PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRẮC ĐỊA CỰC TIỂU TRÊN ĐA TẠP VỚI MẬT ĐỘ VÀ CÁC ĐƯỜNG TRẮC ĐỊA TRÊN MẶT PHẲNG VỚI MẬT ĐỘ TUYẾN TÍNH

• ThS. Trần Lê Nam (*)

Tóm tắt

Bài báo tổng quát khái niệm đường trắc địa lên đa tạp với mật độ, đưa ra phương trình của chúng dựa vào các ký hiệu Christoffel. Từ đó, chúng tôi chứng minh rằng trên mặt phẳng với mật độ tuyến tính, trong địa phương các đường cong nối hai điểm p, q, đường cong γ_0 *có độ dài theo mật độ nhỏ nhất khi và chỉ khi nó có độ cong theo mật độ bằng 0.*

1. Giới thiệu

Việc nghiên cứu hình học vi phân trên đa tạp với mật độ ngày càng tăng trong 7 năm qua bởi những nhà Toán học, sinh viên đại học, học viên cao học và nghiên cứu sinh sau khi bài báo "Manifolds with density" của giáo sư Frank Morgan xuất bản ở tạp chí Notices Amer. Math. Soc. Journal năm 2005. Một đa tạp với mật độ là một đa tạp Riemann với một hàm trơn dương, gọi là mật độ, được sử dụng làm trọng số cho cả thể tích và diện tích của siêu mặt. Tiêu biểu cho lớp đa tạp này là không gian Gauss. Đây là một không gian được quan tâm rất nhiều trong Toán ứng dụng. Các thông tin chi tiết về đa tạp với mật độ, bạn đọc có thể tham khảo thêm ở các tài liệu [2], [3], [6]. Đối với lớp đa tạp với mật độ, trong nhiều vấn đề của hình học, bài toán đẳng chu được quan tâm nhiều nhất, ngay cả trường hợp 1- hoặc 2-chiều [2], [3], [4], [5], [9],... Chúng ta biết rằng, nghiệm của miền đẳng chu có biên là một đường cong với độ cong theo mật độ là một hằng số. Trong đó, các đường trắc địa đóng vai trò quan trọng.

Gromov [8] đề xuất một cách tổng quát độ cong trung bình của một siêu mặt trên đa tạp với mật độ e^{φ} bởi đẳng thức

$$H_{\varphi} = H - \frac{1}{n-1}\frac{d\varphi}{dn}$$

và do đó, tổng quát độ cong theo mật độ của một đường cong được xác định bởi đẳng thức:

$$k_{\varphi} = k - \frac{d\varphi}{dn}$$

ở đó H là độ cong trung bình của một siêu mặt, k là độ cong đại số của đường cong và n là

(*) Trường Đại học Đồng Tháp.

trường pháp vector hướng ra ngoài của siêu mặt hoặc trường pháp vector của đường cong. Sự mở rộng đó đã được kiểm tra thỏa mãn các điều kiện của biến phân về độ dài [6]. Chúng ta gọi k_φ là độ cong theo mật độ của đường cong.

Trong hình học vi phân cổ điển, nhiều kết quả về đường trắc địa được công bố [1], [10],… Trong số đó, phương trình đường trắc địa có nhiều ứng dụng. Dựa vào phương pháp biến phân của Lagrange, chúng ta có phương trình xác định các đường trắc địa trên đa tạp Riemann dạng:

$$\frac{d^2\gamma^k}{dt^2}+\sum_{i,j=1}^{n}\left(\Gamma_{ij}^k\circ\gamma\right)\frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^j}{dt}=0,\ k=1,2,\ldots,n$$

Ở đó, Γ_{ij}^k là các ký hiệu Christoffel. Mục 2 của bài báo mở rộng khái niệm đường trắc địa trên đa tạp với mật độ và và xây dựng khái niệm φ-tác động. Mệnh đề 2.9 chỉ ra một đường cong là φ-tác động cực tiểu khi và chỉ khi nó vận tốc theo mật độ hằng và cực tiểu độ dài theo mật độ. Mệnh đề 2.10 tổng quát phương trình của đường trắc địa lên đa tạp với mật độ.

Mục 3 dựa vào Mệnh đề 2.10 để đưa ra phương trình các đường trắc địa trên mặt phẳng với mật độ tuyến tính. Từ đó, chúng tôi chứng minh rằng một đường cong có độ dài theo mật độ ngắn nhất nối hai điểm trên mặt phẳng với mật độ tuyến tính khi và chỉ khi nó có φ-độ cong bằng 0 tại mọi điểm.

2. Phương trình đường trắc địa trên đa tạp với mật độ

2.1. Đạo hàm theo mật độ

Cho M là một đa tạp với mật độ $e^{\varphi(x)}$ và $f:\langle a,b\rangle\subseteq\mathbb{R}\to M$ là một hàm trơn. *φ – đạo hàm của hàm f* tại điểm $t_0\in\langle a,b\rangle$ được định nghĩa bởi đẳng thức:

$$\frac{d_\varphi f}{dt}(t_0):=e^{\varphi(f(t_0))}\frac{df}{dt}(t_0)$$

với $\frac{df}{dt}$ là đạo hàm của hàm f trên đa tạp M.

Từ định nghĩa trên, chúng ta lập tức thu được Hệ quả.

2.2. Hệ quả

Cho $f:I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n, t\to f(t)$ và $\tau:J\subset\mathbb{R}\to I, s\to\tau(s)$ là các hàm khả vi. Khi đó, chúng ta có:

$$\frac{d_\varphi(f\circ\tau)}{ds}=\left(\left(\frac{d_\varphi f}{dt}\right)\circ\tau\right).\frac{d\tau}{ds}.$$

2.3. Độ dài cung theo mật độ

Cho (M,g) là một đa tạp Riemann với mật độ e^φ và $\gamma:\langle a,b\rangle\to M$ là một đường cong trơn từng khúc trên *M*. *Độ dài cung theo mật độ* $\ell_{\varphi}(\gamma)$ của đường cong γ được định nghĩa bởi đẳng thức:

$$\ell_{\varphi}(\gamma) := \int_a^b \sqrt{g_{\gamma}\left(\frac{d_{\varphi}\gamma}{dt}, \frac{d_{\varphi}\gamma}{dt}\right)}dt = \int_a^b e^{\varphi\circ\gamma} \sqrt{g_{\gamma}\left(\frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt}\right)}dt.$$

2.4. Đường trắc địa cực tiểu trên đa tạp với mật độ

Cho (M, g) là một đa tạp Riemann với mật độ e^{φ}. $\varphi-$ *khoảng cách* giữa hai điểm *p* và *q* trên M là cận dưới của tập tất cả độ dài cung theo mật độ của các đường cong trơn từng khúc trên M nối hai điểm *p* và *q*, ký hiệu $d_{\varphi}(p,q)$.

Nếu tồn tại một đường cong trơn từng khúc γ nối điểm *p* và *q* sao cho độ dài cung theo mật độ của nó bằng với $\varphi-$ khoảng cách giữa hai điểm đó thì đường cong γ được gọi là một *đường trắc địa cực tiểu trên đa tạp với mật độ* hay *$\varphi-$ trắc địa cực tiểu.*

Như chúng ta biết, độ dài Riemann của một đường cong độc lập với việc chọn tham số hóa của nó. Độ dài cung theo mật độ vẫn đảm bảo được tính chất đó qua bổ đề sau.

2.5. Bổ đề

Cho (M, g) là một đa tạp Riemann với mật độ e^{φ} và $\gamma : \langle a,b\rangle \to M$ là một đường cong trơn nối hai điểm p và q. Khi đó, độ dài cung theo mật độ của γ không phụ thuộc vào tham số hóa của nó. Nghĩa là, nếu chúng ta tham số tương đương γ bởi vi phôi $\tau : \langle a',b'\rangle \to \langle a,b\rangle$ thì đường cong $\gamma' = \gamma\circ\tau$ có cùng độ dài cung theo mật độ với γ.

Chứng minh.

Giả sử $\gamma : \langle a,b\rangle \to M, s \mapsto \gamma(s)$ và $\gamma' : \langle a',b'\rangle \to M,\ t \mapsto \gamma'(t).$

Theo định nghĩa độ dài cung theo mật độ, chúng ta được:

$$\begin{aligned}
\ell_{\varphi}(\gamma') &= \int_{a'}^{b'} e^{\varphi(\gamma')} \sqrt{g_{\gamma'}\left(\frac{d\gamma'}{dt}, \frac{d\gamma'}{dt}\right)}dt \\
&= \int_{a'}^{b'} e^{\varphi(\gamma\circ\tau)} \sqrt{g_{(\gamma\circ\tau)}\left(\frac{d(\gamma\circ\tau)}{dt}, \frac{d(\gamma\circ\tau)}{dt}\right)}dt \\
&= \int_{a'}^{b'} e^{\varphi(\gamma\circ\tau)} \sqrt{g_{\gamma(\tau)}\left(\frac{d\gamma}{ds}(\tau)\frac{d\tau}{dt}, \frac{d\gamma}{ds}(\tau)\frac{d\tau}{dt}\right)}dt \\
&= \int_a^b e^{\varphi(\gamma)} \sqrt{g_{\gamma}\left(\frac{d\gamma}{ds}, \frac{d\gamma}{ds}\right)}ds = \ell_{\varphi}(\gamma).
\end{aligned}$$

Do đó, độ dài của γ không phụ thuộc vào tham số hóa của nó.

2.6. Mệnh đề

Cho (M,g) là một đa tạp Riemann với mật độ e^{φ} và $\gamma:\langle a,b\rangle \to M$ là một đường cong trơn sao cho $\frac{d\gamma}{dt}(t)\neq 0, \forall t\in\langle a,b\rangle$. Khi đó, tồn tại một vi phôi $\tau:\langle a,b\rangle\to\langle a,b\rangle$ sao cho $\left|\frac{d_{\varphi}(\gamma\circ\tau)}{dt}(t)\right|$ là độc lập với t.

Chứng minh.

Xét hàm $s:\langle a,b\rangle\to\langle 0,l\rangle, t\mapsto \int_a^t e^{\varphi\circ\gamma}\sqrt{g_{\gamma}\left(\frac{d\gamma}{dt},\frac{d\gamma}{dt}\right)}dt$, ở đó l độ dài theo mật độ của đường cong γ.

Chúng ta dễ thấy $\frac{ds}{dt}>0$. Theo định lý hàm ngược, tồn tại một hàm khả vi $\psi:\langle 0,l\rangle\to\langle a,b\rangle,\ t_s\mapsto\psi(t_s)$ sao cho:

$$\left(\frac{d\psi}{dt_s}\left(t_{s_0}\right)\right)\left(\frac{ds}{dt}\left(\psi\left(t_{s_0}\right)\right)\right)=1,\ \forall t_{s_0}\in\langle 0,l\rangle.$$

Từ đó suy ra:

$$\frac{d\psi}{dt_s}=\frac{1}{e^{\varphi\circ\gamma}\sqrt{g_{\gamma}\left(\frac{d\gamma}{dt},\frac{d\gamma}{dt}\right)}}. \tag{2.1}$$

Đặt $\tau:\langle a,b\rangle\to\langle 0,l\rangle,\ s\mapsto\psi\left(\frac{(s-a)l}{b-a}\right)$. Rõ ràng, τ là một vi phôi.

Hơn nữa, chúng ta lại có:

$$\left|\frac{d_{\varphi}\gamma\circ\tau}{ds}\right|=\left|e^{\varphi(\gamma\circ\tau)}\frac{d\left(\gamma\circ\tau\right)}{ds}\right|=\left|e^{\varphi(\gamma\circ\tau)}\left(\frac{d\gamma}{dt}(\tau)\right)\frac{d\tau}{ds}\right|=\frac{l}{b-a}\left|e^{\varphi(\gamma\circ\tau)}\left(\frac{d\gamma}{dt}(\tau)\right)\frac{d\psi}{dt_s}\right|. \tag{2.2}$$

Từ các phương trình (2.1) và (2.2), chúng ta được $\left|\frac{d_{\varphi}\gamma\circ\tau}{ds}\right|=\frac{l}{b-a}=\text{const}.$ □

2.7. Định nghĩa

Cho hai điểm *p*, *q* trên đa tạp Riemann *(M,g)* với mật độ e^{φ} và $\gamma:\langle a,b\rangle\to M$ là một đường cong trơn nối hai điểm đó. Ta gọi $\varphi-$ *tác động* hay *phiếm hàm năng lượng theo mật độ* của γ là phiếm hàm.

$$\mathcal{A}(\gamma) := \int_a^b \left|\frac{d_\varphi \gamma}{dt}\right|^2 dt = \int_a^b e^{2\varphi\circ\gamma}\left|\frac{d\gamma}{dt}\right|^2 dt. \qquad (2.3)$$

2.8. Mệnh đề

Cho (M,g) là một đa tạp Riemann với mật độ e^{φ} và $\gamma : \langle a,b\rangle \to M$ *là một đường cong trơn nối hai điểm p và q trên M. Giả sử khi* s *di chuyển từ a đến b, ảnh của nó di chuyển với vận tốc hằng theo mật độ, nghĩa là* $\left|\frac{d_\varphi \gamma}{ds}(s)\right|$ *là một hằng số theo biến s. Với* $\gamma' = \gamma\circ\tau : \langle a,b\rangle \to M$ *là một tham số hóa tương đương của* γ*, chúng ta có:*

$$\mathcal{A}(\gamma') \geq \mathcal{A}(\gamma) \qquad (2.4)$$

đẳng thức thỏa mãn khi và chỉ khi τ *là ánh xạ đồng nhất.*

Chứng minh.

Để chứng minh mệnh đề trên, chúng ta sử dụng bất đẳng thức [10, tr.119]:

Cho $\tau : [a,b] \to [a,b]$ *là một hàm đơn điệu, biến đầu mút của đoạn* $[a,b]$ *thành đầu mút của đoạn* $[a,b]$. *Khi đó,* $\int_a^b \left(\frac{d\tau}{dt}\right) dt \geq b-a$. *Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi* τ *là một ánh xạ đồng nhất.*

Chứng minh mệnh đề.

Giả sử $\left|\frac{d_\varphi \gamma}{ds}(s)\right| = c,\ \forall s \in \langle a,b\rangle$. Khi đó, chúng ta có: $\mathcal{A}(\gamma) = \int_a^b \left|\frac{d_\varphi \gamma}{ds}\right|^2 ds = c^2(b-a).$

Mặt khác, theo định nghĩa của $\varphi -$ tác động của hàm γ', chúng ta được:

$$\mathcal{A}(\gamma') = \int_a^b \left|\frac{d_\varphi \gamma'}{dt}\right|^2 dt = \int_a^b \left|\frac{d_\varphi \gamma\circ\tau}{dt}\right|^2 dt = \int_a^b \left|\frac{d_\varphi \gamma}{ds}\frac{d\tau}{dt}\right|^2 dt$$

$$= \int_a^b \left|\frac{d_\varphi \gamma}{ds}\right|^2 \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 dt = c^2 \int_a^b \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 dt \geq c^2(b-a).$$

Từ đó suy ra $\mathcal{A}(\gamma') \geq \mathcal{A}(\gamma)$.

Chúng ta dễ thấy dấu "=" xảy ra khi và và chỉ khi τ là một ánh xạ đồng nhất.

2.9. Mệnh đề

Cho M là một đa tạp Riemann với mật độ e^{φ}, *hai điểm p, q trên M. Khi đó, trong số các đường cong nối hai điểm p và q,* γ_0 *là* $\varphi-$ *tác động cực tiểu nếu chỉ nếu* γ_0 *có* $\varphi-$ *vận tốc hằng và* γ_0 *cực tiểu độ dài theo mật độ.*

Chứng minh.

Giả sử γ_0 là một tác động cực tiểu. Gọi $\overline{\gamma}_0$ là một tham số hóa tương đương với γ_0, với $\varphi-$ vận tốc hằng. Khi đó, chúng ta có:

$$\mathcal{A}(\gamma_0) \le \mathcal{A}(\overline{\gamma}_0) \le \mathcal{A}(\gamma_0).$$

Điều này suy ra: $\mathcal{A}(\gamma_0) = \mathcal{A}(\overline{\gamma}_0)$. Do đó $\gamma_0 \equiv \overline{\gamma}_0$.

Với mọi đường cong γ trên M, nối hai điểm p và q, gọi γ là tham số hóa tương đương với γ_0 có $\varphi-$ vận tốc hằng. Khi đó, chúng ta có:

$$\left|\frac{d_{\varphi}\overline{\gamma}}{dt}\right|^2 (b-a) = \mathcal{A}(\overline{\gamma}) \ge \mathcal{A}(\gamma_0) = \left|\frac{d_{\varphi}\gamma_0}{dt}\right|^2 (b-a).$$

Do đó, $\left|\frac{d_{\varphi}\overline{\gamma}}{dt}\right| \ge \left|\frac{d_{\varphi}\gamma_0}{dt}\right|.$

Mặt khác, chúng ta lại có:

$$\ell_{\varphi}(\gamma) = \ell_{\varphi}(\overline{\gamma}) = \left|\frac{d_{\varphi}\overline{\gamma}}{dt}(t)\right|(b-a) \ge \left|\frac{d_{\varphi}\gamma_0}{dt}(s)\right|(b-a) = \ell_{\varphi}(\gamma_0).$$

Ngược lại, nếu γ_0 là một φ-vận tốc hằng và độ dài cung cực tiểu theo mật độ. Tính toán trực tiếp chúng ta thấy γ_0 là một $\varphi-$ tác động cực tiểu. □

2.10. Mệnh đề.

Đường cong $\gamma:[a,b]\to M, t\mapsto(\gamma_i(t))$ *là một đường trắc địa cực tiểu theo mật độ nếu và chỉ nếu*

$$\frac{d^2\gamma^k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^{n}\left(\Gamma_{ij}^k(\gamma) + 2g_{ik}(\gamma)\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(\gamma) - g_{ij}(\gamma)\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(\gamma)\right)\frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^j}{dt} = 0, \quad \forall k = 1,\ldots,n,$$

ở đó Γ_{ij}^k *là các ký hiệu Christoffel, được xác định bởi các hệ số metric Riemann*

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_l g^{lk}\left(\frac{\partial g_{li}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l}\right),$$

với (g^{ij}) *là ma trận nghịch đảo của ma trận* (g_{ij}).

Chứng minh.

Chúng ta xét hàm F được xác định bởi:

$$F\left(\gamma(t),\frac{d\gamma}{dt}(t)\right)=\sum_{i,j=1}^{n}e^{2\varphi(\gamma(t))}g_{ij}\left(\gamma(t)\right)\frac{d\gamma^i}{dt}(t)\frac{d\gamma^j}{dt}(t).$$

Khi đó, chúng ta có $\mathcal{A}(\gamma)=\int_a^b F\left(\gamma(t),\frac{d\gamma}{dt}(t)\right)dt$.

Do γ là một đường trắc địa cực tiểu khi và chỉ khi γ thỏa mãn điều kiện Euler-Lagrange của hàm F .

$$\frac{\partial F}{\partial x_k}\left(\gamma(t),\frac{d\gamma}{dt}(t)\right)=\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial v_k}\left(\gamma(t),\frac{d\gamma}{dt}(t)\right).$$

Chúng ta tính vế trái và vế phải của phương trình trên.

$$\frac{\partial F}{\partial x_k}\left(\gamma,\frac{d\gamma}{dt}\right)=\mathrm{e}^{2\varphi(\gamma(t))}\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}+2g_{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right)(\gamma)\frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^j}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial v_k}\left(\gamma,\frac{d\gamma}{dt}\right)=2\mathrm{e}^{2\varphi(\gamma(t))}\left(\sum_{i=1}^{n}g_{ik}(\gamma)\frac{d^2\gamma^i}{dt^2}+\left(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j}(\gamma)+2\sum_{i,j=1}^{n}g_{ik}(\gamma)\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(\gamma)\right)\frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^j}{dt}\right).$$

Từ đó, chúng ta có:

$$\sum_{i=1}^{n}g_{ik}(\gamma)\frac{d^2\gamma^i}{dt^2}+\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j}(\gamma)\frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^j}{dt}-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}(\gamma)\frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^j}{dt}+\left(\sum_{i,j=1}^{n}2g_{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}-g_{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right)(\gamma)\frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^j}{dt}=0.$$

$$\Rightarrow\frac{d^2\gamma^k}{dt^2}+\sum_{i,j=1}^{n}\left(\Gamma_{ij}^k(\gamma)+2g_{ik}(\gamma)\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(\gamma)-g_{ij}(\gamma)\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(\gamma)\right)\frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^j}{dt}=0,\quad\forall k=1,\ldots,n.$$

3. Đường trắc địa trên mặt phẳng với mật độ tuyến tính

3.1. Độ cong theo mật độ của đường tham số trên mặt phẳng với mật độ tuyến tính

Mặt phẳng với mật độ tuyến tính là mặt phẳng $\mathbb{R}^2$ với hàm mật độ e^{ax+by}. Chúng ta dễ thấy rằng các điểm nằm trên một đường thẳng của mặt phẳng với mật độ tuyến tính có cùng mật độ. Do đó, với một phép quay thích hợp, chúng ta có thể xét hàm mật độ dạng e^x. Khi đó, độ cong theo mật độ k_φ của đường cong tham số $\alpha:I\to\mathbb{R}^2, t\mapsto\left(x(t),y(t)\right)$ được tính bởi công thức:

$$k_\varphi(t)=\frac{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)}{\left(x'(t)^2+y'(t)^2\right)^{3/2}}+\frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}}. \tag{2.5}$$

Đặc biệt, nếu (α) có tham số hóa tự nhiên thì $k_\varphi=x'y''+x''y'+y'$.

Ví dụ: Các đường thẳng $ax+by+c=0,\ a^2+b^2\neq 0$ trên mặt phẳng $\mathbb{R}^2$ với mật độ e^x có độ cong k_φ là một số và bằng $a/\sqrt{a^2+b^2}$.

Chúng ta đã biết một đường tham số có độ dài ngắn nhất nối hai điểm trên mặt phẳng là đoạn thẳng. Nếu nhìn kết quả đó theo quan điểm độ cong thì đường cong có độ cong bằng 0 chính là đường có độ dài ngắn nhất nối 2 điểm [1]. Kết quả đó thay đổi như thế nào nếu chúng ta gia thêm mật độ tuyến tính vào mặt phẳng $\mathbb{R}^2$? Để tìm câu trả lời, chúng ta hãy xác định tham số hóa của các đường cong có độ cong theo mật độ bằng 0 trên mặt phẳng đó.

3.2. Định lý

Trên mặt phẳng với mật độ e^x, đường cong tham số hóa chính qui (α) có độ cong theo mật độ bằng 0 tại mọi điểm khi và chỉ khi nó là đường thẳng, một phần của đường thẳng song song với trục Ox hoặc sai khác ảnh của đường tham số

$$(\alpha_0):\ \begin{cases} x(t)=\ln\left(e^t+e^{-t}\right) \\ y(t)=2\arctan\left(e^t\right) \end{cases}$$

một phép tịnh tiến.

Chứng minh.

Xét $\alpha(t)=\left(x(t),y(t)\right)$ là một đường cong tham số hóa tự nhiên, có độ cong theo mật độ bằng 0 tại mọi điểm. Chúng ta có thể giả sử $\begin{cases} x'=\cos(2\xi) \\ y'=\sin(2\xi) \end{cases}$. Khi đó, ta có:

$$k_\varphi = k-\frac{d\varphi}{dn}=2\xi'+\sin(2\xi).$$

Do đó, $k_\varphi=0$ khi và chỉ khi $2\xi'+\sin(2\xi)=0$. (2.6)

Nếu tồn tại s_0 để $\sin\left(2\xi(s_0)\right)=0$ thì $\xi(s)=\pi/2$ là nghiệm duy nhất của phương trình (2.6), do sin là một hàm Lipschitz. Trong trường hợp này, α là một đường thẳng song song với trục Ox .

Trong trường hợp ngược lại, chúng ta xét phương trình (2.6) với ξ trong đoạn $(0,\pi/2)$. Trong trường hợp này, $\sin(\xi)>0,\ \cos(\xi)>0$ với mọi s . Giải phương trình (2.6), chúng ta được:

$-s+b=\ln\left|\tan\xi\right|=\ln\tan\xi$ (do $\tan\xi>0$).

Do đó, $e^{-s+b}=\tan\xi.$ Chúng ta có thể giả sử $b=0$ và thu được:

$$\begin{cases} x(s) = \int \dfrac{1-e^{-2s}}{1+e^{-2s}} ds = \ln\left(e^{s} + e^{-s}\right) + c_1 \\ y(s) = \int \dfrac{2e^{-s}}{1+e^{-2s}} ds = 2\arctan\left(e^{s}\right) + c_2 \end{cases} \tag{2.7}$$

Tương tự, giải phương trình (2.6) trong đoạn $(\pi/2, \pi)$, chúng ta được:

$$\begin{cases} x(s) = \int \dfrac{1-e^{-2s}}{1+e^{-2s}} ds = \ln\left(e^{s} + e^{-s}\right) + c_1 \\ y(s) = \int \dfrac{-2e^{-s}}{1+e^{-2s}} ds = -2\arctan\left(e^{s}\right) + c_2 \end{cases} \tag{2.8}$$

Do vết của đường cong xác định bởi phương trình (2.8) là ảnh của đường cong xác định bởi phương trình (2.7) qua phép đối xứng trục Ox nên Định lý 3.2 được chứng minh. □

3.3. Định lý

Trên mặt phẳng với mật độ e^{x}, đường cong có độ dài theo mật độ ngắn nhất trong các đường nối hai điểm A và B hoặc là đoạn thẳng AB hoặc là có tham số hóa dạng

$$\alpha(t) = \left(\ln \frac{|4cc_1|}{4+(c_1t+c_2)^2},\ \arctan\frac{c_1t+c_2}{4} + c_3 \right),\ c,\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R},\ c \neq 0. \tag{2.9}$$

Chứng minh.

Với đường cong $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ trên mặt phẳng với mật độ tuyến tính, phiếm hàm F trong chứng minh Mệnh đề 2.10 được xác định bởi:

$$F = e^{2x}\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \right).$$

Áp dụng Mệnh đề 2.10, chúng ta có:

$$\begin{cases} 2e^{2x}\left(\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2 \right) = \dfrac{d}{dt}\left(2e^{2x}\dfrac{dx}{dt}\right) \\ 0 = \dfrac{d}{dt}\left(2e^{2x}\dfrac{dy}{dt}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 - \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2 = 0 \\ e^{2x}\dfrac{dy}{dt} = c \end{cases},\ c \in \mathbb{R}.$$

Nếu $c = 0$ thì $\begin{cases} x(t) = at + b \\ y(t) = \text{const} \end{cases}$, $a, b \in \mathbb{R}$ là các đường trắc địa. Đây chính là các đoạn thẳng song song với trục hoành.

Nếu $c \neq 0$, chúng ta có $\begin{cases} x(t) = \ln \dfrac{|4cc_1|}{4+(c_1t+c_2)^2} \\ y(t) = \arctan \dfrac{c_1t+c_2}{4} + c_3 \end{cases}$, $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. □

3.4. Mệnh đề

Trên mặt phẳng $\mathbb{R}^2$ với mật độ e^x, đường tham số (α) có độ dài cung theo mật độ ngắn nhất trong địa phương các đường cong nối hai điểm p và q nếu và chỉ nếu độ cong theo mật độ của nó bằng 0 tại mọi điểm.

Chứng minh.

Nếu đường cong (α) có độ dài cung ngắn nhất trong các đường cong nối hai điểm p và q, nó phải hoặc là đoạn thẳng song song với trục Ox hoặc có tham số hóa dạng (2.9). Khi đó, tính toán trực tiếp, chúng ta thấy độ cong của nó bằng 0 tại mọi điểm.

Ngược lại, nếu độ cong k_φ của (α) bằng 0 tại mọi điểm, (α) phải hoặc có vết là một đoạn thẳng song song với trục Ox hoặc có tham số hóa dạng:

$$(\alpha): \begin{cases} x(t) = \ln(e^t + e^{-t}) + c_1 \\ y(t) = 2\arctan(e^t) + c_2 \end{cases}.$$

Nếu (α) có tham số hóa dạng trên, chúng ta xét hàm $L(x, y, x', y') = e^x\sqrt{x'^2 + y'^2}$. Đối với đường cong (α), do $x'^2(t) + y'^2(t) = 1$ nên chúng ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial x'}\right) = \dfrac{d\left(e^{x(t)}.x'(t)\right)}{dt} = \left(e^t + e^{-t}\right)e^{c_1} = e^{x(t)} = e^{x(t)}\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = \dfrac{\partial L}{\partial x} \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial y'}\right) = \dfrac{d\left(e^{x(t)}.y'(t)\right)}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\left(e^t + e^{-t}\right)\dfrac{e^t}{1+e^{2t}}\right) = \dfrac{d}{dt}(1) = 0 = \dfrac{\partial L}{\partial y} \end{cases}.$$

Từ đó suy ra, tham số hóa của đường cong (α) là một điểm tới hạn của biến phân $J = \int_a^b L(x, y, x', y')dt$. Hơn nữa, chúng ta dễ thấy L là một hàm lồi ngặt theo 2 biến x, y. Theo điều kiện Euler – Lagrange, $J(\alpha)$ là giá trị cực tiểu địa phương. Tức là, (α) là đường tham số có độ dài cung theo mật độ ngắn nhất nối 2 điểm p và q một cách địa phương./.

Tài liệu tham khảo

[1]. M. P. D. Carmo (1976), *Differential geometry of curves and surfaces,* Prentice-Hall, Engle-wood Cliffs, NJ.

[2]. R. Corwin, N. Hoffman, S. Hurder, V. Sesum, and Y. Xu (2006), "Differential geometry of manifolds with density", *Rose-Hulman Und. Math. J.*, 7 (1).

[3]. A. Cannas Da Silva (2001), *Lectures on Symplectic Geometry*, Spriger – Verlag – New York – Berlin –- Heidelberg – Tokyo.

[4]. M. Gromov (2003), "Isoperimetry of waists and concentration of maps", *Geom. Funct. Anal.*, No. 13, P. 178-215.

[5]. C. Ivan, H. Stephanie, A. Vojislav, And Y. Xu (2004), "Double bubbles in Gauss space and highdimensional spheres, and differential geometry of manifolds with density", *Geometry group report, Williams College. Prentice-Hall, Englewood Clids N. J.*

[6]. Q. Maurmann and F. Morgan (2009), "Isoperimetric comparison theorems for manifolds with Density", *Calc. Var. PDE,* Number 36, No. 1, P. 1-5.

[7]. F. Morgan (2005), "Manifolds with density", *Notices Amer. Math. Soc.*, Number 52, P. 853-858.

[8]. F. Morgan (2006), "Myers Theorem with density", *Kodai Math. J.*, Number 29, P. 454-460.

[9]. F. Morgan (2009), "Manifolds with density and Perelman's proof of the Poincare Conjecture", *Amer. Math. Monthly*, Number 116, P. 134-142.

[10]. C. Rosales, A. Cãnete, V. Bayle and F. Morgan (2008), "On the isoperimetric problem in Euclidean space with density", *Calc. Var. PDE,* Number 31, no. 1, P. 27-46.

Summary

The article generalizes the notion of geodesic curves in manifolds with density and presents their equations based on Christoffel symbols. Accordingly, we prove that on plane with linear density, of all curves joining the two points of p and q, the curve γ_0 minimizes density arc-length if and only if its curvature equals 0.