VỀ ĐỊNH LÍ ĐIỂM BẤT ĐỘNG TRÊN KHÔNG GIAN *S* -MÊTRIC THỨ TỰ BỘ PHẬN

• ThS. Nguyễn Trung Hiếu (*)

Tóm tắt

Trong bài báo này, chúng tôi thiết lập các định lí điểm bất động trên không gian S - mêtric thứ tự bộ phận và chứng minh rằng các định lí điểm bất động trong [6] được suy ra từ các định lí này. Đồng thời, chúng tôi xây dựng ví dụ minh họa cho kết quả đạt được.

1. Giới thiệu

Trong [7], S. Sedghi, N. Shobe và A. Aliouche đã giới thiệu một khái niệm mêtric suy rộng như sau.

Định nghĩa 1.1 ([7], Definition 2.1). Cho X là tập khác rỗng. Ánh xạ $S : X \times X \times X \to [0,+\infty)$ được gọi là *S -mêtric* trên X nếu các điều kiện sau được thỏa mãn với mọi $x, y, z, a \in X$.

(1) $S(x,y,z) \geq 0$;

(2) $S(x,y,z) = 0$ nếu và chỉ nếu $x = y = z$;

(3) $S(x,y,z) \leq S(x,x,a) + S(y,y,a) + S(z,z,a)$.

Cặp (X, S) được gọi là *không gian S-mêtric*.

Khái niệm S -mêtric là sự mở rộng của khái niệm D^* -mêtric [7]. Đồng thời, trong [7] các tác giả cũng giới thiệu các tính chất của S -mêtric và chứng minh định lí điểm bất động cho ánh xạ co trên không gian này. Từ đó, việc mở rộng các định lí điểm bất động trên không gian mêtric sang không gian S -mêtric được một số tác giả quan tâm như [1], [3], [4], [8].

Trong [5], M. S. Khan, M. Swaleh và S. Sessa đã giới thiệu khái niệm hàm biến thiên khoảng cách như sau.

Định nghĩa 1.2 ([5]). Hàm $\psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ được gọi là *hàm biến thiên khoảng cách* nếu các điều kiện sau được thỏa mãn.

(1) ψ là hàm liên tục và không giảm;

(2) $\psi(t) = 0$ nếu và chỉ nếu $t = 0$.

Đồng thời, trong bài báo này, các tác giả cũng đã thiết lập định lí điểm bất động bằng cách sử dụng hàm biến thiên khoảng cách. Từ đó, việc thiết lập các định lí điểm bất động thông qua lớp hàm biến thiên khoảng cách được một số tác giả quan tâm nghiên cứu như trong [2], [9], [10].

(*) Khoa SP Toán - Tin, Trường Đại học Đồng Tháp.

Gần đây, trong bài báo [6], Y. Su và các tác giả đã sử dụng hàm biến thiên khoảng cách để thiết lập định lí điểm bất động trên không gian mêtric thứ tự bộ phận và đạt được các kết quả như [6, Theorem 2.1], [6, Theorem 2.2] và [6, Theorem 2.3]. Từ đó, chúng tôi đặt vấn đề thiết lập các định lí điểm bất động tương tự như các định lí điểm bất động trong [6] cho không gian S -mêtric thứ tự bộ phận và chứng minh rằng các định lí điểm bất động trong [6] được suy ra từ các định lí này. Đồng thời, chúng tôi cũng xây dựng ví dụ minh họa cho một số kết quả đạt được.

Trước hết, chúng tôi giới thiệu các khái niệm và kết quả được sử dụng trong bài báo này.

Mệnh đề 1.3 ([7], Lemma 2.5). *Cho (X,S) là không gian S-mêtric. Khi đó*

$$S(x,x,y)=S(y,y,x) \text{ với mọi } x,y\in X.$$

Mệnh đề 1.4 ([1], Lemma 1.6). *Cho (X,S) là không gian S-mêtric. Khi đó*

$$S(x,x,z)\le 2S(x,x,y)+S(y,y,z) \text{ với mọi } x,y,z\in X.$$

Định nghĩa 1.5 ([7], Definition 2.8). Cho (X,S) là không gian S-mêtric và $A\subset X$. Khi đó

(1) Tập con A của X được gọi là S-*bị chặn* nếu tồn tại $r>0$ sao cho $S(x,x,y)<r$ với mọi $x,y\in A$.

(2) Dãy $\{x_n\}\subset X$ được gọi là *hội tụ* về x nếu $S(x_n,x_n,x)\to 0$ khi $n\to+\infty$. Điều này có nghĩa là với mỗi $\varepsilon>0$, tồn tại $n_0\in\mathbb{N}$ sao cho với mọi $n\ge n_0$ thì $S(x_n,x_n,x)<\varepsilon$. Kí hiệu là $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=x$ hay $x_n\to x$ khi $n\to+\infty$.

(3) Dãy $\{x_n\}\subset X$ được gọi là *dãy Cauchy* nếu $S(x_n,x_n,x_m)\to 0$ khi $n,m\to+\infty$. Nói cách khác, $\{x_n\}$ là *dãy Cauchy* khi và chỉ khi với mọi $\varepsilon>0$, tồn tại $n_0\in\mathbb{N}$ sao cho với mỗi $n,m\ge n_0$ thì $S(x_n,x_n,x_m)<\varepsilon$.

(4) Không gian S-mêtric (X,S) được gọi là *đầy đủ* nếu với mọi dãy Cauchy trong (X,S) đều hội tụ.

Mệnh đề 1.6 ([7], Lemma 2.10). *Cho (S,X) là không gian S-mêtric. Nếu dãy $\{x_n\}$ trong X hội tụ đến x thì x duy nhất.*

Mệnh đề 1.7 ([7], Lemma 2.12). *Cho (S,X) là không gian S-mêtric. Nếu tồn tại hai dãy $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ sao cho $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=x$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n=y$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} S(x_n,x_n,y_n)=S(x,x,y)$.*

Mệnh đề 1.8 ([8], Corollary 2.4). *Cho $T:X\to Y$ là ánh xạ từ không gian S-mêtric X vào không gian S-mêtric Y. Khi đó, T liên tục tại $x\in X$ nếu và chỉ nếu $Tx_n\to Tx$ với mọi dãy $\{x_n\}\subset X$ mà $x_n\to x$.*

Định nghĩa 1.9 ([6], Definition 2.1). Cho $(X,\le)$ là tập sắp thứ tự và ánh xạ $T:X\to X$. Khi đó, T là ánh xạ *đơn điệu không giảm* nếu với mọi $x,y\in X$, $x\le y$ thì $T(x)\le T(y)$.

Mệnh đề 1.10 ([6], Lemma 2.1). *Nếu* ψ *là hàm biến thiên khoảng cách và* $\varphi : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ *là hàm liên tục sao cho* $\psi(t) > \varphi(t)$ *với mọi* $t > 0$ *thì* $\varphi(0) = 0$.

2. Các kết quả chính

Trước hết, chúng tôi thiết lập và chứng minh mệnh đề được sử dụng trong các kết quả chính ở phần sau.

Mệnh đề 2.1. *Cho* (X,d) *là không gian mêtric. Khi đó*

(1) Với mọi $x,y,z \in X$, $S_d(x,y,z) = \frac{1}{2}[d(x,z) + d(y,z)]$ *là một* S*-mêtric trên* X.

(2) Dãy $\{x_n\}$ *hội tụ trong* (X,d) *khi và chỉ khi dãy* $\{x_n\}$ *hội tụ trong* (X,S_d).

(3) Dãy $\{x_n\}$ *là Cauchy trong* (X,d) *khi và chỉ khi dãy* $\{x_n\}$ *là Cauchy trong* (X,S_d).

(4) Không gian mêtric (X,d) *đầy đủ khi và chỉ khi không gian* S*-mêtric* (X,S_d) *là đầy đủ.*

Chứng minh. (1) Kiểm tra trực tiếp các điều kiện của một S-mêtric.

(2) Suy ra từ đẳng thức $S_d(x_n,x_n,x) = d(x_n,x)$.

(3) Suy ra từ đẳng thức $S_d(x_n,x_n,x_m) = d(x_n,x_m)$.

(4) Suy ra từ (2) và (3). □

Tiếp theo, chúng tôi thiết lập và chứng minh các định lí chính của bài báo.

Định lí 2.2. *Cho* $(X,\le,S)$ *là không gian* S*-mêtric thứ tự bộ phận, đầy đủ và* $T : X \to X$ *là ánh xạ liên tục, không giảm sao cho*

$$\psi(S(Tx,Tx,Ty)) \le \varphi(S(x,x,y)) \text{ với mọi } x \ge y, \tag{1}$$

trong đó, ψ *là hàm biến thiên khoảng cách và* $\varphi : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ *là một hàm liên tục sao cho* $\psi(t) > \varphi(t)$ *với mọi* $t > 0$. *Nếu tồn tại* $x_0 \in X$ *sao cho* $x_0 \le Tx_0$ *thì* T *có điểm bất động.*

Chứng minh. Do T là ánh xạ không giảm nên bằng qui nạp ta chứng minh được

$$x_0 \le Tx_0 \le T^2x_0 \le \ldots \le T^n x_0 \le T^{n+1}x_0 \le \ldots \text{ với } n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Đặt $x_{n+1} = Tx_n$ với $n \in \mathbb{N}$. Khi đó từ (2), ta được

$$x_0 \le x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n \le x_{n+1} \le \ldots \tag{3}$$

Từ (1), (3) và tính chất của hàm φ, ta được

$$\psi(S(x_{n+1},x_{n+1},x_n)) = \psi(S(Tx_n,Tx_n,Tx_{n-1})) \le \varphi(S(x_n,x_n,x_{n-1})) \le \psi(S(x_n,x_n,x_{n-1})). \tag{4}$$

Do (4) và tính chất của hàm ψ nên

$$S(x_{n+1}, x_{n+1}, x_n) \leq S(x_n, x_n, x_{n-1}).$$

Do đó, dãy $\{S(x_{n+1}, x_{n+1}, x_n)\}$ là dãy số không âm, đơn điệu không tăng. Suy ra, tồn tại $r \geq 0$ sao cho

$$\lim_{n\to+\infty} S(x_{n+1}, x_{n+1}, x_n) = r. \tag{5}$$

Cho $n \to +\infty$ trong (4), kết hợp với (5) và tính chất của hàm φ, ψ, ta được

$$\psi(r) \leq \varphi(r). \tag{6}$$

Do (6) và tính chất của hàm φ nên $r = 0$. Do đó

$$\lim_{n\to+\infty} S(x_{n+1}, x_{n+1}, x_n) = 0. \tag{7}$$

Tiếp theo, ta chứng minh $\{x_n\}$ là dãy Cauchy trong X. Giả sử rằng $\{x_n\}$ không là dãy Cauchy trong X. Khi đó, tồn tại $\varepsilon > 0$ và tồn tại hai dãy con $\{x_{n_k}\}$, $\{x_{m_k}\}$ của dãy $\{x_n\}$ sao cho n_k là chỉ số nhỏ nhất thỏa mãn $n_k > m_k > k$ và

$$S(x_{n_k}, x_{n_k}, x_{m_k}) \geq \varepsilon \text{ với mọi } k \geq 1. \tag{8}$$

Do đó

$$S(x_{n_k-1}, x_{n_k-1}, x_{m_k}) < \varepsilon. \tag{9}$$

Từ (8), (9) và Mệnh đề 1.4, ta được

$$\varepsilon \leq S(x_{n_k}, x_{n_k}, x_{m_k}) \leq 2S(x_{n_k}, x_{n_k}, x_{n_k-1}) + S(x_{n_k-1}, x_{n_k-1}, x_{m_k}) < 2S(x_{n_k}, x_{n_k}, x_{n_k-1}) + \varepsilon. \tag{10}$$

Cho $k \to +\infty$ trong (10) và sử dụng (7), ta được

$$\lim_{k\to+\infty} S(x_{n_k}, x_{n_k}, x_{m_k}) = \varepsilon. \tag{11}$$

Sử dụng Mệnh đề 1.3 và Mệnh đề 1.4, ta có

$$\begin{aligned} S(x_{n_k}, x_{n_k}, x_{m_k}) &\leq 2S(x_{n_k}, x_{n_k}, x_{n_k-1}) + S(x_{m_k}, x_{m_k}, x_{n_k-1}) \\ &\leq 2S(x_{n_k}, x_{n_k}, x_{n_k-1}) + 2S(x_{m_k}, x_{m_k}, x_{m_k-1}) + S(x_{n_k-1}, x_{n_k-1}, x_{m_k-1}). \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} S(x_{n_k-1}, x_{n_k-1}, x_{m_k-1}) &\leq 2S(x_{n_k-1}, x_{n_k-1}, x_{n_k}) + S(x_{m_k-1}, x_{m_k-1}, x_{n_k}) \\ &\leq 2S(x_{n_k-1}, x_{n_k-1}, x_{n_k}) + 2S(x_{m_k-1}, x_{m_k-1}, x_{m_k}) + S(x_{n_k}, x_{n_k}, x_{m_k}). \end{aligned} \tag{13}$$

Cho $k \to +\infty$ trong (12), (13) và sử dụng (7), (11), ta được

$$\lim_{k\to+\infty} S(x_{n_k-1}, x_{n_k-1}, x_{m_k-1}) = \varepsilon. \tag{14}$$

Vì $x_{n_k-1} \geq x_{m_k-1}$ nên từ (1) ta có

$$\psi(S(x_{n_k}, x_{n_k}, x_{m_k})) = \psi(S(Tx_{n_k-1}, Tx_{n_k-1}, Tx_{m_k-1})) \leq \varphi(S(x_{n_k-1}, x_{n_k-1}, x_{m_k-1})). \quad (15)$$

Cho $k \to +\infty$ trong (15) và sử dụng (11), (14), ta được

$$\psi(\varepsilon) \leq \varphi(\varepsilon). \quad (16)$$

Từ (16) và tính chất của hàm φ ta có $\varepsilon = 0$. Điều này mâu thuẫn với $\varepsilon > 0$. Do đó, $\{x_n\}$ là dãy Cauchy trong X. Vì X là không gian S-mêtric đầy đủ nên tồn tại $z \in X$ sao cho $x_n \to z$ khi $n \to +\infty$. Do tính liên tục của T nên $z = \lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} Tx_n = Tz$. Điều này chứng tỏ z là điểm bất động của T. □

Hệ quả 2.3 ([6], Theorem 2.1). *Cho $(X, \leq, d)$ là không gian mêtric thứ tự bộ phận, đầy đủ và $T: X \to X$ là ánh xạ liên tục, không giảm sao cho*

$$\psi(d(Tx, Ty)) \leq \varphi(d(x, y)) \text{ với mọi } x \geq y,$$

trong đó, ψ là hàm biến thiên khoảng cách và $\varphi: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ là một hàm liên tục sao cho $\psi(t) > \varphi(t)$ với mọi $t > 0$. Nếu tồn tại $x_0 \in X$ sao cho $x_0 \leq Tx_0$ thì T có điểm bất động.

Chứng minh. Trong Định lí 2.2, chọn S-mêtric là $S_d(x, y, z) = \frac{1}{2}[d(x, z) + d(y, z)]$ với mọi $x, y, z \in X$ và sử dụng Mệnh đề 2.1 ta được điều phải chứng minh. □

Giả thiết liên tục của ánh xạ T trong Định lí 2.3 có thể được thay bằng giả thiết (H) như sau: *Nếu dãy $\{x_n\}$ là dãy không giảm trên X sao cho $x_n \to x$ thì $x_n \leq x$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.* Khi đó, ta được định lí sau.

Định lí 2.4. *Cho $(X, \leq, S)$ là không gian S-mêtric thứ tự bộ phận, đầy đủ thỏa mãn giả thiết (H) và $T: X \to X$ là ánh xạ không giảm sao cho*

$$\psi(S(Tx, Tx, Ty)) \leq \varphi(S(x, x, y)) \text{ với mọi } x \geq y, \quad (17)$$

trong đó, ψ là hàm biến thiên khoảng cách và $\varphi: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ là một hàm liên tục sao cho $\psi(t) > \varphi(t)$ với mọi $t > 0$. Nếu tồn tại $x_0 \in X$ sao cho $x_0 \leq Tx_0$ thì T có điểm bất động.

Chứng minh. Lập luận tương tự như trong chứng minh Định lí 2.2, ta được dãy $\{x_n\}$ không giảm và $x_n \to z \in X$. Ta sẽ chứng minh $Tz = z$.

Từ giả thiết (H) ta có $x_n \leq z$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Khi đó, sử dụng (17) và Mệnh đề 1.3, ta có

$$\psi(S(x_{n+1}, x_{n+1}, Tz)) = \psi(S(Tx_n, Tx_n, Tz)) \leq \varphi(S(x_n, x_n, z)). \quad (18)$$

Cho $n \to +\infty$ trong (18) và sử dụng tính chất của hàm ψ, ta được

$$\psi(S(z,z,Tz)) \le \varphi(0). \tag{19}$$

Từ (19) và Mệnh đề 1.10, ta được $\psi(S(z,z,Tz)) = 0$. Do ψ là hàm biến thiên khoảng cách nên $S(z,z,Tz) = 0$ hay $Tz = z$. Do đó, z là điểm bất động của T. □

Hệ quả 2.5 ([6], Theorem 2.2). *Cho $(X, \le, d)$ là không gian mêtric thứ tự bộ phận, đầy đủ thỏa mãn giả thiết (H) và $T : X \to X$ là ánh xạ không giảm sao cho*

$$\psi(d(Tx,Ty)) \le \varphi(d(x,y)) \text{ với mọi } x \ge y,$$

trong đó, ψ là hàm biến thiên khoảng cách và $\varphi : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ là một hàm liên tục sao cho $\psi(t) > \varphi(t)$ với mọi $t > 0$. Nếu tồn tại $x_0 \in X$ sao cho $x_0 \le Tx_0$ thì T có điểm bất động.

Chứng minh. Trong Định lí 2.4, chọn S-mêtric là $S_d(x,y,z) = \frac{1}{2}[d(x,z) + d(y,z)]$ với mọi $x,y,z \in X$ và sử dụng Mệnh đề 2.1 ta được điều phải chứng minh. □

Ví dụ sau đây chứng tỏ điểm bất động của ánh xạ T trong Định lí 2.2 và Định lí 2.4 là không duy nhất.

Ví dụ 2.6. Xét $X = \{(1,0),(0,1)\} \subset \mathbb{R}^2$ và thứ tự trên X như sau: $(a,b) \le (c,d) \Leftrightarrow a \le c, b \le d$. Trên X, xét S-mêtric S_d như trong Mệnh đề 2.1 với d là khoảng cách Euclid trên $\mathbb{R}^2$. Khi đó, (X, S_d) là không gian S-mêtric đầy đủ. Xét ánh xạ $Tx = x$ với mọi $x \in X$. Khi đó, T là ánh xạ liên tục và $(1,0) \le T(1,0) = (1,0)$. Vì các phần tử của X chỉ so sánh được với chính nó nên $\psi(S(Tx,Tx,Ty)) \le \varphi(S(x,x,y))$ với mọi $x, y \in X$, $x \ge y$. Hơn nữa, X cũng thỏa mãn giả thiết (H). Như vậy, các giả thiết trong Định lí 2.2 và Định lí 2.4 được thỏa mãn. Tuy nhiên, T có hai điểm bất động là $(0,1)$ và $(1,0)$.

Định lí sau cho ta tính duy nhất của điểm bất động.

Định lí 2.7. *Giả sử các giả thiết trong Định lí 2.2 hoặc Định lí 2.4 được thỏa mãn và với mỗi cặp $x, y \in X$ tồn tại $u \in X$ sao cho u so sánh được với x và y. Khi đó*

(1) T có duy nhất điểm bất động $z \in X$.

(2) Với mỗi $x \in X$, $\lim_{n\to+\infty} T^n x = z$.

Chứng minh. (1) Vì ánh xạ T thỏa mãn các giả thiết trong Định lí 2.2 hoặc Định lí 2.4 nên ánh xạ T có điểm bất động. Ta chỉ cần chứng minh tính duy nhất của điểm bất động. Giả sử z, y là hai điểm bất động của T và $z \ne y$. Khi đó, tồn tại $x \in X$ so sánh được với z và y. Do tính không giảm của T nên $T^n x$ so sánh được với $T^n z$ và $T^n y$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Vì $T^n x$ so sánh được với $T^n z$ nên

$$\psi(S(z,z,T^n x)) = \psi(S(T^n z,T^n z,T^n x)) \le \varphi(S(T^{n-1}z,T^{n-1}z,T^{n-1}x)) = \varphi(S(z,z,T^{n-1}x)). \tag{20}$$

Ta lại có

$$\varphi(S(z,z,T^{n-1}x)) \le \psi(S(z,z,T^{n-1}x)). \tag{21}$$

Từ (20), (21) và tính chất không giảm của hàm ψ ta suy ra $S(z,z,T^n x) \le S(z,z,T^{n-1}x)$. Do đó, dãy $\{S(z,z,T^n x)\}$ là dãy số không âm, đơn điệu không tăng. Suy ra, tồn tại $a \geq 0$ sao cho

$$a = \lim_{n\to+\infty} S(z,z,T^n x). \tag{22}$$

Cho $n \to +\infty$ trong (20), kết hợp với (22) và tính liên tục của hàm φ, ψ, ta được

$$\psi(a) \le \varphi(a). \tag{23}$$

Từ (23) và giả thiết của hàm φ ta suy ra $a = 0$. Do đó

$$\lim_{n\to+\infty} S(z,z,T^n x) = 0. \tag{24}$$

Vì $T^n x$ so sánh được với $T^n y$ nên lập luận tương tự như trên ta được

$$\lim_{n\to+\infty} S(y,y,T^n x) = 0. \tag{25}$$

Từ (24), (25) và tính duy nhất của giới hạn, ta được $y = z$.

(2) Do $x, z \in X$ nên tồn tại $y \in X$ so sánh được với x và z. Lập luận tương tự với chứng minh trong (1), ta được

$$\lim_{n\to+\infty} S(z,z,T^n y) = 0 \text{ và } \lim_{n\to+\infty} S(T^n x,T^n x,T^n y) = 0. \tag{30}$$

Mặt khác, theo Mệnh đề 1.3 và Mệnh đề 1.4, ta có

$$S(z,z,T^n x) \le 2S(z,z,T^n y) + S(T^n x,T^n x,T^n y). \tag{31}$$

Cho $n \to +\infty$ trong (31) và kết hợp với (30), ta được

$$\lim_{n\to+\infty} S(z,z,T^n x) = 0 \text{ hay } \lim_{n\to+\infty} T^n x = z.$$ □

Hệ quả 2.8 ([6], Theorem 2.3). *Giả sử các giả thiết trong Hệ quả 2.3 hoặc Hệ quả 2.5 được thỏa mãn và với mỗi cặp $x, y \in X$ tồn tại $u \in X$ sao cho u so sánh được với x và y. Khi đó*

(1) T có duy nhất điểm bất động z.

(2) Với mỗi $x \in X$, $\lim_{n\to+\infty} T^n x = z$.

Chứng minh. Trong Định lí 2.7, chọn S-mêtric là $S_d(x,y,z) = \frac{1}{2}[d(x,z) + d(y,z)]$ với mọi $x, y, z \in X$ và sử dụng Mệnh đề 2.1 ta được điều phải chứng minh. □

Cuối cùng, chúng tôi xây dựng hai ví dụ minh họa cho Định lí 2.4 và Định lí 2.7. Đồng thời, Ví dụ 2.9 còn chứng tỏ Định lí 2.4 mạnh hơn [7, Theorem 3.1].

Ví dụ 2.9. Trên $X = \{-3,-1,0,2,4\}$, xét S-mêtric xác định bởi $S(x,y,z) = |x-z| + |y-z|$. Khi đó, (X,S) là không gian S-mêtric đầy đủ. Trên X, xét thứ tự bộ phận như sau

$$x \le y \text{ trên } X \text{ nếu } x,y \in \{-3,-1,0\} \text{ và } x \le y \text{ trên } \mathbb{R}.$$

Trên X, xét ánh xạ T như sau $T(-3) = T(-1) = T0 = 0$, $T2 = -1, T4 = -3$. Khi đó

$$S(T2,T2,T4) = S(-1,-1,-3) = 2.|-1+3| = 4,$$

$$S(2,2,4) = 2.|4-2| = 4.$$

Do đó, không tồn tại $L \in [0,1)$ để $S(T2,T2,T4) \le L.S(2,2,4)$. Suy ra, T không thỏa mãn điều kiện của [7, Theorem 3.1]. Do đó, ta không thể áp dụng [7, Theorem 3.1] cho ánh xạ T.

Mặt khác, T là ánh xạ đơn điệu không giảm, $0 \le T0 = 0$ và với $\{x_n\}$ là dãy không giảm, hội tụ về x thì $x_n \le x$. Đồng thời, với x,y so sánh được với nhau thì $x,y \in \{-3,-1,0\}$. Do đó

$$\psi(S(Tx,Tx,Ty)) = \psi(0) = 0 \le \varphi(S(x,x,y)).$$

Như vậy, các giả thiết của Định lí 2.4 đều được thỏa mãn. Hơn nữa, 0 là điểm bất động duy nhất của ánh xạ T.

Ví dụ 2.10. Xét $X = [0,1]$ là không gian S-mêtric đầy đủ với thứ tự thông thường trên $\mathbb{R}$ và S-mêtric xác định bởi $S(x,y,z) = |x-z| + |y-z|$ với mọi $x,y,z \in X$. Xét ánh xạ $Tx = \frac{1}{2}\sin x$ với mọi $x \in X$ và hai hàm $\psi(t) = t, \varphi(t) = \frac{t}{2}$ với mọi $t \in [0,+\infty)$. Khi đó, T là ánh xạ liên tục, đơn điệu không giảm, $0 \le T0 = 0$, $\psi(t) > \varphi(t)$ với mọi $t > 0$. Đồng thời, với mọi $x,y \in X$ ta có

$$\psi(S(Tx,Tx,Ty)) = \psi(|\sin x - \sin y|) = |\sin x - \sin y| \le \varphi(S(x,x,y)) = \varphi(2|x-y|) = |x-y|.$$

Mặt khác, với mỗi cặp $x,y \in X$ đều tồn tại $z \in X$ sao cho z so sánh được với x và y. Như vậy, các giả thiết của Định lí 2.7 đều được thỏa mãn. Hơn nữa, 0 là điểm bất động duy nhất của ánh xạ T.

Tài liệu tham khảo

[1]. T. V. An and N. V. Dung, *Two fixed point theorems in S-metric spaces,(2012),* preprint.

[2]. J. Caballero, J. Harjani, and K. Sadarangani, *Contractive-like mapping principles in ordered metric spaces and application to ordinary differential equations*, Fixed Point Theory Appl. 2010, Article ID 916064, 14 pages, doi:10.1155/2010/916064.

[3]. N. V. Dung and N. T. Hieu, *One fixed point theorem for g-monotone maps on partially ordered S -metric spaces*, (2012), preprint.

[4] N. V. Dung, N. T. Hieu, and N. T. T. Ly, *A generalization of Ciric quasi-contractions for maps on S -metric spaces*, Thai. J. Math.(2013), accepted.

[5]. M. S. Khan, M. Swaleh, and S. Sessa, *Fixed point theorems by altering distances between the points*, Bull. Austral. Math. Soc, 30(1)(1984), 1-9.

[6]. R. Sastry and R. Babu, *Some fixed point theorems by altering distances between the points*, Indian J. pure appl. Math, 30(6) (1999), 641-647.

[7]. S. Sedghi, N. Shobe, and A. Aliouche, *A generalization of fixed point theorem in S-metric spaces*, Mat. Vesnik **64** (2011), no.3, 258-266.

[8]. S. Sedghi and N. V. Dung, *Fixed point theorem on S -metric spaces,* Mat. Vesnik (2012), accepted.

[9]. W. Shatanawi and A. Al-Rawashdeh, *Common fixed points of almost generalized* (ψ,φ)*-contractive mappings in ordered metric spaces*, Fixed Point Theory Appl. 2012, **2012**:80, 13 pages, doi:10.1186/1687-1812-2012-152.

[10]. Y. Su, Q. Feng, J. Zhang, Q. Cheng, and F. Yan, *A new contraction mapping principle in partially ordered metric spaces and applications to ordinary differential equations*, Fixed Point Theory Appl. 2012, **2012**:152 13 pages, doi:10.1186/1687-1812-2012-152.

Summary

In this paper, we state some fixed point theorems in a partially ordered S -metric space and show that the fixed point theorems in [6] may be obtained from these theorems. Also, we give some examples to illustrate the results.

Ngày nhận bài: 04/02/2013; Ngày nhận đăng: 23/6/2013.