ĐIỀU KIỆN ĐỦ CHO CỘNG HƯỞNG TỔNG QUÁT TRONG MẠNG LƯỚI GỒM 2 HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN DẠNG FITZHUGH-NAGUMO VỚI LIÊN KẾT TUYẾN TÍNH HAI CHIỀU

Phan Văn Long Em[1*] và Võ Tấn Đạt[2]

[1]*Khoa Sư phạm, Trường Đại học An Giang, Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam*

[2]*Sinh viên, Khoa Sư phạm, Trường Đại học An Giang, Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam*

[*]*Tác giả liên hệ: Phan Văn Long Em, Email: pvlem@agu.edu.vn*

Lịch sử bài báo

Ngày nhận: 15/5/2023; Ngày nhận chỉnh sửa: 15/10/2023; Ngày duyệt đăng: 23/10/2023

Tóm tắt

Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu về sự cộng hưởng tổng quát trên mạng lưới gồm hai hệ phương trình vi phân dạng FitzHugh-Nagumo với liên kết tuyến tính hai chiều. Cụ thể, chúng tôi tìm điều kiện đủ đối với độ mạnh liên kết để sự cộng hưởng tổng quát xảy ra và mô phỏng số để kiểm tra lại kết quả lý thuyết tìm được.

Từ khóa: *Cộng hưởng tổng quát, hệ phương trình vi phân dạng FitzHugh-Nagumo, liên kết tuyến tính hai chiều.*

SUFFICIENT CONDITION FOR GENERALIZED SYNCHRONIZATION IN THE NETWORKS OF TWO ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS OF FITZHUGH-NAGUMO TYPE WITH BIDIRECTIONALLY LINEAR COUPLING

Phan Van Long Em[1*] and Vo Tan Dat[2]

[1]*Faculty of Pedagogical, An Giang University, Vietnam National University Ho Chi Minh City, Vietnam*

[2]*Student, Faculty of Pedagogical, An Giang University, Vietnam National University Ho Chi Minh City, Vietnam*

[*]*Corresponding author: Phan Van Long Em, Email: pvlem@agu.edu.vn*

Article history

Received: 15/5/2023; Received in revised form:15/10/2023; Accepted: 23/10/2023

Abstract

This paper studies the generalized synchronization in the network of two ordinary differential equations of FitzHugh-Nagumo type with bidirectionally linear coupling. Specifically, it examines the sufficient conditions on the coupling strength to get the generalized synchronization and simulations for checking the theoretical results.

Keywords: *Bidirectionally linear coupling, generalized synchronization, ordinary differential equations of FitzHugh-Nagumo.*

DOI: https://doi.org/10.52714/dthu.12.8.2023.1153

Trích dẫn: Phan, V. L. E., & Võ, T. Đ. (2023). Điều kiện đủ cho cộng hưởng tổng quát trong mạng lưới gồm 2 hệ phương trình vi phân dạng FitzHugh-Nagumo với liên kết tuyến tính hai chiều. *Tạp chí Khoa học Đại học Đồng Tháp, 12*(8), 66-70. https://doi.org/10.52714/dthu.12.8.2023.1153.

1. Giới thiệu

Sự cộng hưởng hay *sự đồng bộ hóa* là một hiện tượng vô cùng quan trọng trong tự nhiên và trong khoa học phi tuyến, đặc biệt là trong mạng lưới các hệ phương trình dao động được liên kết yếu với nhau (Aziz-Alaoui 2006).

Trong những năm gần đây, sự đồng bộ hóa đã được nghiên cứu rộng rãi trên nhiều lĩnh vực, nhiều hiện tượng tự nhiên cũng phản ánh sự đồng bộ hóa như sự di chuyển tạo thành từng đám mây của đàn chim, sự di chuyển của đàn cá chép trong hồ, sự di chuyển của đoàn diễu hành, sự nhận và truyền thông tin của một nhóm các tế bào,… (Braun & cs., 1994; Fitzhugh, 1960; Nagumo, 1962). Chính vì thế việc nghiên cứu về sự đồng bộ hóa trong mạng lưới các tế bào là cần thiết.

Sự cộng hưởng có nghĩa là có cùng đặc tính ở cùng thời điểm. Có rất nhiều loại cộng hưởng. Chẳng hạn như sự cộng hưởng đồng nhất trong một mạng lưới gồm hai hệ phương trình thì sự đồng bộ hóa có nghĩa là hệ phương trình này sẽ sao chép những đặc tính của hệ phương trình kia kể từ một thời điểm nào đó (Aziz-Alaoui 2006). Đã có nhiều kết quả nghiên cứu về sự cộng hưởng đồng nhất xét trên các mạng lưới tế bào khác nhau, tương ứng với nhiều mô hình mô phỏng khác nhau của tế bào (Ambrosio, & Aziz-Alaoui, 2012; Ambrosio, & Aziz-Alaoui, 2013; Phan, V. L. E., 2022; Phan, V. L. E., 2023), nhưng chưa có một nghiên cứu cụ thể nào về *sự cộng hưởng tổng quát* trong mạng lưới các hệ phương trình vi phân dạng FitzHugh-Nagumo. Trong khi chúng ta chỉ biết rằng sự cộng hưởng tổng quát là khái niệm rộng và tổng quát hơn so với sự cộng hưởng đồng nhất (Aziz-Alaoui, 2006). Nói cách khác, sự cộng hưởng đồng nhất chỉ là một trong những trường hợp đặc biệt của sự cộng hưởng tổng quát. Đó chính là lí do mà chúng tôi chọn chủ đề sự cộng hưởng tổng quát cho công trình nghiên cứu này.

Để cho việc nghiên cứu trở nên dễ hiểu hơn, trong bài báo này chỉ xét mạng lưới gồm 2 tế bào với liên kết tuyến tính hai chiều, nghiên cứu tìm ra điều kiện đủ đối với độ mạnh liên kết để cho sự đồng bộ hóa tổng quát xảy ra. Trong đó, mỗi tế bào được giới thiệu bởi một hệ phương trình vi phân mang tên *Mô hình FitzHugh-Nagumo* (FHN), mô hình này được biết là mô hình hai chiều đơn giản hóa từ hệ phương trình nổi tiếng của Hodgkin-Huxley (Ermentrout, & Terman, 2009; Hodgkin, & Huxley, 1952; Nagumo & cs., 1962). Tuy là mô hình đơn giản hơn, nhưng nó có nhiều kết quả giải tích đáng chú ý và giữ được các tính chất, ý nghĩa về mặt sinh học. Mô hình này được tạo thành từ hai phương trình của hai biến u và v. Biến đầu tiên u là biến nhanh, được gọi là biến hoạt náo, nó thể hiện cho điện áp của màng tế bào. Biến thứ hai v là biến chậm, nó thể hiện cho một số đại lượng vật lí phụ thuộc thời gian như độ dẫn điện của dòng ion đi ngang qua màng tế bào. Hệ phương trình FitzHugh-Nagumo được biểu diễn bởi hệ sau, sử dụng kí hiệu như trong (Ambrosio, & Aziz-Alaoui, 2012; Ambrosio, & Aziz-Alaoui, 2013):

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{du}{dt} = \varepsilon u_t = f(u) - v + I \\ \dfrac{dv}{dt} = v_t = au - bv + c \end{cases} \qquad (1)$$

trong đó, a, b và c là các hằng số (a và b dương), $0 < \varepsilon < 1$, $t \in \mathbb{R}^+$ là biến thời gian và $f(u) = -u^3 + 3u$, I là dòng điện kích hoạt từ bên ngoài.

2. Sự cộng hưởng tổng quát trong mạng lưới gồm hai hệ phương trình dạng FitzHugh-Nagumo với liên kết tuyến tính hai chiều

Trong bộ não con người có rất nhiều tế bào, chúng liên kết với nhau tạo thành một mạng lưới tế bào. Một mạng lưới tế bào là một hệ thống các tế bào được liên kết với nhau về mặt sinh lý học. Sự trao đổi giữa chúng chủ yếu là dựa vào các quá trình điện hóa. Bài báo này nghiên cứu điều kiện đủ trên độ mạnh liên kết để có được sự đồng bộ hóa tổng quát trong mạng lưới gồm 2 tế bào liên kết tuyến tính hai chiều. Trong đó, mỗi tế bào được mô tả bằng một hệ phương trình vi phân dạng FitzHugh-Nagumo (1).

Ta xem hệ phương trình (1) như mô hình điện áp của một tế bào, từ đó ta xây dựng mạng lưới gồm 2 tế bào (1) với liên kết tuyến tính hai chiều như sau:

$$\begin{cases} \varepsilon u_{1t} = f(u_1) - v_1 + I - g_{syn}(u_1 - u_2) \\ v_{1t} = au_1 - bv_1 + c \\ \varepsilon u_{2t} = f(u_2) - v_2 + I - g_{syn}(u_2 - u_1) \\ v_{2t} = au_2 - bv_2 + c \end{cases} \qquad (2)$$

trong đó, $(u_i, v_i), i = 1, 2$ được xây dựng như hệ (1), g_{syn} là một hằng số dương đại diện cho độ mạnh liên kết.

Định nghĩa 1. Đặt $|e_2|+|\overline{e}_2|$ là sai số cộng hưởng, trong đó:

$$e_2 = u_2 - \phi(u_1), \overline{e}_2 = v_2 - \varphi(v_1),$$

với ϕ, φ là các ánh xạ liên tục. Chúng ta nói rằng mạng lưới (2) là cộng hưởng tổng quát nếu sai số cộng hưởng tiến về 0 khi t tiến về vô cùng.

Mạng lưới (2) có thể đạt được sự cộng hưởng đồng nhất với một giá trị độ mạnh liên kết đủ lớn (Phan, V. L.E., 2022; Phan, V. L. E., 2023). Tuy nhiên, để đạt được sự cộng hưởng tổng quát theo Định nghĩa 1 là rất khó nếu ta giữ nguyên mạng lưới (2) được xây dựng như trên mà không có bất kì tác động nào khác lên nó. Nói cách khác để sự cộng hưởng tổng quát xảy ra, chúng ta cần xây dựng bộ điều khiển cho mạng lưới (2). Cụ thể, để cộng hưởng tế bào thứ nhất và tế bào thứ hai của mạng lưới (2), chúng ta cần xây dựng và cộng bộ điều khiển thêm vào tế bào thứ hai như sau:

$$\begin{cases} \varepsilon u_{1t} = f(u_1) - v_1 + I - g_{syn}(u_1 - u_2) \\ v_{1t} = au_1 - bv_1 + c \\ \varepsilon u_{2t} = f(u_2) - v_2 + I - g_{syn}(u_2 - u_1) + w_2 \\ v_{2t} = au_2 - bv_2 + c + \overline{w}_2 \end{cases} \quad (3)$$

trong đó, bộ điều khiển $w_2, \overline{w}_2$ được thiết kế như sau:

$$\begin{cases} w_2 = \varepsilon \dfrac{\partial \phi(u_1)}{\partial u_1} u_{1t} - f(\phi(u_1)) + \varphi(v_1) - I \\ \qquad\qquad + g_{syn}(\phi(u_1) - u_1) - k_2 e_2 \\ \overline{w}_2 = \dfrac{\partial \varphi(v_1)}{\partial v_1} v_{1t} - a\phi(u_1) - b\varphi(v_1) - c \end{cases} \quad (4)$$

với một nguyên tắc cải tiến được thiết kế như sau:

$$k_{2t} = r_2 e_2^2, \quad (5)$$

trong đó, r_2 là một hằng số dương tùy ý.

Dưới tác động của các bộ điều khiển được xây dựng ở trên, phương trình vi phân của các sai số cộng hưởng thành phần tương ứng với hệ (3) được tính như sau:

$$\begin{aligned} \varepsilon e_{2t} &= \varepsilon \left(u_{2t} - \frac{\partial \phi(u_1)}{\partial u_1} u_{1t} \right) \\ &= f(u_2) - v_2 + I - g_{syn}(u_2 - u_1) \\ &\quad - f(\phi(u_1)) + \varphi(v_1) - I \\ &\quad + g_{syn}(\phi(u_1) - u_1) - k_2 e_2 \\ &= f(u_2) - f(\phi(u_1)) - (v_2 - \varphi(v_1)) \\ &\quad - g_{syn}(u_2 - \phi(u_1)) - k_2 e_2 \\ &= f(u_2) - f(\phi(u_1)) - \overline{e}_2 \\ &\quad - g_{syn} e_2 - k_2 e_2, \end{aligned} \quad (6)$$

và

$$\begin{aligned} \overline{e}_{2t} &= v_{2t} - \frac{\partial \varphi(v_1)}{\partial v_1} v_{1t} \\ &= au_2 - bv_2 + c - a\phi(u_1) - b\varphi(v_1) - c \\ &= ae_2 - b\overline{e}_2. \end{aligned} \quad (7)$$

Định lí 1. *Hàm số f thỏa mãn điều kiện sau đây:*

$$\left| f(u_i) - f(\phi(u_j)) \right| \le \beta \left| u_i - \phi(u_j) \right|, \quad (8)$$

trong đó, $u_i, u_j, i, j = 1,2$ là các điện áp tế bào, ϕ được xác định như trong Định nghĩa 1 và β là một số thực dương.

Chứng minh. Với mọi $u_i, u_j, i, j = 1,2$, chúng ta có:

$$\begin{aligned} &f(u_i) - f(\phi(u_j)) \\ &\quad = -u_i^3 + 3u_i + \phi(u_j)^3 - 3\phi(u_j) \\ &\quad = (u_i - \phi(u_j))\big[3 - (u_i - \phi(u_j))^2 \\ &\qquad\qquad - u_i\phi(u_j)\big]. \end{aligned}$$

Vì $u_i, i = 1,2$ bị chặn và nằm trong một tập compact (Ambrosio, B., Aziz-Alaoui, M. A. and Phan V. L. E, 2019), nên $\phi(u_i)$ cũng bị chặn, do ϕ liên tục. Do đó, tồn tại một số thực dương β sao cho:

$$\left| f(u_i) - f(\phi(u_j)) \right| \le \beta \left| u_i - \phi(u_j) \right|, i, j = 1,2. \quad \blacksquare$$

Chú ý 1.

Nếu $\phi(u_j) = u_j$ và $\varphi(v_j) = v_j, j = 1,2,$ thì sự cộng hưởng tổng quát trở thành sự cộng hưởng đồng nhất.

Tiếp theo, chúng ta nghiên cứu vấn đề sự cộng hưởng tổng quát của mạng lưới (2). Kết quả chính được nêu trong Định lí sau:

Định lí 2. *Nếu* $g_{syn} > \beta$ *thì mạng lưới (2) có thể đạt được sự cộng hưởng tổng quát dưới tác động của bộ điều khiển (4) và nguyên tắc cải tiến (5).*

Chứng minh. Chúng ta xây dựng hàm số Lyapunov như sau:

$$V(t) = \frac{1}{2}\left(a\varepsilon e_2{}^2 + \bar{e}_2^2 + \frac{a}{r_2}k_2^2\right). \qquad (9)$$

Tính đạo hàm của $V(t)$ theo thời gian, kết hợp với (6) và (7), ta được:

$$\begin{aligned}\frac{dV(t)}{dt} &= a\varepsilon e_2 e_{2t} + \bar{e}_2\bar{e}_{2t} + \frac{a}{r_2}k_2k_{2t}\\ &= ae_2\big(f(u_2) - f(\phi(u_1))\\ &\quad - \bar{e}_2 - g_{syn}e_2 - k_2e_2\big)\\ &\quad + \bar{e}_2(ae_2 - b\bar{e}_2) + ak_2e_2^2\\ &= ae_2\big(f(u_2) - f(\phi(u_1))\big)\\ &\quad - ae_2\bar{e}_2 - ag_{syn}e_2^2 - ak_2e_2^2\\ &\quad + \bar{e}_2ae_2 - b\bar{e}_2^2 + ak_2e_2^2\\ &= ae_2\big(f(u_2) - f(\phi(u_1))\big)\\ &\quad - ag_{syn}e_2^2 - b\bar{e}_2^2.\end{aligned} \qquad (10)$$

Sử dụng Định lí 1, ta có:

$$\begin{aligned}\frac{dV(t)}{dt} &\le \left[a\beta e_2^2 - ag_{syn}e_2^2 - b\bar{e}_2^2\right]\\ &\le \left[a(\beta - g_{syn})e_2^2 - b\bar{e}_2^2\right].\end{aligned} \qquad (11)$$

Bởi vì $g_{syn} > \beta,$ nên (11) có thể được đánh giá như sau:

$$\frac{dV(t)}{dt} \le -\gamma\left[\frac{1}{2}(a\varepsilon e_2^2 + \bar{e}_2^2)\right], \qquad (12)$$

trong đó,

$$\gamma = \min\left\{\frac{2(g_{syn} - \beta)}{\varepsilon}; 2b\right\}.$$

Từ (12), ta có $0 \le V(t) \le V(0).$ Sử dụng bất đẳng thức này cùng với (9), ta suy ra rằng $V(t)$ bị chặn. Dựa vào lý thuyết ổn định Lyapunov và nguyên lý bất biến của LaSalle (Aeyels, 1995), ta có:

$$\lim_{t\to+\infty}(|e_2| + |\bar{e}_2|) = 0.$$

Khi đó, theo Định nghĩa 1 thì mạng lưới (2) đạt được sự cộng hưởng tổng quát. Định lí đã được chứng minh. ■

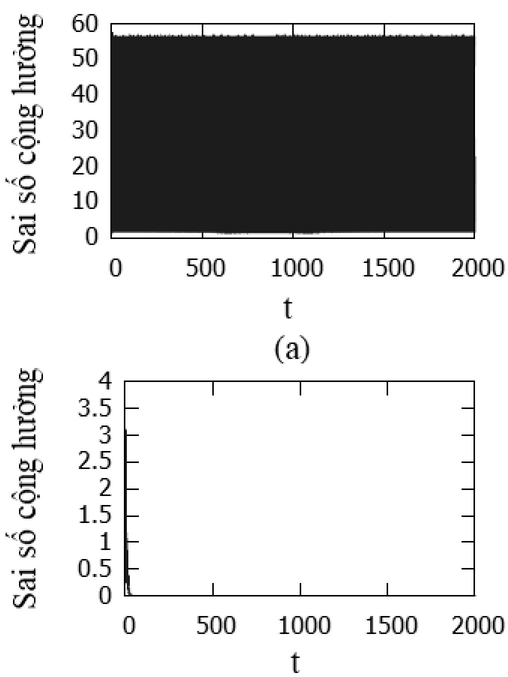
3. Mô phỏng số và thảo luận

Trong phần này, chúng tôi trình bày kết quả mô phỏng số về việc tìm giá trị đủ lớn cho độ mạnh liên kết cũng như kiểm tra xem bộ điều khiển (4) và nguyên tắc cải tiến (5) được xây dựng như trên có thực sự hiệu quả. Kết quả mô phỏng số được thực hiện đối với mạng lưới 2 trên C++ và hình ảnh dữ liệu được trình bày trên Gnuplot, với giá trị các tham số được cho như sau: $a = 1, b = 0.001, c = 0,$ $I = 0,\ \varepsilon = 0.1.$

Kết quả được thể hiện trong Hình 1, biểu diễn sai số cộng hưởng theo thời gian giữa hai hệ phương trình trong mạng lưới (2), trong đó chúng tôi lấy:

$$\phi(x) = -2\cos x + 1; \varphi(x) = 10x^2 + 1,$$

và $g_{syn} = 0.5; r_2 = 0.5; t \in [0; 2000].$



Hình 1. Sai số cộng hưởng tổng quát giữa hai hệ phương trình vi phân dạng FitzHugh-Nagumo với liên kết tuyến tính hai chiều. Hình (a) không có bộ điều khiển (4) và nguyên tắc cải tiến (5); Hình (b) có bộ điều khiển (4) và nguyên tắc cải tiến (5).

Cụ thể, Hình 1(a) biểu diễn sai số cộng hưởng theo thời gian t của mạng lưới (2) không có cộng thêm bộ điều khiển (4) cũng như nguyên tắc cải tiến (5). Chúng ta thầy rằng, sai số cộng hưởng không tiến về 0, nghĩa là sự cộng hưởng tổng quát đã không xảy ra. Hình 1(b) biểu diễn sai số cộng hưởng theo thời gian t của mạng lưới (2) có cộng thêm bộ điều khiển (4) cũng như nguyên tắc cải tiến (5). Chúng ta thầy rằng sai số cộng hưởng đã tiến về không. Nói một cách khác, sự cộng hưởng tổng quát đã xảy ra. Điều này nói lên rằng bộ điều khiển và nguyên tắc cải tiến mà chúng ta xây dựng là có hiệu quả.

Như vậy, nếu độ mạnh liên kết không đủ lớn sẽ không xảy sự cộng hưởng, và nếu không có bộ điều khiển cùng với nguyên tắc cải tiến được thêm vào thì sự cộng hưởng tổng quát cũng không xảy ra dù độ mạnh liên kết có lớn đi chăng nữa.

4. Kết luận

Bài báo đã đưa ra điều kiện đủ đối với độ mạnh liên kết để đạt được sự cộng hưởng tổng quát trong mạng lưới gồm hai hệ phương trình vi phân dạng FitzHugh-Nagumo với liên kết tuyến tính hai chiều. Tuy nhiên, để đạt được sự cộng hưởng tổng quát này thì phải thiết kế thêm một bộ điều khiển (4) để cộng vào thêm cho hệ phương trình thứ hai trong mạng lưới (2). Nghiên cứu còn trình bày kết quả mô phỏng số và kết quả cho thấy bộ điều khiển được thiết kế hoàn toàn hữu hiệu trong việc tạo ra sự cộng hưởng tổng quát theo Định nghĩa 1. Tương lai, chúng tôi sẽ nghiên cứu sự cộng hưởng tổng quát này trong mạng lưới có nhiều hệ phương trình hơn.

Tài liệu tham khảo

Aeyels, D. (1995). Asymptotic stability of nonautonomous systems by Lyapunov’s direct method. *Systems and Control Letters*, 25, 273-280. http://dx.doi.org/10.1016/0167-6911(94)00088-d.

Aziz-Alaoui, M. A. (2006). Synchronization of Chaos. *Encyclopedia of Mathematical Physics*, *Elsevier*, 5, 213-226. http://dx.doi.org/10.1016/b0-12-512666-2/00105-x.

Ambrosio, B., & Aziz-Alaoui, M. A. Synchronization and control of coupled reaction-diffusion systems of the FitzHugh-Nagumo-type. *Computers and Mathematics with Application*, 64, 934-943. http://dx.doi.org/10.1016/j.camwa.2012.01.056.

Ambrosio, B., & Aziz-Alaoui, M. A. (2013). Synchronization and control of a network of coupled reaction-diffusion systems of generalized FitzHugh-Nagumo type. *ESAIM: Proceedings and Surveys*, 39, 15-24. http://dx.doi.org/10.1051/proc/201339003.

Ambrosio, B., Aziz-Alaoui, M. A. & Phan V. L. E. (2018). Global attractor of complex networks of reaction-diffusion systems of FitzHugh-Nagumo type. *American Institute of Mathematical Sciences*, *23* (9), 3787-3797. http://dx.doi.org/10.3934/dcdsb.2018077.

Braun, H.A., Wissing, H., Schäfer, K., & Hirsch, M.C. (1994). Oscillation and noise determine signal transduction in shark multimodel sensory cells. *Nature*, 367, 270-273. http://dx.doi.org/10.1038/367270a0.

Ermentrout, G. B., & Terman, D. H. (2009). *Mathematical Foundations of Neurosciences*. Springer.

Fitzhugh, R. (1960). Thresholds and plateaus in the Hodgkin–Huxley nerve equations. *J. Gen. Physiol.*, 43, 867-896. http://dx.doi.org/10.1085/jgp.43.5.867.

Hodgkin, A. L., & Huxley, A. F. (1952). A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *Journal of Physiology*, 117, 500-544. http://dx.doi.org/10.1113/jphysiol.1952.sp004764.

Nagumo, J., Arimoto, S., & Yoshizawa, S. (1962). An active pulse transmission line simulating nerve axon. *Proceedings of the Institute of Radio Engineers*, 50, 2061-2070. http://dx.doi.org/10.1109/jrproc.1962.288235.

Phan, V. L. E. (2022). Sufficient condition for synchronization in complete networks of reaction-diffusion equations of Hindmarsh-Rose type with linear coupling. *IAENG International Journal of Applied Mathematics*, *52*(2), 315-319.

Phan, V. L. E. (2023). Sufficient condition for synchronization in complete networks of n reaction-diffusion systems of Hindmarsh-Rose type with nonlinear coupling. *Engineering Letters*, *31*(1), 413-418.