ĐIỀU KIỆN ĐỦ CHUYỂN DẤU TÍCH PHÂN SUY RỘNG VỚI CẬN VÔ HẠN QUA CHUỖI HÀM

• Hồ Công Xuân Vũ Ý (*)
Đoàn Thị Yến Thu (**)

TÓM TẮT

Trong lý thuyết chuỗi hàm ta biết rằng nếu chuỗi hàm hội tụ đều trên một khoảng và các hàm thành phần khả tích trên khoảng ấy thì hàm tổng cũng khả tích. Mục tiêu chính của bài viết này là trình bày một phản ví dụ chứng tỏ kết quả này không còn đúng đối với tích phân suy rộng và trình bày chứng minh chi tiết của hai kết quả về điều kiện đủ để có được mở rộng cho tích phân suy rộng trong tài liệu [2].

1. Đặt vấn đề

Chúng ta đã biết rằng (có thể tham khảo các giáo trình giải tích như trong tài liệu tham khảo, chẳng hạn [6, trang 49]) nếu một chuỗi hàm

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots$$

hội tụ đều trên $D \subset \mathbb{R}$ và các số hạng đó khả tích qua một khoảng hữu hạn $[a,b] \subset D$ nào đó thì hàm tổng của chuỗi hàm này cũng khả tích trên $[a,b]$, và tích phân của hàm tổng có thể thu được bằng việc lấy tổng các tích phân của các số hạng của chuỗi hàm ấy, đó là:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + \cdots + \int_a^b f_n(x)dx + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx$$

Vấn đề đặt ra ở đây nếu khoảng lấy tích phân là vô hạn thì kết quả trên có còn đúng nữa không? Nghĩa là tích phân suy rộng của hàm tổng của chuỗi hàm hội tụ đều có thể thu được bằng tổng của chuỗi của các số hạng là tích phân suy rộng trên cùng khoảng trên của các số hạng của chuỗi hàm hay không?

2. Nội dung nghiên cứu

Câu trả lời cho vấn đề trên nói chung là không đúng. Ta thấy điều đó qua ví dụ sau được Thomas Fiske đưa ra trong [2].

(*) ThS. Khoa Sư phạm, Trường Đại học Tiền Giang

(**) SV. Lớp ĐHSP Toán 09, Trường Đại học Tiền Giang

Xét chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} -2x\left(\frac{1}{n^2}e^{-\frac{x^2}{n^2}} - \frac{1}{(n+1)^2}e^{\frac{-x^2}{(n+1)^2}}\right)$ trên $[0,+\infty)$. Tổng riêng của chuỗi hàm là

$$S_n(x) = -2x\left(e^{-x^2} - \frac{1}{(n+1)^2}e^{\frac{-x^2}{(n+1)^2}}\right)$$

Ta tính được $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = -2xe^{-x^2}$. Vậy

$$f(x) = -2xe^{-x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} -2x\left(\frac{1}{n^2}e^{-\frac{x^2}{n^2}} - \frac{1}{(n+1)^2}e^{\frac{-x^2}{(n+1)^2}}\right).$$

Với mọi $x\in[0,+\infty)$, ta ước lượng được

$$\left|S_n(x) - f(x)\right| = \frac{2x}{(n+1)^2}e^{-\frac{x^2}{(n+1)^2}} \le \frac{\sqrt{2}}{(n+1)\sqrt{e}}.$$

Vậy với $\varepsilon > 0$, chọn $n_0 = \left[\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon\sqrt{e}} - 1\right]$ khi đó với mọi $x\in[0,+\infty)$ và mọi $n > n_0$ ta có

$$\left|S_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon$$

Vậy chuỗi đã cho hội tụ đều trên $[0,+\infty)$.

$$\int_0^{+\infty}\left[-2x\left(\frac{1}{n^2}e^{-\frac{x^2}{n^2}} - \frac{1}{(n+1)^2}e^{-\frac{x^2}{(n+1)^2}}\right)\right]dx = e^{-\frac{x^2}{n^2}} - e^{-\frac{x^2}{(n+1)^2}}\Bigg|_{x=0}^{+\infty} = 0.$$

Do đó

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{+\infty}\left[-2x\left(\frac{1}{n^2}e^{-\frac{x^2}{n^2}} - \frac{1}{(n+1)^2}e^{-\frac{x^2}{(n+1)^2}}\right)\right]dx = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0.$$

Trong khi đó ta tính được

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty}\left(-2xe^{-x^2}\right)dx = e^{-x^2}\Big|_0^{+\infty} = -1.$$

Vậy ta có

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx \ne \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{+\infty}\left[-2x\left(\frac{1}{n^2}e^{-\frac{x^2}{n^2}} - \frac{1}{(n+1)^2}e^{-\frac{x^2}{(n+1)^2}}\right)\right]dx.$$

Như vậy qua ví dụ trên ta nhận thấy để có đẳng thức sau

$$\int_a^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^{+\infty} f_n(x)\,dx$$

ngoài điều kiện hội tụ đều của chuỗi hàm ta cần phải thêm một điều kiện nào đó. Trong bài viết này chúng tôi trình bày chứng minh chi tiết hai kết quả của vấn đề trên trong bài báo của Fiske [2] đã đưa ra nhưng không có chứng minh.

Định lý 1. Cho chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ hội tụ đều trên đoạn $[a,+\infty)$, trong đó các hàm f_n có tích phân suy rộng trên $[a,+\infty)$, với $a\in\mathbb{R}$. Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x f_n(x)\,dx$ hội tụ đều trên đoạn $[a,+\infty)$ thì

$$\int_a^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^{+\infty} f_n(x)dx$$

Chứng minh. Để chứng minh định lý ta chứng minh hai điều sau:

i) Chứng minh chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^{+\infty} f_n(x)\,dx$ hội tụ.

ii) Chứng minh $\int_a^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^{+\infty} f_n(x)\,dx.$

i) Ta có chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x f_n(t)\,dt$ hội tụ đều trên đoạn $[a,+\infty)$ nên với $\varepsilon>0$ cho trước, tồn tại n_0 tự nhiên sao cho với mọi $n>n_0$, với mọi số p nguyên dương và với mọi $x\in[a,+\infty)$ ta có:

$$\left|\int_a^x f_{n+1}(t)\,dt+\int_a^x f_{n+2}(t)\,dt+\cdots+\int_a^x f_{n+p}(t)\,dt\right|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (1)$$

Với $n>n_0$, p nguyên dương cố định, do các hàm $f_{n+1}(x), f_{n+2}(x),\ldots, f_{n+p}(x)$ có tích phân suy rộng trên $[a,+\infty)$ hội tụ nên tồn tại $A_0>0$ sao cho với mọi $A>A_0$

$$\left|\int_A^{+\infty} f_{n+1}(x)\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{2p}$$

$$\left|\int_A^{+\infty} f_{n+2}(x)\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{2p}$$

....

$$\left|\int_A^{+\infty} f_{n+p}(x)\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{2p}$$

Khi đó với mọi $A>A_0$ ta tính

$$\left|\int_a^{+\infty} f_{n+1}(x)\,dx+\int_a^{+\infty} f_{n+2}(x)\,dx+\cdots+\int_a^{+\infty} f_{n+p}(x)\,dx\right|$$
$$=\left|\int_a^{+\infty}\left(f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+\cdots+f_{n+p}(x)\right)dx\right|$$
$$\le\left|\int_a^{A}\left(f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+\cdots+f_{n+p}(x)\right)dx\right|$$
$$+\left|\int_A^{+\infty}\left(f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+\cdots+f_{n+p}(x)\right)dx\right|$$
$$<\frac{\varepsilon}{2}+p\cdot\frac{\varepsilon}{2p}=\varepsilon$$

Với mọi $\varepsilon>0$, tồn tại n_0 tự nhiên sao cho với mọi $n>n_0$, với mọi p nguyên dương ta có

$$\left|\int_a^{+\infty} f_{n+1}(x)\,dx+\int_a^{+\infty} f_{n+2}(x)\,dx+\cdots+\int_a^{+\infty} f_{n+p}(x)\,dx\right|<\varepsilon .$$

Do đó, theo tiêu chuẩn Cauchy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^{+\infty} f_n(x)\,dx$ hội tụ.

ii) Với $\varepsilon>0$ cho trước, ta có chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^{+\infty} f_n(x)\,dx$ hội tụ nên tồn tại $N_1>0$, với mọi $n>N_1$:

$$\left|\sum_{k=n}^{\infty}\int_a^{+\infty} f_k(x)\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{3}$$

Mặt khác chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ và chuỗi hàm hội tụ đều trên $[a,+\infty)$ cho nên với mọi $x\in[a,+\infty)$ và mọi n ta suy ra được

$$\int_a^x\Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(t)\Big)dt=\sum_{k=n+1}^{\infty}\int_a^x f_k(t)\,dt .$$

Bên cạnh đó do chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x f_n(t)\,dt$ hội tụ đều trên $[a,+\infty)$ nên tồn tại $N_2>0$ sao cho với mọi $n>N_2$, với mọi $x\in[a,+\infty)$ ta được

$$\left|\sum_{k=n}^{\infty}\int_a^x f_k(t)\,dt\right|<\frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{suy ra} \qquad \left|\int_a^x\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(t)\right)dt\right|<\frac{\varepsilon}{3}$$

Lấy $n_0>\max\{N_1,N_2\}$, với mọi $n>n_0$, cố định n lại, do các hàm $f_1(x), f_2(x),\ldots, f_n(x)$ có tích phân suy rộng trên $[a,+\infty)$ hội tụ nên tồn tại $A_0>0$ sao cho với mọi $A>A_0$ ta có

$$\left|\int_A^{+\infty} f_1(x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{3n}$$

$$\left|\int_A^{+\infty} f_2(x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{3n}$$

....

$$\left|\int_A^{+\infty} f_n(x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{3n}$$

Khi đó, từ các kết quả trên, với mọi $A > A_0$ ta có

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^A\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)dx - \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^{+\infty} f_n(x)\,dx\right| \\
&\qquad \le \left|\sum_{k=1}^{n}\int_A^{+\infty} f_k(x)dx\right| + \left|\int_a^A\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right)dx\right| + \left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\int_a^{+\infty} f_k(x)dx\right| \\
&\qquad \le \sum_{k=1}^{n}\left|\int_A^{+\infty} f_k(x)\,dx\right| + \left|\int_a^A\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right)dx\right| + \left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\int_a^{+\infty} f_k(x)\,dx\right| \\
&\qquad < n\cdot\frac{\varepsilon}{3n} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Vậy $\int_a^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^{+\infty} f_n(x)\,dx$. Định lý đã được chứng minh.

Ta nhận thấy điều kiện của định lý trên khó áp dụng do ta phải xét tính hội tụ đều của chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x f_n(t)\,dt$ (điều này nói chung không dễ thực hiện). Jordan đã đưa ra điều kiện đủ dễ dàng hơn được phát biểu trong định lý sau.

Định lý 2. Cho chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ hội tụ đều trên đoạn $[a,+\infty)$, trong đó các hàm f_n có tích phân suy rộng trên $[a,+\infty)$, với $a\in\mathbb{R}$, hội tụ. Nếu phần dư $r_n(x)$ của chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ viết dưới dạng $\varepsilon_n(x)\varphi(x)$, trong đó $\varphi(x)$ là hàm dương có tích phân suy rộng hội tụ, và $\varepsilon_n(x)$ hội tụ đều đến 0 trên $[a,+\infty)$ thì

$$\int_a^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^{+\infty} f_n(x)\,dx$$

Chứng minh. Với $\varepsilon > 0$ cho trước, ta có $\varphi(x)$ là hàm dương có tích phân suy rộng hội tụ nên $\lim_{A\to+\infty}\int_A^{+\infty}\varphi(x)\,dx = 0$ nên tồn tại $A_0 > 0$ sao cho với mọi $A > A_0$ ta được

$$\int_A^{+\infty} \varphi(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

Mặt khác $\varepsilon_n(x)$ hội tụ đều về 0 trên đoạn $[a,+\infty)$ nên tồn tại $n_1 > 0$ sao cho $|\varepsilon_n(x)| < 1$, khi $n > n_1$, và với mọi $x \in [a,+\infty)$

Khi đó

$$\begin{aligned}\left|\int_A^{+\infty} r_n(x)dx\right| &= \left|\int_A^{+\infty} \varepsilon_n(x)\cdot\varphi(x)\,dx\right| \\ &\le \int_A^{+\infty} |\varepsilon_n(x)|\cdot\varphi(x)\,dx \\ &< \int_A^{+\infty} \varphi(x)\,dx \\ &< \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

Ta có $\varphi(x)$ là hàm dương có tích phân suy rộng trên $[a,+\infty)$ nên ta có

$$\int_a^A \varphi(x)\,dx \le \int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx = M \text{ , với } M \in \mathbb{R}$$

Mặt khác $\varepsilon_n(x)$ hội tụ đều về 0 nên tồn tại $n_2 > 0$ sao cho với mọi $n > n_2$ ta được

$$|\varepsilon_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2M+1}, \text{ với } x \in [a,+\infty)$$

Khi đó với mọi $A > a$

$$\begin{aligned}\left|\int_a^A r_n(x)\,dx\right| &= \left|\int_a^A \varepsilon_n(x)\varphi(x)\,dx\right| \\ &\le \int_a^A |\varepsilon_n(x)|\cdot\varphi(x)\,dx \\ &< \frac{\varepsilon}{2M+1}\cdot\int_a^A \varphi(x)\,dx \\ &= \frac{M\varepsilon}{2M+1} < \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

Ta có các hàm $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ có tích phân suy rộng trên $[a,+\infty)$ hội tụ nên

$$\sum_{k=1}^{n} \int_a^{+\infty} f_k(x)\,dx = \int_a^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right)dx .$$

Chọn $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Khi đó với mọi $n > n_0, n_0 > 0$, với mọi $x \in [a,+\propto)$ ta ước lượng

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\int_a^{+\infty} f_k(x)\,dx-\int_a^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)dx\right|=\left|\int_a^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right)dx-\int_a^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)dx\right|$$

$$=\left|\int_a^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx-\sum_{k=1}^{n} f_n(x)\right)dx\right|$$

$$=\left|\int_a^{+\infty} r_n(x)dx\right|$$

$$\le\left|\int_a^{A} r_n(x)dx\right|+\left|\int_A^{+\infty} r_n(x)dx\right|$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

Vậy $\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^{+\infty} f_n(x)\,dx=\int_a^{+\infty}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx$. Định lý được chứng minh.

Ví dụ. Chúng ta xét một chuỗi hàm với mục đích mô tả các điều kiện của các định lý trên. Ta có chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2x}{x^4+n}-\frac{2x}{x^4+n+1}\right)$ hội tụ đều về $\frac{2x}{x^4+1}$ trên $[0,\infty)$. Do đó ta có

$$\int_0^{\infty}\Big[\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{2x}{x^4+n}-\frac{2x}{x^4+n+1}\Big)\Big]dx=\int_0^{\infty}\frac{2x}{x^4+1}dx=\frac{\pi}{2}.$$

Mặt khác ta tính trực tiếp được

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\Big(\frac{2x}{x^4+n}-\frac{2x}{x^4+n+1}\Big)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{\pi}{2\sqrt{n}}-\frac{\pi}{2\sqrt{n+1}}\Big)=\frac{\pi}{2}.$$

Vì vậy đối với chuỗi đang xét ta có

$$\int_0^{\infty}\Big[\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{2x}{x^4+n}-\frac{2x}{x^4+n+1}\Big)\Big]dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\Big(\frac{2x}{x^4+n}-\frac{2x}{x^4+n+1}\Big)dx$$

Bây giờ chúng ta kiểm tra các điều kiện của các định lý 1 và định lý 2. Bây giờ ta xét chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{x}\Big(\frac{2x}{x^4+n}-\frac{2x}{x^4+n+1}\Big)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{\arctan\frac{x^2}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}-\frac{\arctan\frac{x^2}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+1}}\Big).$$

Chuỗi này hội tụ đều về hàm $\arctan x^2$ trên $[0,\infty)$ bởi vì với mọi $x\in[0,\infty)$

$$|s_n(x)-\arctan x^2|=\left|\frac{\arctan\frac{x^2}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+1}}\right|\le\frac{\pi}{2\sqrt{n+1}}$$

trong đó $s_n(x)$ là tổng riêng thứ n. Vậy các điều kiện của Định lý 1 đều thỏa.

Mặt khác, phần dư thứ n của chuỗi hàm đã cho là

$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \Big(\frac{2x}{x^4+k} - \frac{2x}{x^4+k+1} \Big) = \frac{2x}{x^4+n+1} = \frac{2x(x^2+1)}{x^4+n+1} \frac{1}{(x^2+1)}$$

Ta có thể chọn $\varphi(x) = \frac{1}{x^2+1}$ vì $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2}$. Khi đó $\varepsilon_n(x) = \frac{2x(x^2+1)}{x^4+n+1}$ và

$$|\varepsilon_n(x)| = \frac{2x^3}{x^4+n+1} + \frac{2x}{x^4+n+1} < \frac{\sqrt[4]{3^3}}{2\sqrt[4]{n+1}} + \frac{\sqrt[4]{3^3}}{2\sqrt[4]{(n+1)^3}} < \frac{\sqrt[4]{3^3}}{\sqrt[4]{n+1}}$$

với mọi $x \in [0, \infty)$, cho nên dãy $\{\varepsilon_n(x)\}$ hội tụ đều về 0. Như vậy các điều kiện của Định lý 2 đều thỏa.

Trong chuỗi hàm vừa xét ta nhận thấy rằng "độ khó" về việc kiểm tra các điều kiện trong các định lý 1 và định lý 2 dường như không khác biệt. Tuy nhiên nếu ta xét các chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x(x^4+n)(x^4+n+1)}$ hay $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2(x^2+n)(x^2+n+1)}$ trên khoảng $[1,\infty)$ thì ta nhận ra các hàm $\varepsilon_n(x)$ và $\varphi(x)$ thỏa điều kiện định lý 1 dễ dàng hơn với việc tìm chuỗi hàm các tích phân xác định và chứng minh nó hội tụ đều theo yêu cầu của điều kiện định lý 2.

3. Kết luận

Như vậy chúng tôi đã nêu ra các điều kiện đủ để chúng ta có thể chuyển đổi dấu tích phân suy rộng với cận vô tận và dấu tổng của chuỗi hàm trong hai định lý trong bài viết, bên cạnh đó chúng tôi có đưa ra một ví dụ để mô tả các điều kiện của các định lý. Phép chứng minh được trình bày chi tiết ở bài viết này không có trong các giáo trình về giải tích cũng như trong các tài liệu tham khảo của bài viết này.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Đậu Thế Cấp, Nguyễn Huỳnh Phán, Nguyễn Thái Sơn, Trần Đình Thanh (2007), *Giải tích Toán học*, Nhà xuất bản Giáo dục.

[2]. Thomas S. Fiske (1897), Note on the integration of a uniformly convergent series through an infinite interval, *Bulletin of the American Mathematical Society*. Volume 3, Number 6, 223-224.

[3]. Nguyễn Văn Khuê, Phạm Ngọc Thao, Lê Mậu Hải, Nguyễn Đình Sang (1997), *Toán Cao Cấp: Tập I (A_1)*, Nhà xuất bản Giáo dục.

[4]. W. F. Osgood (1896), A geometrical method for the treatment of uniform convergence and certain double limits, *Bulletin of the American Mathematical Society*. Volume 3, Number 2, 59-86.

[5]. Nguyễn Đình Trí, Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh (2009), *Toán học Cao Cấp, Tập hai: Phép tính giải tích một biến số*, Nhà xuất bản Giáo dục.

[6]. Vũ Tuấn, Phan Đức Thành, Ngô Xuân Sơn (1988), *Giải tích Toán học, tập hai*, Nhà xuất bản Giáo dục.

ABSTRACT

SUFFICIENT CONDITIONS FOR INTERCHANGING THE INTEGRAL SIGN OF IMPROPER INTEGRAL OVER SERIES OF FUNCTIONS

In the theory of series of functions, there is a well-known result that if a series converges uniformly on an interval and these functions are integrable on the interval, then its sum is also an integrable function on the interval. The main purpose of this article is to present a counterexample for an improper integral and the proofs of sufficient conditions for two generalizations of this result for improper integrals in [2].