{x},v)}{\frac{1}{2}t^2} +$$

$$\liminf_{\substack{t\to 0^+\\ y\to w}} \frac{f_2\left(\bar{x}+tv+\frac{1}{2}t^2y\right)-f_2(\bar{x})-tdf_2(\bar{x},v)}{\frac{1}{2}t^2} (2)$$

$$= \{\nabla f_1(\bar{x})w\} + \nabla^2 f_1(\bar{x})(v,v) + d^2 f_2(\bar{x},v,w),$$

trong đó (2) đúng do $f_1 \in C^2$.

$$\partial^2(f_1+f_2)(\bar{x},v)$$
$$= \{x^* \in E^* \mid x^*(w) \le d^2(f_1+f_2)(\bar{x},v,w),\ \forall w \in E\}$$
$$= \{x^* \in E^* \mid x^*(w) \le \nabla f_1(\bar{x})(w) + \nabla^2 f_1(\bar{x})(v,v) + d^2 f_2(\bar{x},v,w),\ \forall w \in E\}$$
$$= \{x^* \in E^* \mid x^*(w) - \nabla f_1(\bar{x})(w) \le d^2 f_2(\bar{x},v,w) + \nabla^2 f_1(\bar{x})(v,v),\ \forall w \in E\}$$
$$= \{x^* \in E^* \mid (x^* - \nabla f_1(\bar{x}))(w) \le d^2 f_2(\bar{x},v,w) + \nabla^2 f_1(\bar{x})(v,v),\ \forall w \in E\} (*)$$
$$\supset \{x^* \in E^* \mid (x^* - \nabla f_1(\bar{x}))(w) \le d^2 f_2(\bar{x},v,w),\ \forall w \in E\}$$
$$= \{x^* \in E^* \mid x^* - \nabla f_1(\bar{x}) \in \partial^2 f_2(\bar{x},v)\}$$
$$= \{x^* \in E^* \mid x^* \in \nabla f_1(\bar{x}) + \partial^2 f_2(\bar{x},v)\}$$
$$= \nabla f_1(\bar{x}) + \partial^2 f_2(\bar{x},v).$$

Hơn nữa, nếu $\nabla^2 f_1(\bar{x})(v,v) = 0$ (*) ta có

$$= \{x^* \in E^* \mid (x^* - \nabla f_1(\bar{x}))(w) \le d^2 f_2(\bar{x},v,w) + \nabla^2 f_1(\bar{x})(v,v),\ \forall w \in E\}$$
$$= \{x^* \in E^* \mid (x^* - \nabla f_1(\bar{x}))(w) \le d^2 f_2(\bar{x},v,w),\ \forall w \in E\}.$$

Vậy nếu $f_1 \in C^2, v \in E$ thỏa mãn $\nabla^2 f_1(\bar{x})(v,v) \ge 0$ thì

$$\partial^2(f_1+f_2)(\bar{x},v) \supset \partial^2 f_1(\bar{x},v) + \partial^2 f_2(\bar{x},v) \ (*).$$

Hơn nữa, (*) đúng như đẳng thức nếu $\nabla^2 f_1(\bar{x})(v,v) = 0$. □

4. Áp dụng vào nghiên cứu điều kiện tối ưu cấp 2

Định nghĩa 4. Cho $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ với E là không gian Banach, $\bar{x} \in dom f$. Khi đó $\bar{x}$ được gọi là nghiệm cô lập tĩnh địa phương của f nếu tồn tại $\vartheta, r > 0$ sao cho

$$f(x) - f(\bar{x}) \ge \vartheta \|x - \bar{x}\|^2 \quad \forall x \in B_r(\bar{x}).$$

Sau đây chúng tôi thiết lập điều kiện cần cho nghiệm cô lập tĩnh địa phương của một ánh xạ thông qua dưới vi phân parabolic.

Định lý 3. Nếu $\bar{x}$ là nghiệm cô lập tĩnh địa phương của f thì $0 \in \partial^2 f(\bar{x},v)$ với mọi $v \in E$ thỏa mãn

$$df(\bar{x},v) = 0.$$

Chứng minh:

Giả sử $\bar{x}$ là nghiệm cô lập tĩnh địa phương của f. Khi đó, $\exists \vartheta, r > 0$ sao cho

$$f(x) - f(\bar{x}) \ge \vartheta \|x - \bar{x}\|^2 \quad \forall x \in B_r(\bar{x})$$

Giả sử $df(\bar{x},v) = 0$ khi đó tồn tại $w' \in \mathbb{R}^n$ và $t > 0$ (đủ nhỏ) ta có

$$\frac{f\left(\bar{x}+tv+\frac{1}{2}tw'\right)-f(\bar{x})}{\frac{1}{2}t^2} \ge \frac{\vartheta\left\|tv+\frac{1}{2}t^2w'\right\|^2}{\frac{1}{2}t^2}$$
$$= 2\vartheta\left\|v+\frac{1}{2}tw'\right\|^2$$

$$\Rightarrow d^2 f(\bar{x},v,w)$$

$$= \liminf_{\substack{t\to 0^+\\ w'\to w}} \frac{f\left(\bar{x}+tv+\frac{1}{2}t^2w'\right)-f(\bar{x})-t.df(\bar{x},v)}{\frac{1}{2}t^2}$$

$$= \liminf_{\substack{t\to 0^+\\ w'\to w}} \frac{f\left(\bar{x}+tv+\frac{1}{2}t^2w'\right)-f(\bar{x})}{\frac{1}{2}t^2}$$

$\geq 2\vartheta\|v\|^2$

$\geq 0.$

Giả sử $0 \notin \partial^2 f(\bar{x}, v)$. Khi đó tồn tại $w \in \mathbb{R}^n$ sao cho

$$\langle 0, w\rangle = 0 > d^2 f(\bar{x}, v, w) \geq 0.$$

Điều này mâu thuẫn. Do đó $0 \in \partial^2 f(\bar{x}, v)$. □

Sau đây chúng tôi trình bày ví dụ để chứng tỏ rằng chiều ngược lại của định lý trên không đúng.

Ví dụ 3. Xét $f(x) = x^3$ và $\bar{x} = 0.$

Đạo hàm dưới của f tại $\bar{x}$ theo hướng $v \in \mathbb{R}$ là:

$$\begin{aligned} df(0,v) &= \liminf_{\substack{t\to 0^+\\ y\to v}} \frac{f(0+ty)-f(0)}{t} \\ &= \liminf_{\substack{t\to 0^+\\ y\to v}} \frac{(ty)^3}{t} \\ &= \liminf_{\substack{t\to 0^+\\ y\to v}} \frac{t^3y^3}{t} \\ &= \liminf_{\substack{t\to 0^+\\ y\to v}} \left(t^2y^3\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Đạo hàm parabolic dưới của f là:

$$\begin{aligned} &d^2 f(0,v,w) \\ &= \liminf_{\substack{t\to 0^+\\ y\to w}} \frac{f(0+tv+\frac{t^2y}{2})-f(0)-t.df(0,v)}{\frac{1}{2}.t^2} \\ &= \liminf_{\substack{t\to 0^+\\ y\to w}} \frac{\left(tv+\frac{t^2y}{2}\right)^3}{\frac{1}{2}.t^2} \\ &= \liminf_{\substack{t\to 0^+\\ y\to w}} \frac{t^3v^3+\frac{3}{2}t^4v^2y+\frac{3}{4}t^5vy^2+\frac{1}{8}t^6y^3}{\frac{1}{2}.t^2} \\ &= \liminf_{\substack{t\to 0^+\\ y\to w}} \left(2tv^3+3t^2v^2y+\frac{3}{2}t^3vy^2+\frac{1}{4}t^4y^3\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Suy ra $\partial^2 f(0,v) = \{0\}$ với mọi $v \in \mathbb{R}$ nhưng $\bar{x} = 0$ không là nghiệm cô lập tĩnh địa phương của f.

Vậy $0 \in \partial^2 f(\bar{x}, v)$ với mọi v thỏa mãn $df(\bar{x}, v) = 0$ nhưng $\bar{x} = 0$ không phải nghiệm cô lập tĩnh địa phương của f.

5. Kết luận

Trong bài báo này chúng tôi đã đề xuất khái niệm và một số tính chất cũng như áp dụng của dưới đạo hàm parabolic. Tuy nhiên bài báo chỉ mới trình bày áp dụng của dưới vi phân parabolic vào nghiên cứu nghiệm cô lập tĩnh địa phương đối với bài toán tối ưu không ràng buộc. Ý tưởng này có thể được tiếp tục nghiên cứu đối với bài toán tối ưu ràng buộc tập, ràng buộc hàm.

Lời cảm ơn: Nghiên cứu này được hỗ trợ bởi đề tài nghiên cứu khoa học mã số SPD2021.02.01.

Tài liệu tham khảo

Doug, W. (1993). Calculus for parabolic second-order derivaties. *Set-Valued Analysis*, *1*, 213-246.

Dinh, T. L. (1991). Contingent derivatives of set-valued maps and applications to vector optimization. *Mathematical Programming*, *50*, 99-111.

Gonca, I. (2021). Some properties of second-order wear subdifferentials. *Turkish Journal of Mathematics*, *45*, 955-960.

Huynh, T. H. D., Phan, Q. K., & Le, T. T. (2014). On higher-order sensitivity analysis in nonsmooth vector optimization. *Journal of Optimization Theory and Applications*, *162*, 463-488.

Nguyễn, Đ. Y. (2000). *Giáo trình Giải tích đa trị*, Hà Nội: NXB Khoa học Tự nhiên và Công nghệ.

Rockafellar, R. T. (1988). First and second-order epi-differentiability in nonlinear programming. *Transactions of the American Mathematical Society*, *307*(1), 75-108.

Rockafellar, R. T., & Roger J. B. R. W. (1998). *Variational Analysis*. Grudlenhren der mathematicshen Wissenschaften.