ĐẠO HÀM CÓ BẬC TỰ DO CHO ÁNH XẠ ĐA TRỊ VÀ ÁP DỤNG

Võ Đức Thịnh và Huỳnh Ngọc Cảm*

Khoa Sư phạm Toán - Tin Trường Sư phạm, Trường Đại học Đồng Tháp, Việt Nam

**Tác giả liên hệ: Huỳnh Ngọc Cảm, Email: huynhngoccam@dthu.edu.vn*

Lịch sử bài báo

Ngày nhận: 05/12/2023; Ngày nhận chỉnh sửa: 06/02/2024; Ngày duyệt đăng: 07/3/2024

Tóm tắt

Trong bài báo này, chúng tôi giới thiệu các đạo hàm bậc tự do cho các ánh xạ đa trị và nghiên cứu một số tính chất cũng như các qui tắc tính của chúng. Sau đó, chúng tôi áp dụng các kết quả về đạo hàm có bậc tự do này để nghiên cứu các điều kiện tối ưu cho bài toán tối ưu đa trị. Bên cạnh đó, chúng tôi cũng đưa ra các ví dụ minh hoạ cho các kết quả đạt được.

Từ khóa: *Đạo hàm có bậc tự do, Ổn định của ánh xạ đa trị, điều kiện tối ưu, bài toán tối ưu đa trị.*

DERIVATIVES WITH DEGREE OF FREEDOM OF MULTIFUNCTIONS AND APPLICATION

Vo Duc Thinh and Huynh Ngoc Cam*

Faculty of Mathematics - Informatics Teacher Education, School of Education, Dong Thap University, Cao Lanh 870000, Vietnam

**Corresponding author: Huynh Ngoc Cam, Email: huynhngoccam@dthu.edu.vn*

Article history

Received: 05/12/2023; Received in revised form: 06/02/2024; Accepted: 07/3/2024

Abstract

In this work, we first introduce some new notions of generalized differentials, namely derivatives with degree of freedom of multifunctions. We then establish the sum rule for these derivatives. And finally, by using this sum rule and some properties of the obtained derivatives, we provide necessary conditions for the stability of multifunction and optimality conditions of set-valued optimization problems.

Keywords: *Derivatives with degree of freedom, stability of multifunctions, optimality conditions, set-valued optimization problems.*

DOI: https://doi.org/10.52714/dthu.13.2.2024.1241

Trích dẫn: Võ, Đ. T., & Huỳnh, N. C. (2024). Đạo hàm có bậc tự do cho ánh xạ đa trị và áp dụng. *Tạp chí Khoa học Đại học Đồng Tháp*, *13*(2), 116-120. https://doi.org/10.52714/dthu.13.2.2024.1241.

Copyright © 2024 The author(s). This work is licensed under a CC BY-NC 4.0 License.

1. Giới thiệu

Xuyên suốt bài báo này, ta ký hiệu X, Y, Z là các không gian định chuẩn. Chúng tôi ký hiệu $\mathbb{R}^+ := [0, \infty)$, B_Y là hình cầu đơn vị trong Y. Cho K là nón khác rỗng trong Y, ta kí hiệu $F_+(x) = F(x) + K$. Cho hàm $\varphi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$. Khi đó φ được gọi là *tựa nhân tính* nếu $\varphi(t) > 0$, với mọi $t \neq 0$ và tồn tại $\delta > 0$ sao cho $\varphi(ab) \leq \varphi(a)\varphi(b)$, với mọi $a, b > 0, ab < \delta$. Cho dãy số thực (t_n), ký hiệu $t_n \to 0^+$nghĩa là $t_n \to 0$ và $t_n > 0$ với mọi n. Chúng tôi ký hiệu $F: X \to 2^Y$ để biểu diễn một ánh xạ đa trị từ X vào Y. Cho $F: X \to 2^Y$. Khi đó miền hữu hiệu, tập đồ thị của F lần lượt được xác định như sau:

$$\operatorname{dom} F = \{\, x \in X \mid F(x) \neq \emptyset \,\},$$
$$\operatorname{gr} F = \{\, (x, y) \mid y \in F(x) \,\}.$$

Cho C là một tập con của không gian định chuẩn X. Khi đó, cone C, int C và $\bar{C}$ lần lượt được xác định như sau: cone C $:= \{\, \lambda c \mid c \in C, \lambda \geq 0 \,\}$, int $C :=$ $\{\, x \in C \mid \exists$ lân cận mở V của $x, V \subset C \,\}$

và $\bar{C} := \{ x \in C \mid$ tồn tại dãy $\{x_n\} \subset C, x_n \to x \}$

Tiếp theo, chúng tôi giới thiệu một số loại đạo hàm cho ánh xạ đa trị. Không giống như đạo hàm của các hàm đơn trị, đạo hàm của ánh xạ đa trị thường được định nghĩa thông qua các *nón tiếp tuyến* (hay *nón tiếp xúc*). Có nhiều loại nón tiếp tuyến đã được giới thiệu và nghiên cứu. Trong phần sau, chúng tôi giới thiệu một số nón tiếp tuyến (và các đạo hàm tương ứng) thường được sử dụng trong nghiên cứu các bài toán tối ưu.

Định nghĩa 1.2. (Bonnans & Shapiro, 2006, Định nghĩa 2.2.1, 2.2.2, 2.2.3) Cho M là tập con của X và $\bar{x} \in \bar{M}$.

(i) *Nón tiếp tuyến Bouligand* của M tại $\bar{x}$, được kí hiệu bởi $T_M(\bar{x})$, là tập hợp những vector $v \in X$ thoả mãn điều kiện $\lim\limits_{t \to 0^+} \inf \frac{d(\dot{x}+tv, M)}{t} = 0$.

(ii) *Nón tiếp tuyến kề* của M tại $\bar{x}$, được kí hiệu bởi $T_M^{\mathrm{b}}(\bar{x})$, là tập hợp các vector $v \in X$ thỏa mãn điều kiện $\lim\limits_{t \to 0^+} \frac{d(\bar{x}+tv, M)}{t} = 0$.

(iii) *Nón tiếp tuyến Clarke* của M tạ $\bar{x}$, được kí hiệu bởi $C_M(\bar{x})$, là tập hợp những vector $v \in X$ thoả mãn điều kiện $\lim\limits_{t \to 0^+, x \to z} \frac{d(\bar{x}+tv, M)}{t} = 0$.

(iv) *Nón tiếp tuyến trong* của S tại x_0, kí hiệu bởi $IT_S(x_0)$, được định nghĩa như sau:

$$IT_S(x_0) = \{u \in X: \exists \delta > 0, \forall t \in (0, \delta), \forall u' \in B_X(u, \delta), x_0 + tu' \in S\}.$$

Nhận xét 1.3. Từ định nghĩa, ta có $CF_z(u) \subset D^b F_z(u) \subset DF_z(u), \forall u \in X$.

Định nghĩa 1.4 (Anh, 2014, Định nghĩa 3.1). Cho $F: X \to 2^Y$ là một ánh xạ đa trị và $(x_0, y_0) \in \operatorname{gr} F$.

(i) *Đạo hàm trên Studniarski* bậc m của F tại (x_0, y_0) được định nghĩa bởi:

$$\bar{D}^m F(x_0, y_0)(u) = \{v \in Y \mid \exists t_n \to 0^+, (u_n, v_n) \to (u, v) \text{ sao cho } \forall n, y_n + t_n^m v_n \in F(x_0 + t_n u_n)\}$$

(ii) *Đạo hàm dưới Studnuarski* bậc m của F tại (x_0, y_0) được định nghĩa bởi:

$$D^m F(x_0, y_n)(x) = \{v \in Y \mid \forall t_n \to 0^+, u_n \to u, \exists v_n \to v \text{ sao cho } \forall n_1, w_n + t_n^m v_n \in F(x_0 + t_n u_n)\}.$$

Nhận xét 1.5. Trong trường hợp $m = 1$ thì $D^m \equiv D^b F, \bar{D}^m \equiv DF$.

2. Đạo hàm có bậc tự do của ánh xạ đa trị

Trong mục này, chúng tôi giới thiệu một số đạo hàm suy rộng là mở rộng của các đạo hàm Studniarski và thiết lập một số tính chất của đạo hàm này. Bằng cách thay t_n^m trong định nghĩa đạo hàm trên và đạo hàm dưới Studniarski bậc m bởi $\varphi(t_n)$ và cách xác định các dãy trong Định nghĩa 1.5, chúng tôi giới thiệu các khái niệm *đạo hàm có bậc tự do* (hay các *đạo hàm tương ứng với một hàm*) như sau:

Định nghĩa 2.1. Cho $F: X \to 2^Y$ là một ánh xạ đa trị và $(x_0, y_0) \in \operatorname{gr} F$.

(i) *Đạo hàm tương ứng với* φ của F tại (x_0, y_0) được định nghĩa bởi:

$$D^\varphi F(x_0, y_0)(u) = \{v \in Y \mid \exists t_n \to 0^+, (u_n, v_n) \to (u, v) \text{ sao cho } \forall n, y_0 + \varphi(t_n) v_n \in F(x_0 + t_n u_n)\}$$

(ii) *Đạo hàm chặt tương ứng với* φ của F tại (x_0, y_0) được định nghĩa bởi:

$$\hat{D}^\varphi F(x_0, y_0)(u) = \{v \in Y \mid \forall t_n \to 0^+, u_n \to u, \exists v_n \to v \text{ sao cho } \forall n, y_0 + \varphi(t_n) v_n \in F(x_0 + t_n u_n)\}.$$

Ví dụ 2.2. Giả sử $X = Y = \mathbb{R}$ và $F_{2n}: X \to 2^Y, n = 1,2,3, \ldots$ được xác đinh bởi:

$$F_{2n}(x) := \{y \in Y: y \geq x^{2n}\}, \forall x \in X$$

Giả sử $(x_0, y_0) = (0,0)$ với $n = 1$, ta có: $\bar{D}^2 F_2(0,0)(u) = \{v \in Y: v \geq u^2\}, \forall u \in X$.

Với $\varphi(t) = t^2$ ta có:

$$D^{\varphi}F_2(0,0)(u) = \{v \in Y \mid \exists t_n \to 0^+, (u_n, v_n) \to (u,v): \forall n, t_n^2 v_n \in F(t_n u_n)\}$$
$$= \{v \in \mathbb{R} \mid v \geq u^2\}, \forall u \in X.$$
$$\hat{D}^{\varphi}F_2(0,0)(u) = \{v \in Y \mid \forall t_n \to 0^+, u_n \to u, \exists v_n \to v: \forall n, t_n^2 v_n \in F(t_n u_n)\}$$
$$= \{v \in \mathbb{R} \mid v \geq u^2\}, \forall u \in X.$$

Với $\varphi(t) = e^t$ ta có:

$$D^{\varphi}F_2(0,0)(u) = \{v \in Y \mid \exists t_n \to 0^+, (u_n, v_n) \to (u,v): \forall n, t_n^2 v_n \in F(t_n u_n)\}$$
$$= \{v \in \mathbb{R} \mid v \geq 0\} = \mathbb{R}^+, \forall u \in X.$$

Nhận xét 2.3. Trong trường hợp $\varphi(t) = t^m$ thì $D^{\varphi}F$ trở thành $\bar{D}^m F$.

Định lí 2.4. Cho $F_i: X \to 2^Y$, $i = 1, 2$ là một ánh xạ đa trị và $(x_0, y_i) \in \operatorname{gr} F_i$. Khi đó với mọi $u \in X$, ta có:

$$D^{\varphi}(F_1 + F_2)(x_0, y_1 + y_2)(u) \supseteq D^{\varphi}F_1(x_0, y_1)(u) + \hat{D}^{\varphi}F_2(x_0, y_2)(u).$$

Chứng minh. Giả sử $v \in D^{\varphi}F_1(x_0, y_1)(u) + \hat{D}^{\varphi}F_2(x_0, y_2)(u)$. Khi đó tồn tại $w_1 \in D^{\varphi}F_1(x_0, y_1)(u)$ và $w_2 \in \hat{D}^{\varphi}F_2(x_0, y_2)(u)$ sao cho $v = w_1 + w_2$. Vì $w_1 \in D^{\varphi}F_1(x_0, y_1)(u)$ nên từ Định nghĩa 2.2 ta tìm thấy $t_n \to 0^+, u_n \to u, v_n \to w_1$ sao cho $y_1 + \varphi(t_n)v_n \in F_1(x_0 + t_n u_n)$. (2.1)

Vì $w_2 \in \hat{D}^{\varphi}F_2(x_0, y_2)(u)$ nên với các dãy $\bar{t}_n := t_n \to 0^+, \bar{u}_n := u_n \to u$. Khi đó tồn tại dãy $\bar{v}_n \to w_2$ thỏa mãn $y_2 + \varphi(t_n)\bar{v}_n \in F_2(x_0 + t_n u_n), \forall n$. (2.2)

Từ (2.1) và (2.2) suy ra $y_1 + y_2 + \varphi(t_n)(v_n + \bar{v}_n) \in (F_1 + F_2)(x_0 + t_n u_n)$. Do đó

$$v = w_1 + w_2 \in D^{\varphi}(F_1 + F_2)(x_0, y_1 + y_2)(u).$$

Vậy ta có $D^{\varphi}(F_1 + F_2)(x_0, y_1 + y_2)(u) \supseteq D^{\varphi}F_1(x_0, y_1)(u) + \hat{D}^{\varphi}F_2(x_0, y_2)(u)$. □

Ví dụ sau chỉ ra rằng nếu thay $\hat{D}^{\varphi} = D^{\varphi}$ thì Định lí 2.5 là không đúng.

Ví dụ 2.5. Giả sử $X = Y = \mathbb{R}, C = \mathbb{R}_+$và $F_1, F_2: X \to 2^Y$ được cho bởi:

$$F_1(x) = \begin{cases} \{1\} & \text{nếu} \quad x = \dfrac{1}{n}, n = 1,2,\dots \\ \{0\} & \text{nếu} \quad x = 0, \end{cases}$$

$$F_2(x) = \begin{cases} \{0\} & \text{nếu} \quad x = \dfrac{1}{n}, n = 1,2,\dots \\ \{1\} & \text{nếu} \quad x = 0. \end{cases}$$

Với $\varphi(t) = e^t$ ta có:

$$D^{\varphi}F_1(0,0)(0) = \{v \in \mathbb{R} \mid \exists t_n \to 0^+, (u_n, v_n) \to (u,v)$$
sao cho $\forall n, e^{t_n}v_n \in F_1(t_n u_n)\} = \{0,1\}$.

$$D^{\varphi}F_2(0,1)(0) = \{v \in \mathbb{R} \mid \exists t_n \to 0^+, (u_n, v_n) \to (u,v)$$
sao cho $\forall n, 1 + e^{t_n}v_n \in F_2(t_n u_n)\} = \{-1,0\}$.

Mặt khác, ta có

$$(F_1 + F_2)(x) = \begin{cases} \{1\} & \text{nếu} \quad x = 0 \text{ hoặc } x = \dfrac{1}{n}, n = 1,2,\dots \\ \emptyset & \text{nếu ngược lại.} \end{cases}$$

Suy ra $D^{\varphi}(F_1 + F_2)(0,1)(0) = \{0\}$.

Vậy $D^{\varphi}F_1(x_0, y_1)(u) + D^{\varphi}F_2(x_0, y_2)(u) \not\subset D^{\varphi}(F_1 + F_2)(x_0, y_1 + y_2)(u)$.

Bao hàm thức trong Định lí 2.5 là chặt. Điều này được thể hiện trong ví dụ sau đây.

Ví dụ 2.6. Giả sử $X = Y = \mathbb{R}, C = \mathbb{R}_+$và $F_1, F_2: X \to 2^Y$ được cho bởi:

$$F_1(x) = \begin{cases} \{1\} & \text{nếu} \quad x = \dfrac{1}{n}, n = 1,2,\dots \\ \{0\} & \text{nếu} \quad x = 0, \end{cases}$$

$$F_2(x) = \begin{cases} \{0\} & \text{nếu} \quad x = \dfrac{1}{n}, n = 1,2,\dots \\ \{1\} & \text{nếu} \quad x = 0. \end{cases}$$

Với $\varphi(t) = e^t$, ta có:

$$D^{\varphi}F_1(0,1)(0) = \{v \in \mathbb{R} \mid \exists t_n \to 0^+, (u_n, v_n) \to (u,v): 1 + e^{t_n}v_n \in F_1(t_n u_n), \forall n\}$$
$$= \{-1,0\}.$$
$$\hat{D}^{\varphi}F_2(0,0)(0) = \{v \in \mathbb{R} \mid \forall t_n \to 0^+, u_n \to u, \exists v_n \to v: e^{t_n}v_n \in F_2(t_n u_n), \forall n\}$$
$$= \emptyset$$

Mặt khác, ta có

$$(F_1 + F_2)(x) = \begin{cases} \{1\} & \text{nếu} \quad x = 0 \text{ hoặc } x = \dfrac{1}{n}, n = 1,2,\dots \\ \emptyset & \text{nếu ngược lại.} \end{cases}$$

Suy ra $D^{\varphi}(F_1 + F_2)(0,1)(0) = \{0\}$. Do đó ta có:

$$D^{\varphi}(F_1 + F_2)\big(x_0, y_1 + y_2(u) \supset D^{\varphi}F_1(x_0, y_1)(u) + \hat{D}^{\varphi}F_2(x_0, y_2)(u).$$

3. Áp dụng của đạo hàm có bậc tự do vào nghiên cứu điều kiện tối ưu

Trong mục này, chúng tôi trình bày một số áp dụng của đạo hàm có bậc tự do trong việc nghiên cứu tính φ-ổn định của ánh xạ đa trị và nghiên cứu điều kiện tối ưu. Trước tiên, chúng tôi gọi lại khái niệm nửa liên tục dưới của các ánh xạ đa trị và đề xuất khái niệm φ-ổn định của ánh xạ đa trị như sau:

Định nghĩa 3.1. Cho $F: X \to 2^Y$ là một ánh xạ đa trị và $(x_0, y_0) \in grF$. (i) (Anh, 2014, Định nghĩa 2.3) F được gọi là *nửa liên tục dưới* tại (x_0, y_0) nếu tồn tại các lân cận U, V của x_0, y_0 sao cho $V \cap F(x) \neq \emptyset$ với mọi $x \in U$.

(ii) F được gọi là *φ-ổn định* tại (x_0, y_0) nếu tồn tại hằng số $L > 0$ và lân cận mở U của x_0 sao cho với mọi $x \in U \setminus \{x_0\}$ ta có: $F(x) \subset \{y_0\} + L\varphi(\|x - x_0\|)B_Y$.

Định lí 3.2. Giả sử Y là không gian hữu hạn chiều và $\varphi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$là hàm tựa nhân tính. Khi đó nếu $F: X \to 2^Y$ là nửa liên tục dưới và φ-ổn định tại $(x_0, y_0) \in \operatorname{gr} F$ thì $D^\varphi F(x_0, y_0)(u) \neq \emptyset, \forall u \in X$.

Chứng minh. Cho $u = 0$, đây là trường hợp tầm thường bởi vì ta luôn có $0 \in D^\varphi F(x_0, y_0)(0)$. Vì vậy ta giả sử $u \neq 0$. Lấy $t_n \to 0^+$. Với mọi lân cận mở V của y_0, tồn tại lân cận mở U của x_0 sao cho với mọi $x \in U: V \cap F(x) \neq \emptyset$. Vì $x_0 + t_n u \to x_0$ nên $x_0 + t_n u \in U$ với n đủ lớn. Do đó tồn tại $\bar{y}_n \in F(x_0 + t_n u) \cap V$.

Bởi tính chất φ-ổn định của F, tồn tại $\lambda > 0$ sao cho:

$$\bar{y}_n \in F(x_0 + t_n u) \subseteq \{y_0\} + \lambda\varphi(\|t_n u\|)B_Y \subset \{y_0\} + \lambda\varphi(t_n)\varphi(\| u \|)B_Y.$$

Vì vậy $\frac{\|\bar{y}_n - y_0\|}{\varphi(t_n)} \leq \lambda\varphi(\| u \|)$. Điều này có nghĩa là $\{(\bar{y}_n - y_0)/\varphi(t_n)\}$ là một dãy bị chặn và có một dãy con hội tụ. Bởi Định nghĩa 2.2, giới hạn của dãy con này là một phần tử của tập $D^\varphi F(x_0, y_0)(u)$. $\square$

Hai ví dụ sau chứng tỏ rằng tập $D^\varphi F(x_0, y_0)(u)$ có thể là tập rỗng nếu giả thiết của Định lí 3.1 không đúng.

Ví dụ 3.3. Giả sử $F: \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$ được định nghĩa bởi:

$$F(x) = \begin{cases} \emptyset & \text{nếu } x \leq -1, \\ \{x\} & \text{nếu } -1 < x < 0 \text{ hoặc } x > 1, \\ \{x^{1/3}\} & \text{nếu } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

và $\varphi(t) = t^m$, với mọi $m \geq 1$. Khi đó, ta có $F(x) = \{x^{1/3}\}$ với $0 \leq x \leq 1$ và $D^\varphi F(0,0)(u) = \emptyset$ với mọi $m \geq 1$, ở đây F là nửa liên tục dưới tại $(0,0)$ nhưng không là φ-ổn định tại $(0,0)$. Thật vậy, với mọi V mở, $0 \in V$. Giả sử $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset V$ với $\varepsilon > 0$ (nào đó). Lấy $U = (-1,1)$. Khi đó với mọi $x \in U$ ta xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: $0 \leq x \leq 1$. Trong trường hợp này $F(x) = \{x^{1/3}\}$. Vì $-1 < x < 1$ nên $-1 < x^{1/3} < 1$. Suy ra $F(x) \cap V \neq \emptyset$.

Trường hợp 2: $-1 < x < 0$. Trong trường hợp này $F(x) = x$. Suy ra $F(x) \cap V \neq \emptyset$. Do đó F là nửa liên tục dưới tại $(0,0)$.

Tiếp theo ta kiểm tra tính φ-ổn định của F tại $(0,0)$.

Trường hợp 1: $m = 1$. Với mọi $L \geq 0, U$ mở chứa 0, chọn $x \in [0,1]$. Khi đó $F(x) = x^{1/3}$. Vì $x^{1/3} \notin L|x|(-1,1)$ với x đủ gần 0 nên $F(x) \notin L|x|(-1,1)$ khi x đủ gần 0.

Trường hợp 2: $m > 1$. Với mọi $L \geq 0, U$ mở chứa 0, chọn $x \in \left(-\sqrt[m-1]{\frac{1}{L}}, 0\right) \cap U_{x_0}$. Khi đó $F(x) = x$. Vì $0 > x > -\sqrt[m-1]{\frac{1}{L}}$ nên ta có $\frac{1}{|x|^{m-1}} > L$, nghĩa là $x < -L|x|^m$. Do đó $x \notin L|x|^m(-1,1)$.

Vậy F không là φ-ổn định tại $(0,0)$.

Ví dụ 3.4. Giả sử $F: \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$ được định nghĩa bởi: $F(x) = \begin{cases} \emptyset & \text{nếu } x \neq 0, \\ \{0\} & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$

và $\varphi(t) = t^m$. Rõ ràng F là φ-ổn định vì tồn tại $L = 1 > 0, U = (-1,1)$ chứa 0 sao cho $\forall x \in U \setminus \{0\}$ ta có $F(x) = \emptyset \subset \{0\} + L \| x \|^m B_Y$. Tuy nhiên $D^\varphi F(0,0)(u) = \emptyset$ với mọi $u \neq 0$. Do đó khẳng định của Định lí 3.1 không còn đúng nữa. Lí do là F không nửa liên tục dưới tại 0. Thật vậy, lấy $V = (-1,1)$ lân cận mở của 0, với mọi U mở và chứa 0, lấy $0 \neq x \in U$ ta có $F(x) = \emptyset$. Suy ra $V \cap F(x) = \emptyset$.

Tiếp theo, chúng tôi trình bày áp dụng của đạo hàm có bậc tự do để nghiên cứu điều kiện cần cho nghiệm yếu địa phương của bài toán tối ưu sau:

Cho X, Y, Z là các không gian định chuẩn, $C \subseteq Y, D \subseteq Z$ là các nón lồi có phần trong khác rỗng và chứa 0. Cho $S \neq \emptyset, S \subset X, F: S \to 2^Y$ và $G: S \to 2^Z$. Xét bài toán tối ưu như sau:

$$\begin{cases} \text{Minimize } F(x), \\ x \in S, G(x) \cap (-D) \neq \emptyset. \end{cases} \qquad \text{(Q)}$$

Kí hiệu $A := \{x \in S: G(x) \cap (-D) \neq \emptyset\}$ là tập khả thi của bài toán (Q).

Trong phần tiếp theo, chúng tôi luôn giả thiết rằng ánh xạ φ là nửa liên tục phải tại 0, nghĩa là: với mọi dãy $t_n \to 0^+$, ta có $\varphi(t_n) \to 0^+$.

Định nghĩa 3.5. Giả sử $x_0 \in A$ với A là tập khả thi của bài toán (Q). Điểm $(x_0, y_0) \in \text{gr}F$ được gọi là một *nghiệm yếu địa phương* của (Q) nếu tồn tại lân cận mở U của x_0 sao cho $(F(A \cap U) - y_0) \cap (-\operatorname{int} C) = \emptyset$.

Mệnh đề 3.6 (Jiménez & Novo, 2003, Mệnh đề 2.3). Nếu $S \subseteq X$ là tập lồi, $x_0 \in \bar{S}$ và int $S \neq \emptyset$ thì $IT_{\text{int}S}(x_0) = \text{int cone } (S - x_0)$.

Bổ đề 3.7. Nếu $z_0 \in -D, z \in -$ int cone $(D + z_0)$ và tồn tại $t_n \to 0^+, \varphi(t_n) \to 0^+$sao cho $\frac{1}{\varphi(t_n)}(z_n - z_0) \to z$ thì $z_n \in -\operatorname{int} D$ với moi n.

Chứng minh. Từ $z \in -$ int cone $(D + z_0)$ ta có $-z \in IT_{\text{int}D}(-z_0)$. Do định nghĩa của $IT_{\text{int } D}(-z_0)$, ta có: $\exists \delta > 0, \forall t \in (0, \delta), \forall u' \in B_X(-z, \delta), -z_0 + tu' \in \operatorname{int} D$.

Từ tính chất liên tục phải tại 0 của φ và giả thiết dãy $t_n \to 0^+$, ta có $\varphi(t_n) \to 0^+$. Do đó, không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $\varphi(t_n) < \delta, \forall n \in \mathbb{N}$. Vì $\frac{1}{\varphi(t_n)}(z_n - z_0) \to z$ nên với n đủ lớn, ta có $-\frac{1}{\varphi(t_n)}(z_n - z_0) \in B(-z, \delta)$. Do đó với n đủ lớn, ta có: $-z_n = -z_0 + \varphi(t_n)\frac{-(z_n - z_0)}{\varphi(t_n)} \in \operatorname{int} D$.

Điều này có nghĩa là $z_n \in -\operatorname{int} D$ với mọi n. Do đó, chứng minh được hoàn thành. □

Định lí sau đây cung cấp điều kiện cần cho nghiệm yếu của bài toán (Q) theo đạo hàm tương ứng với φ.

Định lí 3.8. Giả sử $x_0 \in \operatorname{int} S$ và $z_0 \in G(x_0) \cap (-D)$. Khi đó nếu $(x_0, y_0) \in$ grF là một nghiệm yếu địa phương của (Q) thì với mọi $x \in \Omega := \operatorname{dom} D^\varphi(F \times G)_+(x_0, y_0, z_0)$ ta có:

$$D^\varphi(F \times G)_+(x_0, y_0, z_0)(x) \cap -\big(\operatorname{int} C \times \operatorname{int} \operatorname{cone}(D + z_0)\big) = \emptyset.$$

Chứng minh. Giả sử rằng $D^\varphi(F \times G)_+(x_0, y_0, z_0)(x) \cap -\Big(\text{ int } C \times \text{ int cone } (D + z_0)\Big) \neq \emptyset$.

Khi đó tồn tại $y \in Y, z \in Z$ sao cho $(y, z) \in D^\varphi(F \times G)_+(x_0, y_0, z_0)(x)$ (3.1)

và $(y, z) \in -\big(\operatorname{int} C \times \text{ int cone}(D + z_0)\big)$. (3.2)

Từ (3.1) tồn tại $t_n \to 0^+, (u_n, v_n) \to (x, (y, z))$ sao cho $(y_0, z_0) + \varphi(t_n)(v_n) \in (F \times G)_+(x_0 + t_n u_n)$. Khi đó tồn tại $(y_n, z_n) \in (F \times G)_+(x_0 + t_n u_n)$ sao cho $(y_0, z_0) + \varphi(t_n)(v_n) = (y_n, z_n)$.

Điều này tương đương với $\frac{(y_n, z_n) - (y_0, z_0)}{\varphi(t_n)} \to (y, z)$. (3.3)

Từ (3.2) và (3.3) cho n đủ lớn, ta có $y_n - y_0 \in -\operatorname{int} C$ (3.4)

và từ Bổ đề 3.6, ta đạt được: $z_n \in -\operatorname{int} D$. (3.5)

Bởi vì $z_n \in G_+(x_0 + t_n x_n) \cap -D, x_0 + t_n x_n \in A \cap U$ với n đủ lớn. Từ (3.5), ta có

$$y_n - y_0 \in (F(A \cap U) - y_0) \cap -\operatorname{int} C.$$

Điều này mâu thuẫn với Định nghĩa 3.4. Vậy ta có

$$D^\varphi(F \times G)_+(x_0, y_0, z_0)(x) \cap -(\operatorname{int} C \times \text{int (cone } (D + z_0))) = \emptyset.$$

Do đó, định lý đã được chứng minh. □

Lời cảm ơn: Bài báo này được tài trợ bởi đề tài mã số: B2022.SPD.02.

Tài liệu tham khảo

Anh, N. L. H. (2014). Higher-order optimality conditions in set-valued optimization using Studniarski derivaties and applications to duality". Positivity, 18, 449-473.

Anh, N. L. H., & Khanh, P. Q., & Tung, L. T. (2011). Higher-order radial derivatives and optimality conditions in nonsmooth vector optimization. Nonlinear Anal., 74, 7365-7379.

Anh, N. L. H. (2016). Sensitivity analysis in constrained set-valued optimization via Studniarski derivatives. Positivity, 21, 255-272.

Bonnans, J. K., & Shapiro, A. (2000). Perturbation analysis of optimization problems, Springer-Verlag, New York.

Jiménez, B., & Novo, V. (2003). Second-order necessary conditions in set constrained differentiable vecter optimization. Math. Methods Oper. Res, 58, 299-317.

Khanh, P. Q., & Tuan, N. V. (2008). Variational sets of multivalued mappings and a unified study of optimality conditions. J. Optim. Theory Appl, 139, 45-67.

Luu, D. V. (2008). Higher-order necessary and sufficient conditions for strict local Pareto minima in terms of Studniarski's derivaties. Optimization, 57, 593-605.