TẬP ĐÓNG SUY RỘNG VÀ TẬP MỞ SUY RỘNG TRONG KHÔNG GIAN TÔPÔ

• ThS. Huỳnh Ngọc Cảm (*), ThS. Nguyễn Thành Nghĩa (*), ThS. Võ Đức Thịnh (*)

Tóm tắt

Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu tính chất giao vô hạn các tập g-đóng và hợp vô hạn các tập g-mở.

1. Giới thiệu và tổng quan

Năm 1970, khái niệm tập đóng suy rộng lần đầu tiên được N. Levine giới thiệu trong bài báo *Generalized closed sets in topology* nhằm mở rộng khái niệm tập đóng trong không gian tôpô [4]. Từ đó, tập đóng suy rộng đã thu hút sự quan tâm của nhiều tác giả.

Trong [3], Levine định nghĩa tập đóng suy rộng, tập mở suy rộng như sau:

Định nghĩa 1 ([3]). Giả sử *X* là một không gian tôpô.

1. Tập $A \subseteq X$ được gọi là *tập đóng suy rộng* (g*-đóng*) nếu với mỗi tập mở O của X mà $A \subseteq O$ thì $c(A) \subseteq O$ ($c(A)$ là bao đóng của A).

2. Tập $B \subseteq X$ được gọi là *tập mở suy rộng* (g*-mở*) nếu phần bù của nó là tập đóng suy rộng.

Từ đó tác giả đã đưa ra một số tính chất của tập g-đóng và g-mở như sau

Định lí 2 ([3]). Giả sử A_i, B_i, $i = 1,2,3,...,n$ lần lượt là các tập g-đóng và g-mở trong không gian tôpô *X*. Khi đó ta có các khẳng định sau:

1. $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ là tập g-đóng.

2. $\bigcap_{i=1}^{n} B_i$ là tập g-mở.

3. Hơn nữa, nếu B_i, $i = 1,2,3,...,n$ là các tập g-mở và đôi một tách được. Khi đó $\bigcup_{i=1}^{n} B_i$ là tập g-mở.

4. Nếu A_i, $i = 1,2,3,...,n$ là các tập g-đóng và đôi một tách được. Khi đó $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ là tập g-đóng.

(*) Khoa Sư phạm Toán - tin, Trường Đại học Đồng Tháp.

Tuy nhiên tác giả chưa đưa ra tính chất về giao vô hạn các tập g-đóng, và hợp vô hạn các tập g-mở. Để thấy rõ hơn về điều này, chúng ta xét ví dụ sau

Ví dụ 3. Giả sử $\mathbb{N}$ là tập hợp các số tự nhiên với cấu trúc tôpô $\tau = \{\mathbb{N}, \varnothing, \{0\}\}$. Ta xét các tập $A = \{2k \mid k \in \mathbb{N}^*\}, B = \{2k+1 \mid k \in \mathbb{N}\}$ và các họ vô hạn các tập $A_i = \{2i\}, B_i = \mathbb{N} \setminus A_i, \forall i = 1,2,...$ Khi đó, A_i là tập g-mở, B_i là tập g-đóng với mọi $i = 1,2,...$ và $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Ta thấy rằng, A là tập g-đóng và B là tập g-mở nhưng Định lí 2 không cho ta kết luận về tính g-mở của tập A và tính g-đóng của tập B.

Gần đây, trong [1],[2] các tác giả đã đưa ra các khái niệm tập đóng nửa suy rộng, tập đóng suy rộng địa phương, tập đóng suy rộng yếu,… tuy nhiên chưa có kết quả nào tổng quát hai tính chất 3,4 trong Định lí 2.

Trong bài báo này chúng tôi sẽ tổng quát hai tính chất 3,4 trong Định lí 2 cho trường hợp họ vô hạn các tập A_i, $i \in I$ từ đó đưa ra kết luận về tính g-mở của tập A và tính g-đóng của tập B trong Ví dụ 3.

Sau đây, chúng tôi sẽ giới thiệu tính chất được sử dụng nhiều trong bài báo.

Định lý 4 ([3]). Tập A là tập g-mở nếu và chỉ nếu với tập đóng bất kỳ F mà $F \subseteq A$ ta có $F \subseteq intA$.

3. Kết quả chính

Định lý 5. Giả sử A_i, $i \in I$ là các tập g-mở và đôi một tách được. Khi đó $\bigcup_{i\in I} A_i$ là tập g-mở.

Chứng minh. Giả sử F là tập đóng và $F \subseteq \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$. Ta có

$$F \cap c(A_j) \subseteq \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap c(A_j) = \left(\left(\bigcup_{i\neq j} A_i\right) \cap c(A_j)\right) \cup \left(A_j \cap c(A_j)\right)$$

Do A_i, $i \in I$ từng đôi một tách được nên $\left(\bigcup_{i\neq j} A_i\right) \cap c(A_j) = \varnothing$ và $A_j \cap c(A_j) = A_j$. Vì vậy $F \cap c(A_j) \subseteq A_j$. Vì $F \cap c(A_j)$, $j \in I$ là tập đóng và A_j, $j \in I$ là tập g-mở nên ta có $F \cap c(A_j) \subseteq \text{int}A_j$, $j \in I$. Do đó $F = F \cap \left(\bigcup_{j\in I} A_j\right) \subseteq F \cap \left(\bigcup_{j\in I} c(A_j)\right) \subseteq \text{int}\left(\bigcup_{j\in I} A_j\right)$. Áp dụng Định lí 4 suy ra $\bigcup_{j\in I} A_j$ là tập g-mở. □

Trong định lí trên, điều kiện tách được là không thể thiếu. Thật vậy, ví dụ sau chỉ ra rằng hợp của hai tập g-mở bất kỳ có thể không là tập g-mở.

Ví dụ 6. Giả sử $X = \{a,b,c\}$ và $\tau = \{\varnothing, \{a\}, X\}$, khi đó (X,τ) là một không gian tôpô. Nếu $A = \{c\}$ và $B = \{b\}$ thì A, B là các tập g-mở nhưng $A \cup B$ không là tập g-mở. Thật vậy, ta có duy nhất tập mở $O = X \supseteq \mathcal{C}A = \{a,b\}$ suy ra $c(\mathcal{C}A) = X \subseteq X$ nên $\mathcal{C}A$ là g-đóng. Vậy A là g-mở. Xét $\mathcal{C}B = \{a,c\}$, ta thấy có duy nhất tập mở $O = X \supseteq \mathcal{C}B = \{a,c\}$ suy ra $c(\mathcal{C}B) = X \subseteq X$ nên $\mathcal{C}B$ là g-đóng. Vậy B là g-mở. Xét $A \cup B = \{b,c\}$. Vì tồn tại tập mở $\{a\} \supseteq \mathcal{C}(A \cup B) = \{a\}$ nhưng $c\left(\mathcal{C}(A \cup B)\right) = X \not\subset \{a\}$ nên $\mathcal{C}(A \cup B) = \{a\}$ không là tập g-đóng. Do vậy, $A \cup B$ không là tập g-mở. Vậy A, B là các tập g-mở nhưng $A \cup B$ không là tập g-mở.

Hệ quả 7. Cho tập A_i, $i \in I$, là các tập g-đóng và $\mathcal{C}A_i$, $i \in I$, là các tập đôi một tách được. Khi đó, $\bigcap_{i \in I} A_i$ là tập g-đóng.

Chứng minh. Vì A_i, $i \in I$, là các tập g-đóng nên $\mathcal{C}A_i$, $i \in I$, là các g-mở. Mà $\mathcal{C}A_i$, $i \in I$, là các tập đôi một tách được, nên theo Định lí 5 ta suy ra $\bigcup_{i \in I} \mathcal{C}A_i$ là tập g -mở nên $\bigcup_{i \in I} \mathcal{C}A_i$ là tập g-mở. Mặt khác, $\bigcup_{i \in I} \mathcal{C}A_i = \mathcal{C}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)$ nên $\mathcal{C}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)$ là tập g-mở. Vậy $\bigcap_{i \in I} A_i$ là tập g-đóng. □

Bây giờ, chúng ta xét Ví dụ 3 trong mục 1. Theo Định lí 5 ta suy ra A là tập g-mở và theo Hệ quả 7 ta suy ra B là tập g-đóng./.

Tài liệu tham khảo

[1]. Y. Gnanambal, *On generalized preregular closed sets in topology spaces*, Indian J. pure appl. Math., **28** (3) (1997), p. 351-360.

[2]. K. Kannan, *On Levine's generalized closed sets: A survey*, Research journal of Applied Sciences, Engeneering and Technology ***4*** (11) (2012), p. 1612-1615.

[3]. J. L. Kelley, *Tôpô đại cương*, Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp, 1973.

[4]. N. Levin, *Generalized closed sets in topology*, Rend. Cirs. Math. Palermo, **19** (1970), p. 89 - 96.

Summary

In this paper, we investigate some properties of intersections of infinitely many g-closed subsets and unions of infinitely many g-open subsets.

Ngày nhận bài: 20/03/2013; Ngày nhận đăng: 23/6/2013.