ĐÁNH GIÁ HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC KHÔNG SỬ DỤNG YẾU TỐ DIỆN TÍCH

Nguyễn Thị Bảo Uyên[1,2] và Trần Văn Sự[1*]

[1]*Trường Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng, Đà Nẵng, Việt Nam*

[2]*Trường Trung học cơ sở Nguyễn Văn Cừ, thành phố Đà Nẵng, Việt Nam*

[*]*Tác giả liên hệ: Trần Văn Sự, Email: vansudhdntt@gmail.com*

Lịch sử bài báo

Ngày nhận: 06/12/2023; Ngày nhận chỉnh sửa: 29/01/2024; Ngày duyệt đăng: 07/3/2024

Tóm tắt

Trong bài báo này chúng tôi nghiên cứu đánh giá chặn trên và chặn dưới cho các hệ thức lượng trong một tam giác khi biết số đo các cạnh của chúng không sử dụng yếu tố diện tích. Trước tiên chúng tôi xây dựng công thức tính diện tích tam giác thông qua các cạnh một tam giác; cung cấp các công thức tính bán kính đường tròn nội tiếp - ngoại tiếp của một tam giác và đưa ra đánh giá chặn trên của đường cao trong tam giác. Tiếp theo chúng tôi cung cấp các đánh giá chặn trên của các hàm lượng giác sin và tan của các góc trong tam giác. Cuối cùng chúng tôi đưa ra đánh giá chặn dưới của các hàm lượng giác côsin và côtan của các góc trong tam giác. Một vài ví dụ áp dụng cho các bài toán liên quan đến đánh giá lượng giác được đề xuất để minh họa một trong số các kết quả chính của bài báo.

Từ khóa: *Đánh giá hệ thức lượng giác, đường tròn, góc, mối quan hệ lượng giác, tam giác.*

EVALUATING TRIGONOMETRIC SYSTEMS IN TRIANGLES WITHOUT USING AREA FACTORS

Nguyen Thi Bao Uyen[1,2] and Tran Van Su[1*]

[1]*The University of Danang - University of Science and Education, Da Nang 550000, Vietnam*

[2]*Nguyen Van Cu Secondary School, Da Nang City, Vietnam*

[*]*Corresponding author: Tran Van Su, Email: vansudhdntt@gmail.com*

Article history

Received: 06/12/2023; Received in revised form: 29/01/2024; Accepted: 07/3/2024

Abstract

In the article we investigate the evaluations of boundedness from the upper and the lower for trigonometric system. in a triangle when knowing the measures of their sides without using the area factors. First of all, we establish a formula to compute the area of a triangle in terms of the sides of a given triangle; and provide formulas to calculate the radius of the inscribed circle - circumscribed circle of a triangle and evaluates the upper boundedness of the altitude in the triangle. Next, we provide the upper boundedness evaluations of the sin and tan trigonometric functions of the angles in the triangle. Finally, we derive an evaluation of the lower bound of the trigonometric functions such as cosin and cotan of the angles in the triangle. Several examples will be applied to problems involving the trigonometric system evaluation are proposed to illustrate some of the main results of the paper.

Keywords: *Angle, circle, evaluate trigonometric system, triangle, trigonometric relationships.*

DOI: https://doi.org/10.52714/dthu.13.2.2024.1240

Trích dẫn: Nguyễn, T. B. U. & Trần, V. S., (2024). Đánh giá hệ thức lượng trong tam giác không sử dụng yếu tố diện tích. *Tạp chí Khoa học Đại học Đồng Tháp, 13*(2), 108-115. https://doi.org/10.52714/dthu.13.2.2024.1240.

1. Giới thiệu

Bài toán là một khái niệm trong toán học được phân loại theo nhiều tiêu chí khác nhau như tính khó, tính chính xác, độ phức tạp, tính tổng quát, v.v., dùng để chỉ một vấn đề cần được giải quyết bằng cách sử dụng các công thức, phương pháp, thuật toán, v.v. Chúng là một thách thức đồng thời là nguồn cảm hứng cho chúng ta trong việc nghiên cứu và khám phá ra tri thức mới. Để giải bài toán, chúng ta cần có kiến thức chung về lý thuyết kết hợp với kỹ năng phân tích, đánh giá, suy luận logic và áp dụng (xem Grigorieva (2001, 2013), Hartshorne (2000), Shklarsky & cs. (1993), Gardiner (1997) và tài liệu trích dẫn trong đó). Việc giải một bài toán là một quá trình học tập liên tục và cần nhiều nỗ lực để phát triển kỷ năng phát hiện và giải quyết vấn đề.

Giải tam giác là đi tìm số đo các cạnh và các góc chưa biết của tam giác thông qua một số định lý nổi tiếng trong hình học cổ điển như định lý côsin, định lý sin, các công thức tính diện tích một tam giác (xem Hartshorne (2000)). Công thức Hêron (xem Nelse (2001)) cho chúng ta biết được mối quan hệ giữa diện tích tam giác, nữa chu vi và tất cả các cạnh của một tam giác tùy ý. Nếu trong một tam giác ΔABC luôn thay đổi có các cạnh ***a, b, c*** và nửa chu vi ***p***, thì diện tích $\boldsymbol{S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$. Trong công thức trên yếu tố nữa chu vi p còn xuất hiện. Với mong muốn xóa bỏ yếu tố p trong công thức trên và đảm bảo khả năng ứng dụng cho học sinh trung học cơ sở và trung học phổ thông vào việc ước lượng các chặn trên và chặn dưới liên quan đến các hàm số lượng giác (sin, côsin, tan, côtan) của góc khi các cạnh tùy ý thay đổi nhưng vẫn đảm bảo sự tồn tại của tam giác thì việc xây dựng lại công thức diện tính tam giác cho phù hợp là cần thiết, nhằm giúp học sinh, sinh viên, giáo viên có cách nhìn rõ hơn về miền giá trị của các hệ thức lượng trong một tam giác luôn thay đổi.

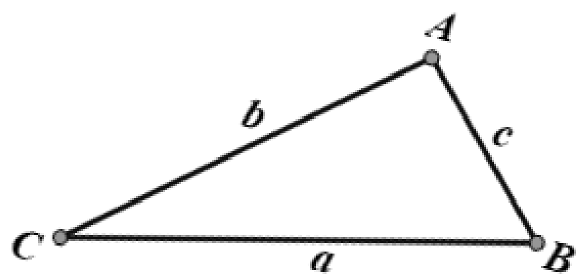
Đánh giá các hệ thức lượng trong một tam giác là chủ đề nghiên cứu thú vị, hấp dẫn và khá mới mẽ; đã được chúng tôi đề xuất nghiên cứu trong bài báo này nhằm mục đích cung cấp cho người làm toán một số công cụ đánh giá chặn trên cho sin và tan và chặn dưới cho côsin và côtan của các góc trong của một tam giác luôn thay đổi khi biết độ dài các cạnh của chúng. Theo hiểu biết của chúng tôi, chủ đề này hiện nay chưa được nghiên cứu bởi bất kỳ nhà khoa học nào trong nước và quốc tế. Đây là nội dung nghiên cứu có tính thời sự và có nhiều ứng dụng trong hình học nói riêng và toán học nói chung nên chủ đề nghiên cứu này trở thành động lực chính để chúng tôi tiến hành nghiên cứu và hoàn thiện nội dung nghiên cứu trong bài báo này.

Với các lý do nêu trên, chúng tôi sử dụng công cụ tính diện tích được thiết lập mới theo các cạnh ***a, b, c*** của một tam giác luôn thay đổi để đánh giác hệ thức lượng trong một tam giác. Đưa ra công thức tính bán kính đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp một tam giác không có yếu tố diện tích và nữa chu vi. Kết quả thu được trong bài báo là công cụ đánh giá tốt làm tiền đề cơ bản giúp cho giáo viên và người học nhìn nhận cụ thể hơn về sự biến đổi qua lại giữa các tam giác với nhau.

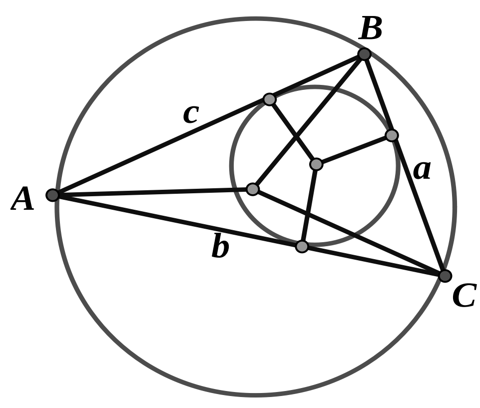
2. Bài toán tính diện tích tam giác và công thức

2.1. Ký hiệu

Cho một tam giác ΔABC thay đổi, ta luôn quy ước độ dài các cạnh đối diện với đỉnh ***A*** ký hiệu ***a***, đối diện đỉnh ***B*** ký hiệu ***b***, đối diện đỉnh ***C*** ký hiệu ***c***:



Hình 1. Tam giác ΔABC



Hình 2. Đường tròn nội tiếp và đường tròn ngoại tiếp tam giác ΔABC

Để đảm bảo sự tồn tại tam giác ta luôn coi tổng độ dài 2 cạnh bất kỳ của một tam giác luôn lớn hơn cạnh còn lại. Diện tích tam giác ΔABC

luôn ký hiệu $\boldsymbol{S}$ và nữa chu vi tam giác ΔABC luôn ký hiệu $\boldsymbol{p}$. Ta có các công thức tính sau:

$$\boldsymbol{p = \frac{a+b+c}{2}};$$

$$\boldsymbol{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

Xét hàm thực 2 biến $\boldsymbol{X}: \mathbb{R}^2_{++} \longrightarrow (\boldsymbol{0}, +\infty)$ được xác định bởi $\boldsymbol{X(x,y) = 2xy}\ (\forall(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^2_{++})$ và hàm thực 3 biến $\boldsymbol{Y}: \mathbb{R}^3_{++} \longrightarrow \mathbb{R}$ được xác định bởi $\boldsymbol{Y(x,y,z) = y^2 + z^2 - x^2}\ (\forall(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in \mathbb{R}^3_{++})$ **với** $\mathbb{R}^n_{++} = \{(\boldsymbol{x_1}, \dots, \boldsymbol{x_n}) \in \mathbb{R}^n | \boldsymbol{x_1} > \boldsymbol{0}, \dots, \boldsymbol{x_n} > \boldsymbol{0}\}$, $\boldsymbol{n = 1, 2, 3}$.

Để làm cơ sở đánh giá chúng ta cần sử dụng phép biến đổi sơ cấp đưa công thức tính diện tích $\boldsymbol{S}$ trên về dạng

$$\boldsymbol{S = \sqrt{X^2 - Y^2}} \tag{1}$$

trong đó $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ được biểu diễn theo ***a, b, c*** mà không theo $\boldsymbol{p}$. Tính ứng dụng của (1) thể hiện chỗ $\boldsymbol{S \le X}$ và dấu đẳng thức xảy ra khi

$$\boldsymbol{Y = 0}. \tag{2}$$

Vai trò của công thức (2) phải đảm bảo tính ứng dụng là: nếu (2) đúng thì ***a, b, c*** phải là một bộ số Pitago hay thể hiện một tính chất đặc biệt nào đó của một tam giác luôn thay đổi (chẳng hạn tính chất của tam giác đều).

Bài toán: Hãy biểu diễn công thức tính diện tích tam giác của Hêron dưới dạng (1).

Kết quả lời giải cho bài toán trên được thể hiện qua các định lý sau.

Với mỗi ***x, y, z*** là độ dài các cạnh nào đó trong một tam giác luôn thay đổi, ta đặt

$$\boldsymbol{X(x,y) = 2xy},$$

$$\boldsymbol{Y(x,y,z) = y^2 + z^2 - x^2}.$$

2.2. Các định lý

Định lý 1 **(**Diện tích tam giác**)** Cho ΔABC là một tam giác có 3 cạnh là $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$. Khi đó, diện tích $\boldsymbol{S}$ của tam giác ΔABC được cho bởi công thức:

$$\boldsymbol{S = \frac{1}{4}\sqrt{(X(b,c))^2 - (Y(a,b,c))^2}}$$

$$\boldsymbol{= \frac{1}{4}\sqrt{(X(c,a))^2 - (Y(b,c,a))^2}}$$

$$\boldsymbol{= \frac{1}{4}\sqrt{(X(a,b))^2 - (Y(c,a,b))^2}}.$$

Chứng minh:

Gọi $\boldsymbol{S}$ là yếu tố diện tích tam giác ΔABC.

Áp dụng công thức tính diện tích trong tam giác ta có

$$\boldsymbol{S = \frac{1}{2} bc\sin\widehat{BAC} \ \Rightarrow\ \sin\widehat{BAC} = \frac{4S}{2bc}};$$

$$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ \cos\widehat{BAC}}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow\ \cos\widehat{BAC} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}.$$

Áp dụng công thức hệ thức lượng trong đường tròn ta được

$$(\boldsymbol{\sin\widehat{BAC}})^2 + (\boldsymbol{\cos\widehat{BAC}})^2 = 1.$$

Do đó:

$$\left(\boldsymbol{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}\right)^2 + \left(\boldsymbol{\frac{4S}{2bc}}\right)^2 = 1.$$

Từ đây suy ra

$$\boldsymbol{S = \frac{1}{4}\sqrt{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}},$$

hay là:

$$\boldsymbol{S = \frac{1}{4}\sqrt{(X(b,c))^2 - (Y(a,b,c))^2}}.$$

Các đẳng thức còn lại được lập luận tương tự. ⊡

<u>Nhận xét:</u> Nếu cho ΔABC là tam giác vuông tại *A* thì $\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2}$ và từ công thức trên ta có công thức tính diện tích tam giác vuông tại *A* quen thuộc là: $\boldsymbol{S = \frac{1}{2}.bc}$.

Như vậy, công thức diện tích trong Định lý 1 có dạng (1) áp dụng cho tam giác ΔABC thay đổi tùy ý và cũng chính là công thức tính diện tích tổng quát của tam giác vuông. Nếu trong tam giác ΔABC có độ dài các cạnh ***b, c*** cố định và độ dài cạnh $\boldsymbol{a}$ thay đổi, lúc này diện tích lớn nhất tam giác ΔABC đạt được bằng $\boldsymbol{\frac{X(b,c)}{4} = \frac{bc}{2}}$ và dấu đẳng thức xảy ra trong công thức diện tích của Định lý 1 là $\boldsymbol{Y(a,b,c) = 0}$ tương đương với (***a, b, c***) là một bộ số Pitago, hay là góc giữa 2 cạnh có độ dài cố định ***b, c*** bằng 90^0.

Ví dụ 1. Cho $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ là độ dài 3 cạnh của một tam giác thay đổi tùy ý. Tìm nghiệm của phương trình sau:

$$\boldsymbol{16x(x-a)(x-b)(x-c)}$$
$$\boldsymbol{= 4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}.$$

Bài giải: Đặt $\boldsymbol{p = \frac{1}{2}(a+b+c)}$. Khi đó *p* là nửa chu vi tam giác ΔABC với độ dài 3 cạnh là

$\boldsymbol{a, b, c}$. Gọi $\boldsymbol{S}$ là diện tích tam giác ΔABC. Sử dụng công thức Hêron ta được

$$\boldsymbol{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

Theo Định lý 1 trên, ta có

$$\boldsymbol{S = \frac{1}{4}\sqrt{4b^2c^2 - (b^2+c^2-a^2)^2}}.$$

Do đó phương trình

$$\boldsymbol{16x(x-a)(x-b)(x-c) = 4b^2c^2 - (b^2+c^2-a^2)^2}$$

tương đương với

$$\boldsymbol{x(x-a)(x-b)(x-c) = p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Suy ra $\boldsymbol{x = p = \frac{1}{2}(a+b+c)}$.

Ta chỉ ra $\boldsymbol{x}$ là duy nhất.

Nếu $\boldsymbol{x > p}$ thì

$$\boldsymbol{x(x-a)(x-b)(x-c) > p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Nếu $\boldsymbol{x < p}$ thì

$$\boldsymbol{x(x-a)(x-b)(x-c) < p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Vậy phương trình có một nghiệm duy nhất $\boldsymbol{x = \frac{1}{2}(a+b+c)}$. ⊡

***Định lí 2** (Công thức tính bán kính).* Cho ΔABC là một tam giác nội tiếp đường tròn có bán kính $\boldsymbol{R}$ và ngoại tiếp đường tròn bán kính $\boldsymbol{r}$. Giả sử tam giác ΔABC có 3 cạnh là $\boldsymbol{a, b, c}$. Khi đó, bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ΔABC lần lượt là:

$$\boldsymbol{R = \frac{abc}{\sqrt{(X(b,c))^2 - (Y(a,b,c))^2}} = \frac{abc}{\sqrt{(X(c,a))^2 - (Y(b,c,a))^2}} = \frac{abc}{\sqrt{(X(a,b))^2 - (Y(c,a,b))^2}}};$$

$$\boldsymbol{r = \frac{\sqrt{(X(b,c))^2 - (Y(a,b,c))^2}}{2(a+b+c)} = \frac{\sqrt{(X(c,a))^2 - (Y(b,c,a))^2}}{2(a+b+c)} = \frac{\sqrt{(X(a,b))^2 - (Y(c,a,b))^2}}{2(a+b+c)}}.$$

Chứng minh: Áp dụng công thức tính diện tích $\boldsymbol{S}$ trong tam giác ΔABC: $\boldsymbol{S = \frac{abc}{4R}}$ suy ra

$$\boldsymbol{R = \frac{abc}{4S} = \frac{abc}{\sqrt{(X(b,c))^2 - (Y(a,b,c))^2}}}.$$

Mặt khác, ta luôn có

$$\boldsymbol{S = \frac{a+b+c}{2}r \Rightarrow r = \frac{4S}{2(a+b+c)}}$$

hay, $\boldsymbol{r = \frac{\sqrt{(X(b,c))^2 - (Y(a,b,c))^2}}{2(a+b+c)}}$.

Lập luận tương tự cho các kết quả còn lại và ta được điều cần chứng minh. ⊡

Ví dụ 2. Cho tam giác ΔABC có 3 cạnh là $\boldsymbol{a, b, c}$ thỏa mãn $\boldsymbol{a+b > c}$, $\boldsymbol{b+c > a}$, $\boldsymbol{c+a > b}$ và giả sử tỉ lệ giữa độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp là **q**. Chứng minh rằng

$$\boldsymbol{q \geq \frac{a(a+b+c)}{2bc}}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi tam giác ΔABC vuông tại A.

Bài giải: Áp dụng Định lý 2, ta có

$$\boldsymbol{q = \frac{2abc(a+b+c)}{4b^2c^2 - (b^2+c^2-a^2)^2}}.$$

Suy ra

$$\boldsymbol{q \geq \frac{2abc(a+b+c)}{4b^2c^2} = \frac{a(a+b+c)}{2bc}}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\boldsymbol{(b^2+c^2-a^2)^2} = 0,$$

hay là

$$\boldsymbol{b^2+c^2-a^2} = 0.$$

Theo định lí Pitago, tam giác ΔABC vuông tại A.

Điều phải chứng minh. ⊡

<u>Nhận xét:</u> Nếu trong tam giác ΔABC có độ dài các cạnh ***b, c*** cố định và độ dài cạnh $\boldsymbol{a}$ thay đổi, lúc này bán kính đường tròn ngoài tiếp tam giác có diện tích lớn nhất bằng $\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{2}$ và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác có diện tích lớn nhất bằng $\frac{b\,c}{b+c+\sqrt{b^2+c^2}}$. Lúc này tỷ số

$$\frac{\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{r}} = \frac{\sqrt{\boldsymbol{b}^2 + \boldsymbol{c}^2}\left(\sqrt{\boldsymbol{b}^2 + \boldsymbol{c}^2} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}\right)}{\boldsymbol{2bc}}$$

Theo Ví dụ 2, kết quả trên chính là giá trị nhỏ nhất của $\boldsymbol{q}$. Nghĩa là, nếu trong một tam giác có 2 cạnh cố định, điều kiện cần và đủ để diện tích tam giác đạt cực đại là tỉ số $\frac{\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{r}}$ đạt cực tiểu.

Ví dụ 3. Cho tam giác ΔABC có 3 cạnh là $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ thỏa mãn $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} > \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} > \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c} + \boldsymbol{a} > \boldsymbol{b}$ và giả sử tỉ lệ giữa độ dài bán kính đường tròn nội tiếp và diện tích của tam giác là $\boldsymbol{q} := \frac{\boldsymbol{2}}{3\sqrt[3]{abc}}$. Chứng minh tam giác ΔABC đều.

Bài giải: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số dương $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$: $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} \geq \boldsymbol{3}\sqrt[3]{\boldsymbol{abc}}$

$$\Rightarrow \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}} \leq \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{3}\sqrt[3]{\boldsymbol{abc}}}.$$

Do đó, từ chứng minh Định lí 2 dẫn đến

$$\frac{\textbf{bán kính đường tròn nội tiếp}}{\textbf{diện tích tam giác}} \leq \frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{3}\sqrt[3]{\boldsymbol{abc}}}.$$

Dấu đẳng thức trên xảy ra khi và chỉ khi

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}.$$

Vậy tam giác ΔABC đều.

Điều phải chứng minh. ⊡

<u>*Chú ý:*</u> Tam giác ΔABC trong các Ví dụ 2 và Ví dụ 3 luôn tồn tại.Thật vậy, xét $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{3}$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{4}$ và để ΔABC tồn tại điều kiện cần và đủ là $\boldsymbol{1} < \boldsymbol{a} < \boldsymbol{7}$. Chọn $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{5}$, khi đó tam giác ΔABC vuông tại A. Dễ dàng tính được bán kính đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp tam giác ΔABC lần lượt là: $\boldsymbol{R} = \frac{\boldsymbol{5}}{\boldsymbol{2}}$, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{1}$ và do đó tỉ lệ giữa độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ΔABC là: $q = \frac{5}{2}$. Mặt khác ta có $\frac{a(a+b+c)}{2bc} = \frac{5}{2} = q$. Điều này đảm bảo sự tồn tại tam giác ΔABC trong Ví dụ 2.

Tiếp theo, ta sẽ xét $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} = \boldsymbol{1}$ và để ΔABC tồn tại điều kiện cần và đủ là $\boldsymbol{0} < \boldsymbol{a} < \boldsymbol{2}$. Chọn $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{1}$, khi đó tam giác ΔABC đều diện tích tam tam giác ΔABC là: $\boldsymbol{S} = \frac{\sqrt{\boldsymbol{3}}}{\boldsymbol{4}}$ và do đó tỉ lệ giữa độ dài bán kính đường tròn nội tiếp và diện tích tam giác ΔABC là:

$$q = \frac{r}{S} = \frac{\frac{\sqrt{\boldsymbol{3}}}{\boldsymbol{6}}}{\frac{\sqrt{\boldsymbol{3}}}{\boldsymbol{4}}} = \frac{2}{3}.$$

Mặt khác ta có

$$\frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{3}\sqrt[3]{\boldsymbol{abc}}} = \frac{2}{3}.$$

Điều này đảm bảo sự tồn tại tam giác ΔABC trong Ví dụ 3.

Định lí 3** (Công thức đánh giá đường cao).** Cho ΔABC là một tam giác có 3 cạnh là $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$. Gọi $\boldsymbol{h_a}, \boldsymbol{h_b}, \boldsymbol{h_c}$ là độ dài 3 đường cao hạ từ các đỉnh A, B, C xuống cạnh đối diện của tam giác tương ứng. Khi đó:

$$\boldsymbol{h_a} \leq \frac{\boldsymbol{bc}}{\boldsymbol{a}};\quad \boldsymbol{h_b} \leq \frac{\boldsymbol{ac}}{\boldsymbol{b}};\quad \boldsymbol{h_c} \leq \frac{\boldsymbol{ab}}{\boldsymbol{c}};$$

Dấu bằng trong mỗi bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ΔABC vuông lần lượt tại A, B, C tương ứng.

Chứng minh: Ta đánh giá diện tích $\boldsymbol{S}$ của tam giác ΔABC như sau:

$$\boldsymbol{S} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{4}}\sqrt{\boldsymbol{4b^2c^2} - (\boldsymbol{b^2} + \boldsymbol{c^2} - \boldsymbol{a^2})^2} \leq \frac{\boldsymbol{bc}}{\boldsymbol{2}}.$$

Ta có công thức mối quan hệ giữa đường cao và diện tích

$$\boldsymbol{h_a} = \frac{\boldsymbol{2S}}{\boldsymbol{a}} = \frac{\sqrt{\boldsymbol{b^2c^2} - \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{4}}(\boldsymbol{b^2} + \boldsymbol{c^2} - \boldsymbol{a^2})^2}}{\boldsymbol{a}} \leq \frac{\boldsymbol{bc}}{\boldsymbol{a}}.$$

Dấu bằng trong bất đẳng thức trên xảy ra khi và chỉ khi $\boldsymbol{a^2} = \boldsymbol{b^2} + \boldsymbol{c^2}$**,** hay là tam giác ΔABC vuông tại A.

Lập luận tương tự ta được

$$\boldsymbol{h_b} = \frac{\boldsymbol{2S}}{\boldsymbol{b}} = \frac{\sqrt{\boldsymbol{a^2c^2} - \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{4}}(\boldsymbol{a^2} + \boldsymbol{c^2} - \boldsymbol{b^2})^2}}{\boldsymbol{a}} \leq \frac{\boldsymbol{ac}}{\boldsymbol{b}};$$

$$\boldsymbol{h_c} = \frac{\boldsymbol{2S}}{\boldsymbol{c}} = \frac{\sqrt{\boldsymbol{b^2a^2} - \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{4}}(\boldsymbol{b^2} + \boldsymbol{a^2} - \boldsymbol{c^2})^2}}{\boldsymbol{c}} \leq \frac{\boldsymbol{ab}}{\boldsymbol{c}}$$

và dựa vào hai đánh giá trên chúng ta cũng đạt được dấu đẳng thức khi và chỉ khi tam giác ΔABC vuông tại B và vuông tại C tương ứng. Điều này hoàn thành chứng minh. ⊡

3. Đánh giá hệ thức lượng trong tam giác

Phần này cung cấp các công thức đánh giá sin, côsin, tan và côtan của các góc trong một tam giác luôn thay đổi ΔABC khi biết độ dài 3 cạnh là $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$.

Định lí 4 (Công thức đánh giá sin) Cho tam giác ΔABC có 3 cạnh là $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$. Khi đó:

$$\sin\frac{\widehat{BAC}}{2} \le \frac{a}{2\sqrt{bc}};$$
$$\sin\frac{\widehat{ABC}}{2} \le \frac{b}{2\sqrt{ac}};$$
$$\sin\frac{\widehat{ACB}}{2} \le \frac{c}{2\sqrt{ab}}.$$

Dấu bằng trong mỗi bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ΔABC cân lần lượt tại A, B, C tương ứng.

Chứng minh: Áp dụng Định lí côsin trong tam giác:

$$\cos\widehat{BAC} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};$$
$$\cos\widehat{AbC} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac};$$
$$\cos\widehat{ACB} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Đẳng thức trên dẫn đến

$$1 - \cos\widehat{BAC} \le \frac{a^2}{2bc};$$
$$1 - \cos\widehat{ABC} \le \frac{b^2}{2ac};$$
$$1 - \cos\widehat{ACB} \le \frac{c^2}{2ab}.$$

Dấu bằng trong mỗi bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b = c$; $c = a$; $a = b$ tương ứng, hay ta có tam giác ΔABC cân lần lượt tại A, B, C tương ứng. Mặt khác, áp dụng công thức lượng giác $1 - cos \propto = 2sin^2\frac{\propto}{2}$. ta có điều cần chứng minh. ⊡

Định lí 5 (Công thức đánh giá côsin). Cho tam giác ΔABC có 3 cạnh là a, b, c. Khi đó:

(i) Nếu $4bc \ge a^2$ thì $\cos\frac{\widehat{BAC}}{2} \ge \sqrt{1 - \frac{a^2}{4bc}}$.

(ii) Nếu $4ac \ge b^2$ thì $\cos\frac{\widehat{ABC}}{2} \ge \sqrt{1 - \frac{b^2}{4ac}}$.

(iii) Nếu $4ab \ge c^2$ thì $\cos\frac{\widehat{ACB}}{2} \ge \sqrt{1 - \frac{c^2}{4ab}}$.

Dấu bằng trong mỗi bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ΔABC cân lần lượt tại A, B, C tương ứng.

Chứng minh: Ta có công thức lượng giác

$$1 + cos \propto = 2cos^2\frac{\propto}{2} \quad (*)$$

Áp dụng định lý côsin trong tam giác và sau đó kết hợp đẳng thức (*) ta được

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\left(2cos^2\frac{\widehat{BAC}}{2} - 1\right)$$
$$\ge 4bc\left(1 - cos^2\frac{\widehat{BAC}}{2}\right).$$

(i) Nếu $4bc \ge a^2$ thì chia 2 vế bất đẳng thức trên cho $4bc$, chuyển hàm lượng giác về một vế và lấy căn bậc hai cho cả hai vế ta được

$$\sqrt{1 - \frac{a^2}{4bc}} \le \cos\frac{\widehat{BAC}}{2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $b = c$, hay tam giác ΔABC cân tại A. Mặt khác, ta cũng có đẳng thức và đánh giá sau:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\left(2\,cos^2\frac{\widehat{ABC}}{2} - 1\right)$$
$$\ge 4ac\left(1 - cos^2\frac{\widehat{ABC}}{2}\right).$$

(ii) Nếu $4ac \ge a^2$ thì chia 2 vế bất đẳng thức trên cho $4ac$, chuyển hàm lượng giác về một vế và lấy căn bậc hai cho cả hai vế nhận được

$$\sqrt{1 - \frac{b^2}{4ac}} \le \cos\frac{\widehat{ABC}}{2}.$$

Áp dụng định lý côsin:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\left(2cos^2\frac{\widehat{ACB}}{2} - 1\right)$$
$$\ge 4ab\left(1 - cos^2\frac{\widehat{ACB}}{2}\right).$$

(iii) Nếu $4ab \ge c^2$ thì chia 2 về bất đẳng thức trên cho $4ab$, chuyển hàm lượng giác về một vế và lấy căn bậc hai cho cả hai vế dẫn đến

$$\sqrt{1 - \frac{c^2}{4ab}} \le \cos\frac{\widehat{ACB}}{2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra cho trường hợp (ii) là $a = c$ và trường hợp (iii) là $a = b$.

Điều phải chứng minh. ⊡

Nhận xét: Chúng ta cũng có thể đánh giá các chặn dưới của hàm lượng giác côsin bằng cách sử dụng hằng đẳng thức $cos^2 \propto + sin^2 \propto = 1$ và đánh giá chặn trên của hàm lượng giác sin trong

Định lí 4 trên. Chẳng hạn, xét trường hợp đánh giá chặn dưới cho công thức đầu tiên ta sử dụng

$$\cos\frac{\widehat{BAC}}{2} = \sqrt{1-\sin^2\frac{\widehat{BAC}}{2}} \geq \sqrt{1-\left(\frac{a}{2\sqrt{bc}}\right)^2}.$$

Định lí 5 (Công thức đánh giá tan). Cho tam giác ΔABC có 3 cạnh là $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$. Khi đó:

(i) Nếu $4\boldsymbol{bc} > \boldsymbol{a}^2$ thì $\tan\frac{\widehat{BAC}}{2} \leq \frac{a}{\sqrt{4bc-a^2}}$.

(ii) Nếu $4\boldsymbol{ac} > \boldsymbol{b}^2$ thì $\tan\frac{\widehat{ABC}}{2} \leq \frac{b}{\sqrt{4ac-b^2}}$.

(iii) Nếu $4\boldsymbol{ab} > \boldsymbol{c}^2$ thì $\tan\frac{\widehat{ACB}}{2} \leq \frac{c}{\sqrt{4ab-c^2}}$.

Dấu bằng trong mỗi bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ΔABC cân lần lượt tại A, B, C tương ứng.

Chứng minh: Sử dụng hệ thức lượng giác kết hợp với Định lí 4 và Định lí 5 ta được

$$\tan\frac{\widehat{BAC}}{2} = \frac{\sin\frac{\widehat{BAC}}{2}}{\cos\frac{\widehat{BAC}}{2}} \leq \frac{\frac{a}{2\sqrt{bc}}}{\sqrt{1-\frac{a^2}{4bc}}} = \frac{a}{\sqrt{4bc-a^2}};$$

$$\tan\frac{\widehat{ABC}}{2} = \frac{\sin\frac{\widehat{ABC}}{2}}{\cos\frac{\widehat{ABC}}{2}} \leq \frac{\frac{b}{2\sqrt{ac}}}{\sqrt{1-\frac{b^2}{4ac}}} = \frac{b}{\sqrt{4ac-b^2}};$$

$$\tan\frac{\widehat{ACB}}{2} = \frac{\sin\frac{\widehat{ACB}}{2}}{\cos\frac{\widehat{ACB}}{2}} \leq \frac{\frac{c}{2\sqrt{ab}}}{\sqrt{1-\frac{c^2}{4ab}}} = \frac{c}{\sqrt{4ab-c^2}}.$$

Dấu bằng xảy ra dựa vào kết quả trong Định lí 4 và Định lí 5. Điều phải chứng minh. ⊡

Hệ quả 1. (Công thức đánh giá côtan) Cho tam giác ΔABC có 3 cạnh là $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$. Khi đó:

(i) Nếu $4\boldsymbol{bc} \geq \boldsymbol{a}^2$ thì $\cot\frac{\widehat{BAC}}{2} \geq \frac{\sqrt{4bc-a^2}}{a}$.

(ii) Nếu $4\boldsymbol{ac} \geq \boldsymbol{b}^2$ thì $\cot\frac{\widehat{ABC}}{2} \geq \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{b}$.

(iii) Nếu $4\boldsymbol{ab} \geq \boldsymbol{c}^2$ thì $\cot\frac{\widehat{ACB}}{2} \geq \frac{\sqrt{4ab-c^2}}{c}$.

Dấu bằng trong mỗi bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ΔABC cân lần lượt tại A, B, C tương ứng.

Chứng minh: Sử dụng công thức tích cotan và tan của góc lượng giác bằng hằng 1 và đánh giá chặn trên trong Định lí 5, ta có

$$1 = \tan\frac{\widehat{BAC}}{2}\times\cot\frac{\widehat{BAC}}{2} \leq \frac{a}{\sqrt{4bc-a^2}}\times\cot\frac{\widehat{BAC}}{2};$$

$$1 = \tan\frac{\widehat{ACB}}{2}\times\cot\frac{\widehat{ACB}}{2} \leq \frac{c}{\sqrt{4ab-c^2}}\times\cot\frac{\widehat{ACB}}{2};$$

$$1 = \tan\frac{\widehat{ABC}}{2}\times\cot\frac{\widehat{ABC}}{2} \leq \frac{b}{\sqrt{4ac-b^2}}\times\cot\frac{\widehat{ABC}}{2}.$$

Suy ra

$$\cot\frac{\widehat{BAC}}{2} \geq \frac{\sqrt{4bc-a^2}}{a};$$

$$\cot\frac{\widehat{ABC}}{2} \geq \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{b};$$

$$\cot\frac{\widehat{ACB}}{2} \geq \frac{\sqrt{4ab-c^2}}{c}.$$

Áp dụng Định lí 5, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ΔABC cân tại A, cân tại B và cân tại C tương ứng.

Điều phải chứng minh. ⊡

Ví dụ 4. Cho tam giác ΔABC có 3 cạnh là $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$. Chứng minh rằng tam giác ΔABC cân (tương ứng đều) nếu có một (tương ứng hai) trong số các đăng thức sau được thỏa mãn

$$1-\frac{a^2}{2bc} = \cos\widehat{BAC};$$

$$\mathbf{1}-\frac{\boldsymbol{b}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}\boldsymbol{ac}}=\mathbf{cos}\,\widehat{\boldsymbol{ABC}}\,;$$

$$\mathbf{1}-\frac{\boldsymbol{c}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}\boldsymbol{ab}}=\mathbf{cos}\,\widehat{\boldsymbol{ACB}}.$$

Bài giải: Theo chứng minh Định lí 4 ta có đánh giá như sau:

$$\mathbf{1}-\mathbf{cos}\,\widehat{\boldsymbol{BAC}}\le\frac{\boldsymbol{a}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}\boldsymbol{bc}}\;\; \textit{và dấu}$$

đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$;

$$\mathbf{1}-\mathbf{cos}\,\widehat{\boldsymbol{ABC}}\le\frac{\boldsymbol{b}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}\boldsymbol{ac}}\;\; \textit{và dấu}$$

đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$

$$\mathbf{1}-\mathbf{cos}\,\widehat{\boldsymbol{ACB}}\le\frac{\boldsymbol{c}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}\boldsymbol{ab}}\;\; \textit{và dấu}$$

đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$.

Do đó, tam giác ΔABC cân nếu có một trong số các đăng thức trên thỏa mãn; tam giác ΔABC đều nếu có hai trong số các đăng thức trên xảy ra.

Điều phải chứng minh. ⊡

<u>Nhận xét:</u> Nếu ΔABC là một tam giác đều thì $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$ và do đó tất cả các đánh giá các chặn trên và các chặn dưới cho hệ thức lượng trong tam giác đều xảy ra dấu "=".

5. Kết luận

Trong bài báo này chúng tôi đã thiết lập được các đánh giá cho các chặn trên và chặn dưới của hệ thức lượng trong một tam giác tùy ý bao gồm công thức đánh giá các hàm sin, côsin, tan và côtan của các góc trong một tam giác; công thức đánh giá đường cao tam giác vẽ từ một đỉnh xuống các cạnh đối diện không sử dụng yếu tố diện tích cũng được thiết lập. Các ví dụ áp dụng cũng được đề xuất để mô tả các kết quả đạt được của bài báo nghiên cứu.

Tài liệu tham khảo

Gardiner, A. (1997). The Mathematical Olympiad Handbook: An Introduction to Problem Solving based on the First 32 British Mathematical Olympiads *1965-1996, Oxford University Press, Oxford*.

Grigorieva, E. (2001). Complex Math Problems and How to Solve Them, *TWU Press, Library of Congress, Texas*. https://doi.org/u001007606/2001-07-11.

Grigorieva, E. (2013). Methods of solving complex geometry problems, *Birkh**ä**user*.

Hartshorne, R. (2000). Geometry: Euclide and Beyond, *Springer, New York*.

Nelsen, R. B. (2001). Heron's formula via proofs without words, *Coll. Math. J.* vol 32, 290-292. *https://doi.org/10.2307/2687566*

Raifazen, C. H. (1971). A simple proof of Heron's formula, *Math. Mag.* vol 44, pp. 27-28, 1971. https://doi.org/10.1080/0025570X.1971.11976093

Shklarsky, D. O., & Chentzov, N. N. (1993) and I. M. Yaglom, The USSR Olympiad Problem Book: Selected Problems and Theorems of Elementary Mathematics. *Dover, New York*.