VẬN DỤNG LÝ THUYẾT CHUYỂN HÓA SƯ PHẠM CỦA DIDACTIC TOÁN VÀO VIỆC TÌM TÒI PHÁT HIỆN LỜI GIẢI CÁC BÀI TOÁN Ở TRƯỜNG PHỔ THÔNG

• GS.TS. Đào Tam (*)

Tóm tắt

Trong bài báo này chúng tôi đưa ra cách giải các bài toán phổ thông nhờ sử dụng kiến thức của toán học cao cấp, sau đó nhờ hoạt động chuyển đổi ngôn ngữ chuyển sang cách giải phổ thông và sử dụng hoạt động tương tự hóa theo cấu trúc để phát hiện tìm tòi các bài toán mới.

1. Mở đầu

Một trong những yếu tố lý thuyết cơ bản của didactic toán là lý thuyết chuyển hoá sư phạm. Lý thuyết này đề cập đến vấn đề chuyển hoá các đối tượng tri thức bác học (Savoir Savant) thành đối tượng tri thức được giảng dạy.

Các giai đoạn chủ yếu của quá trình chuyển hoá sư phạm là

Tri thức bác học *(Thể chế tạo tri thức)*	→	Tri thức cần dạy *(Thể chế chuyển tri thức)*	→	Tri thức được dạy *(Thể chế dạy học)*

Quá trình chuyển hoá này tạo ra sự khác biệt (đôi khi khá lớn) giữa tri thức cần dạy và tri thức được dạy so với tri thức bác học.

Nghiên cứu khoa học luận về tri thức cần dạy sẽ cho phép làm rõ sự khác biệt này và do đó làm rõ đặc trưng của tri thức cần dạy so với tri thức bác học. Nó giúp chúng ta có cái nhìn không hoàn toàn bị bó hẹp trong hệ thống dạy học hay bó hẹp trong phạm vi chương trình sách giáo khoa. Từ đó cho phép nhìn nhận tri thức chương trình sách giáo khoa trên một quan điểm cao, hợp nhất nhiều sự kiện riêng lẻ thành cái tổng thể, khái quát; đặc biệt cho phép định hướng phát hiện vấn đề trong dạy học toán ở trường phổ thông bằng tri thức toán cao cấp, toán hiện đại sau đó chuyển hoá sư phạm sang cách giải quyết phổ thông nhờ quá trình chuyển đổi ngôn ngữ sang ngôn ngữ phổ thông, ngôn ngữ dạy học phù hợp với đặc điểm nhận thức của học sinh. Chẳng hạn, khái niệm hai véc tơ cùng phương được định nghĩa trong sách giáo khoa hình học lớp 10 là: "Hai véc tơ có giá song song hoặc trùng nhau". Nhiều giáo viên không nhận thức được cơ sở toán học hiện đại của khái niệm này là gì? và họ dạy học sinh

---

(*) Trường Đại học Đồng Tháp, Hội giảng dạy toán học phổ thông.

khái niệm mà bản thân không nắm được bản chất. Giáo viên không hiểu phương trên mặt phẳng hay không gian. Có thể hiểu nội dung khái niệm phương trên mặt phẳng hay không gian như sau:

Trên mặt phẳng hay không gian xét tập hợp {D} các đường thẳng. Trên đó xét R - quan hệ song song hoặc trùng nhau của hai đường thẳng. Quan hệ R là quan hệ tương đương. Do vậy ta có các lớp {D}/R, mỗi lớp là họ các đường thẳng song song hoặc trùng nhau, mỗi lớp là một phương trong mặt phẳng hay không gian.

Khi chúng ta nói phép chiếu song song phương d lên mặt phẳng (P) thì d là đại diện của một phương. Khi nói qua phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$ mọi phương đều bất biến có nghĩa là qua $T_{\vec{v}}$ ảnh của đường thẳng a là đường thẳng a’ sao cho hoặc a’ song song với a hoặc a’ trùng a.

Trên đây chúng tôi giới thiệu khái quát về lý thuyết chuyển hoá sư phạm và vai trò của nó trong việc xem xét tri thức sách giáo khoa. Dưới đây chúng tôi xét vai trò của lý thuyết chuyển hoá sư phạm nhằm sử dụng tri thức toán học cao cấp, toán học hiện đại tìm tòi lời giải các bài toán phổ thông và khám phá các bài toán mới.

2. Nội dung nghiên cứu

Nghiên cứu của chúng tôi tập trung vào việc khai thác các phương thức chuyển hoá sư phạm nhằm phát hiện cách giải các bài toán và phát hiện các bài toán mới ở trường phổ thông.

Phương thức 1: **Khai thác cách giải bài toán phổ thông nhờ sử dụng kiến thức toán cao cấp, toán hiện đại, sau đó chuyển sang cách giải phổ thông.**

Ví dụ 1: Xét bài toán “cho 7 số tự nhiên đôi một khác nhau. Biết rằng tổng của 4 số bất kỳ trong 7 số đó lớn hơn tổng của 3 số còn lại cộng với 2010. Chứng minh rằng mỗi số trong 7 số nói trên lớn hơn 2013”.

Cách giải cao cấp: Tập hợp gồm 7 số trên là tập sắp thứ tự toàn phần nên tồn tại phần tử bé nhất. Giả sử các số trên sắp theo thứ tự: $a_1 < a_2 < ... < a_7$. Khi đó chỉ cần chứng minh $2013 < a_1$. Theo giả thiết $a_5 + a_6 + a_7 + 2010 < a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \Leftrightarrow (a_5 - a_2) + (a_6 - a_3) + (a_7 - a_4) + 2010 < a_1$

$$\Leftrightarrow 2013 < a_1$$

Từ đó chuyển sang cách giải phổ thông theo các bước sau:

- Sắp xếp các số trên theo thứ tự $a_1 < a_2 < ... < a_7$.
- Sử dụng giả thiết $a_5 + a_6 + a_7 + 2010 < a_1 + a_2 + a_3 + a_4$.
- Biến đổi tương đương làm triệt tiêu tổng $a_2 + a_3 + a_4$ để suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 2: “Một lớp học nếu xếp học sinh một bàn ngồi 4 em thì còn 3 em chưa có chỗ ngồi; nếu xếp mỗi bàn ngồi 5 em thì còn thừa 2 bàn. Hãy tìm số học sinh của lớp”.

Xét cách giải nhờ sử dụng song ánh: giả sử học sinh đang xếp mỗi bàn ngồi 5 em. Chọn ra mỗi bàn đúng 1 em và xếp vào 2 bàn còn thừa mỗi bàn 4 em. Do đó nếu A là tập hợp số bàn xếp 5 em lúc đầu; B là tập hợp số học sinh chọn ra. Khi đó ta có song ánh f từ A đến B. Do số phần tử của B bằng 8 + 3 = 11. Từ đó số bàn xếp 5 em là 11 bàn. Suy ra số học sinh là 11 x 5 = 55 (em).

Chuyển sang cách giải mới cho học sinh lớp 4 trường tiểu học theo tiến trình như sau:

- Giả sử mỗi bàn xếp 5 em

- Chọn ra mỗi bàn đúng 1 em và xếp vào 2 bàn còn thừa mỗi bàn 4 em thì còn 3 em chưa có chỗ ngồi vậy số học sinh của lớp là 11 x 5 = 55.

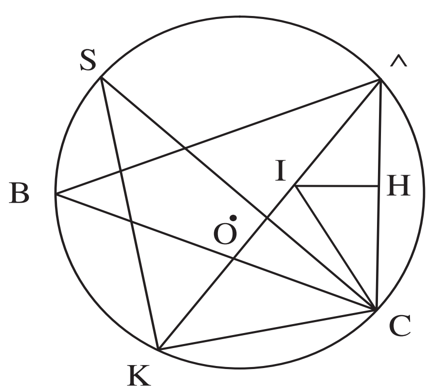
<u>Phương thức 2:</u> **Sử dụng các bất biến của các ánh xạ để định hướng đúng và huy động đúng kiến thức để giải các bài toán đặt ra**

Phương thức này nhằm giải đáp câu hỏi: Dựa trên cơ sở nào để huy động đúng kiến thức để giải một bài toán?

Chẳng hạn khi gặp các bài toán tính độ dài, độ lớn góc, chứng minh các hệ thức về lượng liên quan đến tích các độ dài, bình phương độ dài thì có thể sử dụng tích vô hướng hoặc hình học đồng dạng. Nhận xét trên có thể giải thích bằng kiến thức của hình học cao cấp. Khi chuyển từ không gian afin đến không gian Euclide, chúng ta cần bổ sung các tiên đề về tích vô hướng. Cũng có thể dùng hình học đồng dạng để nghiên cứu hệ thức lượng trong các hình. Giáo viên có thể hướng dẫn học sinh THPT hiểu nhận xét trên bằng tri thức sách giáo khoa.

Ví dụ: Xét bài toán sau đây: "Gọi O, I lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp của tam giác ABC; R, r lần lượt là bán kính của các đường tròn nói trên. Chứng minh rằng $OI^2 = R^2 - 2Rr$".

Có thể sử dụng tích vô hướng để giải bài toán trên và nhờ sử dụng bài toán quen thuộc sau: "gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = 0$" cũng có thể giải bài toán này bằng sử dụng các tam giác đồng dạng SKC và AHI, trong đó CS = 2R, IH = r và sử dụng tam giác KIC cân (xem hình 1).



Hình 1

Phương thức 3: **Sử dụng mô hình toán cao cấp, toán hiện đại về một đối tượng, quan hệ toán học và tìm cách diễn đạt chúng theo ngôn ngữ phổ thông để tập dượt cho sinh viên phát hiện bài toán mới**

Chẳng hạn xét mô hình: "Cho tập $A = \{a_1, a_2,..., a_m\}$ và tập $B = \{b_1, b_2,..., b_n\}$ là tập sắp thứ tự toàn phần, trong đó $m < n$. Khi đó mỗi đơn ánh f từ A vào B bảo toàn thứ tự trong B là một tổ hợp chập m của n phần tử. Số các đơn ánh như vậy bằng C_n^m ".

Có thể xét bài toán ở trường phổ thông tương thích với mô hình trên như sau nhờ sử dụng ngôn ngữ toán phổ thông: "cho 10 số tự nhiên: 0, 1,..., 9. Có bao nhiêu số có 5 chữ số chia hết cho 5 sao cho số hàng đơn vị bé hơn số hàng chục, số hàng chục bé hơn số hàng trăm, số hàng trăm bé hơn số hàng nghìn và số hàng nghìn bé hơn số hàng vạn".

Phương thức 4. **Sử dụng tương tự theo cấu trúc để mở rộng bài toán từ mặt phẳng sang không gian hoặc chuyển hoá các bài toán không gian thành bài toán phẳng.**

Ta xét ví dụ khái niệm m-đơn hình trong không gian afin m chiều A^m sau đây: trong A^m cho m + 1 điểm độc lập $\{A_0, A_1,..., A_m\}$. m-đơn hình xác định bởi m + 1 điểm nói trên là tập hợp những điểm X sao cho với mọi điểm O ta có $\overrightarrow{OM} = \sum_0^m \alpha_i \overrightarrow{XA_i}$ với $\sum_0^m \alpha_i = 1$. Với cách hiểu đó, 1-đơn hình xác định bởi 2 điểm phân biệt A, B là đoạn thẳng AB; 2-đơn hình xác định bởi 3 điểm A, B, C không thẳng hàng là tam giác ABC; 3-đơn hình xác định bởi 4 điểm không đồng phẳng A, B, C, D là tứ diện ABCD.

Như vậy tam giác và tứ diện có cấu trúc 2-đơn hình và 3-đơn hình là trường hợp đặc biệt của m-đơn hình. Từ đó chúng có những tính chất afin tương tự.

Chúng ta có thể xác lập sự tương tự cấu trúc giữa đường thẳng và mặt phẳng; giữa hình bình hành và hình hộp; giữa đường tròn và mặt cầu trong không gian.

Bây giờ ta xét bài toán phẳng: cho tam giác MNP. Qua các đỉnh M, N, P lần lượt vẽ các đường thẳng m, n, p tương ứng song song với các đường thẳng PN, PM, MN. Các đường thẳng n, p cắt nhau tại A, các đường thẳng p, n cắt nhau tại B và đường thẳng m, n cắt nhau tại C. Chứng minh rằng các điểm M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC.

Bạn đọc có thể giải bài toán trên nhờ sử dụng tính chất của hình bình hành và phát biểu bài toán tương tự trong không gian như sau: Cho tứ diện MNPQ. Qua các đỉnh MNPQ lần lượt vẽ các mặt phẳng tương ứng song song với mặt phẳng (NPQ), (QMP), (MNQ), (MNP), các mặt phẳng trên đôi một cắt nhau tạo thành tứ diện ABCD có các mặt nhận các điểm M, N, P, Q làm trọng tâm.

3. Kết luận

Những nội dung nghiên cứu trên đây của chúng tôi làm sáng tỏ vai trò của lý thuyết chuyển hoá sư phạm vận dụng vào hoạt động phát hiện vấn đề và cách giải quyết vấn đề nhằm nâng cao tiềm lực của giáo viên đáp ứng yêu cầu tổ chức phát hiện trong dạy học Toán ở trường phổ thông.

Bạn đọc có thể tiếp tục nghiên cứu mở rộng các bài toán phổ thông thành các bài toán mới nhằm để khai thác tiềm năng sách giáo khoa nhờ việc sử dụng các hình tương đương đối với các ánh xạ./.

Tài liệu tham khảo

[1]. Lê Thị Hoài Châu, Lê Văn Tiến (2003), *Vai trò của phân tích khoa học luận lịch sử toán học trong nghiên cứu và thực hành dạy học môn toán,* Đề tài NCKH cấp bộ, ĐHSP TP. HCM.

[2]. Đào Tam (2005), *Giáo trình hình học sơ cấp*, NXB ĐHSP Hà Nội.

[3]. TS. Chu Trọng Thanh (chủ biên), TS. Trần Trung (2010), *Cơ sở toán học hiện đại của kiến thức môn toán phổ thông*, NXB Giáo dục Việt Nam.

Summary

This article aims to present ways of solving high school mathematical problems by using advanced mathematics, then simplifying the language to make them more accessible to learners so that they can use general solutions to deal with these mathematical problems and apply similar problem solving methods to new mathematical problems.