XÂY DỰNG HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TỨ GIÁC NỘI TIẾP ĐƯỜNG TRÒN VÀ MỘT SỐ ÁP DỤNG

Nguyễn Thị Thanh Trim[1, 2*] và Trần Văn Sự[1]

[1]*Trường Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng, Đà Nẵng, Việt Nam*

[2]*Trường Trung học phổ thông Phạm Phú Thứ, thành phố Đà Nẵng, Việt Nam*

[*]*Tác giả liên hệ: Nguyễn Thị Thanh Trim, Email: bimnguyen2710@gmail.com*

Lịch sử bài báo

Ngày nhận: 04/02/2024; Ngày nhận chỉnh sửa: 28/3/2024; Ngày duyệt đăng: 30/3/2024

Tóm tắt

Bài viết xây dựng các hệ thức lượng cho một tứ giác nội tiếp đường tròn. Công thức của Brahmagupta về tính diện tích của tứ giác nội tiếp được giới thiệu và chứng minh chi tiết. Sau đó, chúng tôi xây dựng các công thức lượng giác để tính các góc của một tứ giác nội tiếp trong đường tròn như công thức tính sin, công thức tính cosin và một số công thức tính chiều cao liên quan. Bên cạnh đó một số công thức tính diện tích của tam giác, hình bình hành, hình thoi, hình chữ nhật và hình vuông được mô tả lại như một áp dụng trực tiếp công thức dạng Brahmagupta. Một số ví dụ minh họa cho các bài toán liên quan đến tứ giác nội tiếp đường tròn được đề xuất để áp dụng các kết quả đạt được.

Từ khóa: *Diện tích, tứ giác nội tiếp, đường tròn ngoại tiếp, hệ thức lượng, góc.*

BUILDING TRIGONOMETRIC SYSTEMS FOR CIRCLE QUADRILATERALS IN A CIRCLE AND ITS APPLICATIONS

Nguyễn Thị Thanh Trim[1, 2*] and Tran Van Su[1]

[1]*The University of Danang - University of Science and Education, Da Nang 550000, Vietnam*

[2]*Pham Phu Thu High School, Da Nang City, Viet Nam*

[*]*Corresponding author: Nguyen Thi Thanh Trim, Email: bimnguyen2710@gmail.com*

Article history

Received: 04/02/2024; Received in revised form: 28/3/2024; Accepted: 30/3/2024

Abstract

This study is to construct trigonometric systems for a cyclic quadrilateral in a given circle. Brahmagupta's formula for calculating the area value of a cyclic quadrilateral is introduced and proven, in detail. Then, trigonometric formulas are built to compute the angle value of a circle quadrilateral in a circle such as the sine, the cosine, and other related height formulas. Besides, some formulas for calculating the area value of triangles, parallelograms, rhombus, rectangles and squares are described as a direct application to the formula of the Brahmagupta-type. Some illustrative examples for problems related to a circle quadrilateral in a circle are proposed to apply the obtained results.

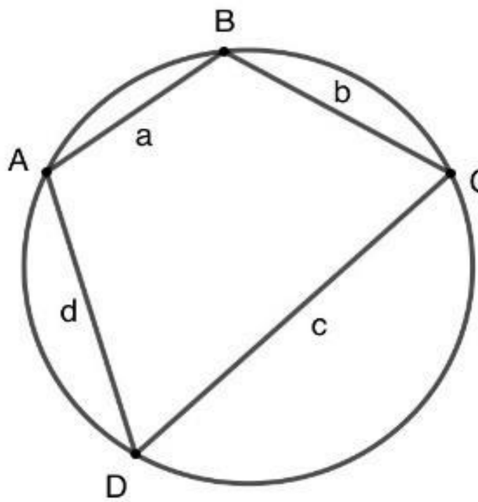
Keywords: *Area, cyclic quadrilateral, circumscribed circle, trigonometric systems, angle.*

DOI: https://doi.org/10.52714/dthu.13.8.2024.1358

Trích dẫn: Nguyễn, T. T. T., & Trần, V. S. (2024). Xây dựng hệ thức lượng trong tứ giác nội tiếp đường tròn và một số áp dụng. *Tạp chí Khoa học Đại học Đồng Tháp, 13*(8), 94-100. https://doi.org/10.52714/dthu.13.8.2024.1358.

1. Giới thiệu

Cho tứ giác $ABCD$ có 4 cạnh lần lượt là a, b, c, d nội tiếp trong đường tròn (O). Bài toán được đặt ra là: hãy xác định sin, cos, tan và cotan của các góc bên trong tứ giác ABCD theo a, b, c, d.



Hình 1. Tứ giác $ABCD$ nội tiếp một đường tròn.

Phân tích bài toán trên ta thấy: 1) nếu biết được độ dài một đường chéo của tứ giác $ABCD$ thì dễ dàng tính được sin, cos, tan và cotan của các góc bên trong tứ giác $ABCD$ theo a, b, c, d bằng cách sử dụng các định lý sin và côsin trong một tam giác; 2) nếu không biết được độ dài đường chéo thì đây là một vấn đề tương đối khó đối với người làm toán hình học.

Theo hiểu biết của chúng tôi, hiện tại chưa có công thức tổng quát nào dùng để tính sin, cos, tan và cotan của các góc bên trong tứ giác ABCD theo a, b, c, d xảy ra đối với trường hợp 2).

Brahmagupta là nhà Toán học thiên tài người Ấn Độ có nhiều đóng góp quan trọng trong lĩnh vực hình học sơ cấp và lý thuyết số (xem Puttaswamy (2012) và tài liệu trích dẫn trong đó). Ông đã đề xuất công thức tính diện tích tứ giác nội tiếp đường tròn thông qua cạnh và nửa chu vi của tứ giác, một phiên bản tính diện tích tương tự như phiên bản tính diện tích của Hêron (xem Levrie (2019)) cho tam giác bất kỳ nếu biết trước các cạnh của một tam giác. Kết quả của Brahmagupta được trình bày như sau:

Định lý (*Diện tích tứ giác theo Brahmagupta*)

Cho $\boldsymbol{ABCD}$ là một tứ giác nội tiếp có 4 cạnh là $\boldsymbol{a, b, c, d > 0}$. Khi đó, diện tích

$$\boldsymbol{S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}$$

trong đó $\boldsymbol{p}$ là nửa chu vi của tứ giác $\boldsymbol{ABCD}$.

Quay trở lại bài toán ban đầu, thay vì đi xác định độ dài một đường chéo trong tứ giác, chúng ta biết được diện tích tứ giác $ABCD$ theo cách tính của Brahmagupta. Bằng cách phân tách tứ giác $ABCD$ thành 2 tam giác cùng chung 2 đỉnh và sử dụng công thức tính diện tích tam giác với độ dài 2 cạnh đã cho và sin của góc nằm giữa 2 cạnh đó, chúng ta dễ dàng tìm được sin của góc nằm giữa 2 cạnh dựa vào giả thiết tứ giác nội tiếp sẽ có tổng 2 góc đối diện luôn bằng 180^0. Cách xác định cos, tan và cotan sẽ thông qua các hệ thức lượng trong một tam giác với độ dài các cạnh đã cho. Với cách làm theo phương pháp trên, trong bài báo này chúng tôi sẽ giải quyết được bài toán được đặt ra ban đầu. Bên cạnh chúng tôi cũng tìm một số ví dụ phản chứng để chỉ ra rằng kết quả đạt được trong bài báo sẽ không còn đúng đối với một tứ giác tùy ý (không nội tiếp trong một đường tròn (O)).

Việc giải quyết được bài toán trên giúp người học có thể nhìn nhận một cách tổng thể hơn về hệ thức lượng trong một tam giác bởi vì một tam giác tùy ý luôn nội tiếp được trong một đường tròn (O) và tứ giác nội tiếp đường tròn (O) chính là sự chèn thêm 1 đỉnh nằm trên vòng tròn (O) không trùng với 3 đỉnh của một tam giác cho trước.

Xây dựng hệ thức lượng trong một tứ giác nội tiếp có vai trò quan trọng trong hình học, nó giúp chúng ta tính toán được các giá trị sin, cos, tan và cotan của một góc nào đó trong một tứ giác nội tiếp dựa vào độ dài 4 cạnh đã biết mà không nhất thiết đo được độ dài đường chéo tứ giác, làm cơ sở để nghiên cứu hệ thức lượng trong một đa giác nội tiếp tổng quát sau này. Theo hiểu biết chúng tôi, hiện tại vẫn chưa thấy có bất kỳ một lời giải nào liên quan đến bài toán đặt ra bên trên.

Hệ thức lượng trong tam giác là một nội dung toán học - hình học quan trọng và đã được sử dụng khá phổ biến trong thực tế, được áp dụng để đo đạc, tính toán các yếu tố về góc - cạnh cho một tam giác tùy ý (xem Grigorieva (2013), Hartshorne (2000) và Blinkov (2010)) và một số áp dụng đo đạc trong thực tế. Hệ thức lượng trong tam giác và giải bài toán trong tam giác đã trở thành kiến thức kinh điển và chúng được đưa vào sách giáo khoa giảng dạy cho học sinh THCS và THPT. Các bài toán liên quan đến hệ thức lượng trong tam giác được khai thác và sử dụng hằng ngày và chúng trở nên khá quen thuộc với tất cả mọi người trong đời sống hằng ngày (xem Bold (1969), Eves (1990) và Nelsen (2001)).

Hệ thức lượng trong tứ giác nội tiếp đường tròn là một chủ đề nghiên cứu tương đối mới và hấp dẫn, được chúng tôi đề xuất nghiên cứu trong bài báo này nhằm mục đích cung cấp cho chúng ta một công cụ đo lường các yếu tố góc-cạnh của một tứ giác nội tiếp đường tròn. Hệ thức trong tứ giác nội tiếp là một trong những công thức sử dụng để tính toán các giá trị của hàm lượng giác (sin, cos, tan, cot) của các góc trong tứ giác nội tiếp. Đây là nội dung thú vị và có nhiều áp dụng thực tế nên chúng đã trở thành động lực cho chúng tôi nghiên cứu và hoàn thiện nội dung nghiên cứu trong bài báo này.

2. Diện tích tứ giác nội tiếp

Phần này phát biểu và chứng minh lại công thức tính diện tích cho các hình tứ giác nội tiếp trong đường tròn của Brahmagupta. Chứng minh của chúng tôi được dựa trên ý tưởng chứng minh của Brahmagupta. Bên cạnh đó một vài ứng dụng của công thức cho các tứ giác đặc biệt được thiết lập.

Định lý 1 (Diện tích tứ giác theo Brahmagupta)

Cho $\boldsymbol{ABCD}$ là một tứ giác nội tiếp có 4 cạnh là $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d} > \boldsymbol{0}$. Khi đó, diện tích

$$\boldsymbol{S} = \sqrt{(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{a})(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{c})(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{d})}$$

trong đó $\boldsymbol{p} = \frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{2}}$ là nửa chu vi của tứ giác $\boldsymbol{ABCD}$.

Chứng minh:

Vì tứ diện $\boldsymbol{ABCD}$ nội tiếp trong một đường tròn nên tổng 2 góc trong nằm đối diện nhau của tứ giác bằng $\boldsymbol{180^0}$. Sử dụng tính chất tổng 2 góc lượng giác bù nhau của hàm số lượng giác $\mathbf{sin}$: $\mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$ ta có

$$\mathbf{sin}\,\widehat{\boldsymbol{ADC}} = \mathbf{sin}\left(\boldsymbol{180^0} - \widehat{\boldsymbol{ADC}}\right) = \mathbf{sin}\,\widehat{\boldsymbol{ABC}}$$

và hàm số lượng giác cos: $\mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$ ta được

$$\mathbf{cos}\,\widehat{\boldsymbol{ADC}} = -\mathbf{cos}\left(\boldsymbol{180^0} - \widehat{\boldsymbol{ADC}}\right) = -\,\mathbf{cos}\,\widehat{\boldsymbol{ABC}}.$$

Do đó:

$$\boldsymbol{a^2} + \boldsymbol{b^2} - \boldsymbol{2ab}\ \mathbf{cos}\,\widehat{\boldsymbol{ABC}} = \boldsymbol{c^2} + \boldsymbol{d^2} + \boldsymbol{2cd}\,\mathbf{cos}\,\widehat{\boldsymbol{ABC}}$$

vì cả hai vế đều cùng bằng với $\boldsymbol{AC^2}$ và diện tích

$$\boldsymbol{S} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}(\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{cd})\mathbf{sin}\,\widehat{\boldsymbol{ABC}}.$$

Rút các giá trị lượng giác của góc $\widehat{\boldsymbol{ABC}}$, sau đó bình phương và cộng chúng lại với nhau ta được

$$\left(\frac{\boldsymbol{a^2}+\boldsymbol{b^2}-\boldsymbol{c^2}-\boldsymbol{d^2}}{\boldsymbol{2}(\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{cd})}\right)^2 + \left(\frac{\boldsymbol{4S}}{\boldsymbol{2}(\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{cd})}\right)^2 = 1.$$

Thực hiện tính toán đơn giản hằng đẳng thức trên như sau:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{16S^2} &= \left(\boldsymbol{2}(\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{cd}) - \boldsymbol{a^2} - \boldsymbol{b^2} + \boldsymbol{c^2} + \boldsymbol{d^2}\right)\\ &\quad\times\left(\boldsymbol{2}(\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{cd}) + \boldsymbol{a^2} + \boldsymbol{b^2} - \boldsymbol{c^2} - \boldsymbol{d^2}\right)\\ &= \left((\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})^2 - (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2\right)\\ &\qquad\times\left((\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2 - (\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})^2\right)\\ &= \boldsymbol{16}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{a})(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{c})(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{d}).\end{aligned}$$

Rút gọn 16 cho 2 vế và sau đó lấy căn bậc hai của 2 vế trong đẳng thức trên ta được $\boldsymbol{S} = \sqrt{(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{a})(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{c})(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{d})}$.

Điều phải chứng minh. ⊡

<u>Nhận xét:</u> Nếu tứ giác $\boldsymbol{ABCD}$ không nội tiếp đường tròn thì công thức trên không còn đúng. Chẳng hạn, xét hình thang vuông $\boldsymbol{ABCD}$ có cạnh góc vuông là $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{2}$, $\boldsymbol{BC} = \boldsymbol{2AD} = \boldsymbol{4}$. Khi đó áp dụng công thức tính diện tích hình thang vuông $\boldsymbol{ABCD}$ ta được kết quả

$$\boldsymbol{S} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}(\boldsymbol{AD} + \boldsymbol{BC})\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{6}(\text{đvdt}).$$

Nếu áp dụng công thức tính diện tích trong Định lí 1, ta gọi $\boldsymbol{M}$ là trung điểm cạnh $\boldsymbol{BC}$ suy ra $\boldsymbol{MCD}$ là một tam giác vuông cân tại $\boldsymbol{M}$ và tính được

$$\boldsymbol{DC} = \boldsymbol{2}\sqrt{\boldsymbol{2}},$$

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{4} + \sqrt{\boldsymbol{2}}.$$

Khi đó:

$$\boldsymbol{S'} = \boldsymbol{2}\left(\sqrt{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{1}\right)\sqrt{\boldsymbol{2}\sqrt{\boldsymbol{2}} - \boldsymbol{1}}\ \ (\text{đvdt}).$$

Rõ ràng là $\boldsymbol{S} \neq \boldsymbol{S'}$, và từ đây chúng ta kết thúc việc kiểm tra. ⊡

Hệ quả 1 *(Diện tích hình bình hành)* Cho $\boldsymbol{ABCD}$ là một hình bình hành nội tiếp có 2 cạnh liên tiếp nhau là $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} > \boldsymbol{0}$. Khi đó, diện tích

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{ab}.$$

Chứng minh: Ta có $\boldsymbol{ABCD}$ là một tứ giác nội tiếp có 4 cạnh là $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$. Khi đó, ta có nửa chu vi hình bình hành là $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{a} + \mathrm{b}$. Áp dụng Định lí 1, ta có

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S} &= \sqrt{(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{a})^2(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{b})^2}\\ &= (\boldsymbol{p}-\boldsymbol{a})(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{ab}.\end{aligned}$$ ⊡

Nhận xét: Công thức tính diện tích trong Hệ quả 1 áp dụng cho hình chữ nhật cạnh $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ là $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{ab}$ và hình vuông cạnh $\boldsymbol{a}$ là $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{a^2}$.

Hệ quả 2 Hình bình hành nội tiếp đường tròn là hình chữ nhật, hình thoi nội tiếp đường tròn là hình vuông và hình thang nội tiếp đường tròn là hình thang cân.

Chứng minh: Gọi $\boldsymbol{ABCD}$ là hình bình hành nội tiếp đường tròn có 2 cạnh liên tiếp nhau là $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$. Áp dụng Hệ quả 1, ta có công thức tính diện tích hình bình hành $\boldsymbol{ABCD}$:

$$\boldsymbol{S = ab} \qquad (\mathbf{1})$$

Mặt khác, diện tích hình bình hành $\boldsymbol{ABCD}$ bằng tổng diện tích của hai tam giác $\boldsymbol{ABC}$ và $\boldsymbol{ADC}$, nên

$$\boldsymbol{S = \frac{1}{2}\left(ab\sin\widehat{ABC} + ab\sin\widehat{ADC}\right)} \qquad (\mathbf{2})$$

$$\boldsymbol{= ab\sin\widehat{ABC}}.$$

Từ **(1)** và **(2)** suy ra

$$\boldsymbol{\sin\widehat{ABC} = 1 \Rightarrow \widehat{ABC} = 90^0}.$$

Vậy $\boldsymbol{ABCD}$ là một hình chữ nhật.

Nếu $\boldsymbol{ABCD}$ là hình thoi thì nó là hình vuông bởi vì hình thoi là hình bình hành có 2 cạnh kề bằng nhau và có một góc vuông do chứng minh trên.

Nếu $\boldsymbol{ABCD}$ là hình thang thì nó có 2 cặp cạnh đáy song song với nhau. Không mất tính tổng quát ta giả sử rằng $\boldsymbol{AB//CD}$. Khi đó

$$\boldsymbol{\widehat{ABD} = \widehat{BDC}} \quad \text{(hai góc so le trong).}$$

Suy ra số đo hai cung bị chắn tương ứng với 2 góc trên bằng nhau và điều này dẫn đến

$$\boldsymbol{AD = BC}.$$

Vậy tứ giác $\boldsymbol{ABCD}$ là hình thang cân. ⊡

3. Hệ thức lượng trong tứ giác nội tiếp

Phần này cung cấp các công thức tính sin và côsin của các góc trong một tứ giác nội tiếp. Đồng thời, xây dựng công thức đường cao hạ từ đỉnh xuống cạnh đối diện.

Định lí 2 Cho $\boldsymbol{ABCD}$ là một tứ giác nội tiếp có 4 cạnh là $\boldsymbol{a, b, c, d > 0}$. Khi đó:

$$\boldsymbol{\cos\widehat{ABC} = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}};$$

$$\boldsymbol{\cos\widehat{BCD} = \frac{b^2 + c^2 - d^2 - a^2}{2(ad + bc)}};$$

$$\boldsymbol{\cos\widehat{ADC} = \frac{-a^2 - b^2 + c^2 + d^2}{2(ab + cd)}};$$

$$\boldsymbol{\cos\widehat{DAB} = \frac{-b^2 - c^2 + d^2 + a^2}{2(ad + bc)}}.$$

Chứng minh:

Áp dụng định lí côsin trong tam giác $\boldsymbol{ABC}$ và $\boldsymbol{ADC}$ ta có

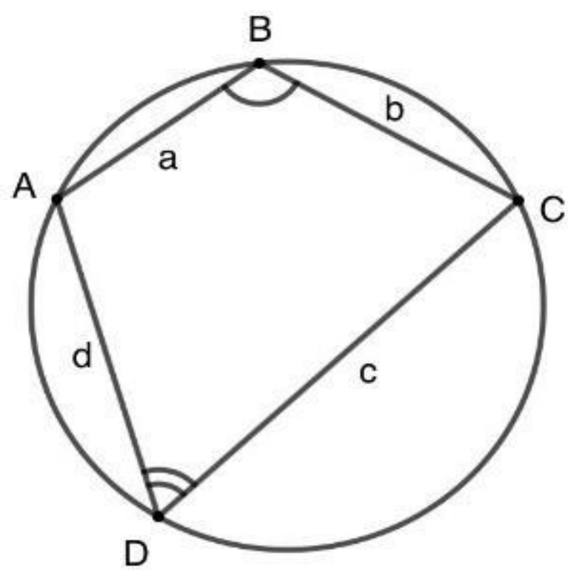
$$\boldsymbol{\cos\widehat{ABC} = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}}$$

hay

$$\boldsymbol{(ab + cd)\cos\widehat{ABC} = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2}}$$

tương đương với (vì $\boldsymbol{\cos\widehat{ABC} = -\cos\widehat{ADC}}$)

$$\boldsymbol{a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{ABC}}$$
$$\boldsymbol{= c^2 + d^2 - 2cd\cos\widehat{ADC}}.$$



Hình 2. Tứ giác nội tiếp đường tròn

Đẳng thức trên chính là định lí côsin trong tam giác. Các trường hợp còn lại được lập luận tương tự. Điều phải chứng minh. ⊡

Ví dụ 1: Cho $\boldsymbol{ABCD}$ là một tứ giác nội tiếp có 4 cạnh là $\boldsymbol{a, b, c, d > 0}$. Chứng minh rằng tổng bình phương hai đường chéo tứ giác bằng tổng bình phương các cạnh tứ giác khi và chỉ khi

$$\boldsymbol{\frac{ab + cd}{ad + bc} = -\frac{\cos\widehat{BCD}}{\cos\widehat{ABC}}}.$$

Bài giải:

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác $\boldsymbol{ABC}$ và $\boldsymbol{ADC}$ ta có

$$\boldsymbol{AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ \cos\widehat{ABC}}$$
$$\boldsymbol{= c^2 + d^2 - 2cd\cos\widehat{ADC}}.$$

Do đó:

$$\boldsymbol{AC^2 = \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right) - (ab + cd)\cos\widehat{ABC}}.$$

Lập luận tương tự như cách làm trên ta được

$$\boldsymbol{BD^2 = \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right) - (ad + bc)\cos\widehat{BCD}}.$$

Cộng hai đẳng thức trên lại với nhau, suy ra

$$\boldsymbol{AC^2 + BD^2 = \left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right) - (ab + cd)\cos\widehat{ABC} - (ad + bc)\cos\widehat{BCD}}.$$

Vậy:

$$\boldsymbol{AC^2 + BD^2 = \left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right)}$$

khi và chỉ khi

$$\boldsymbol{(ab + cd)\cos\widehat{ABC} + (bc + da)\cos\widehat{BCD} = 0},$$

và đẳng thức sau tương đương với

$$\boldsymbol{\frac{ab + cd}{ad + bc} = -\frac{\cos\widehat{BCD}}{\cos\widehat{ABC}}}.$$

Điều phải chứng minh. ⊡

<u>Nhận xét:</u> Nếu $\boldsymbol{ABCD}$ là hình bình hành thì đẳng thức

$$\boldsymbol{\frac{ab + cd}{ad + bc} = 1 = -\frac{\cos\widehat{BCD}}{\cos\widehat{ABC}}}$$

tự động thoả mãn và do đó tổng bình phương hai đường chéo hình bình hành bằng tổng bình phương các cạnh của hình bình hành.

Định lý 3 Cho $\boldsymbol{ABCD}$ là một tứ giác nội tiếp có 4 cạnh là $\boldsymbol{a, b, c, d > 0}$. Khi đó

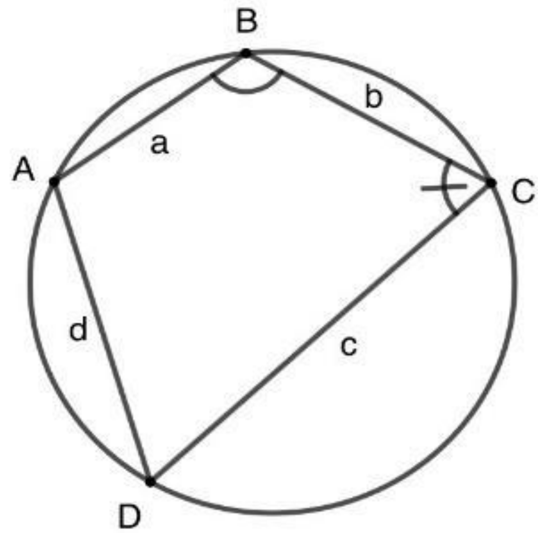
$$\boldsymbol{\sin\widehat{ABC} = \frac{2\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{ab + cd}};$$
$$\boldsymbol{\sin\widehat{BCD} = \frac{2\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{ad + bc}};$$
$$\boldsymbol{\sin\widehat{ADC} = \frac{2\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{ab + cd}};$$
$$\boldsymbol{\sin\widehat{DAB} = \frac{2\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{ad + bc}},$$

trong đó $\boldsymbol{p}$ là nửa chu vi của tứ giác $\boldsymbol{ABCD}$.

Chứng minh:

Áp dụng kết quả chứng minh trong Định lí 1 ta được

$$\boldsymbol{S = \frac{1}{2}(ab + cd)\sin\widehat{ABC}}$$
$$\boldsymbol{\Leftrightarrow \sin\widehat{ABC} = \frac{2S}{ab + cd}}.$$



Hình 3. Tứ giác nội tiếp đường tròn

Mà diện tích *S* được xác định theo Định lí 1, ta suy ra

$$\boldsymbol{\sin\widehat{ABC} = \frac{2\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{ab + cd}}.$$

Một cách tương tự ta cũng có

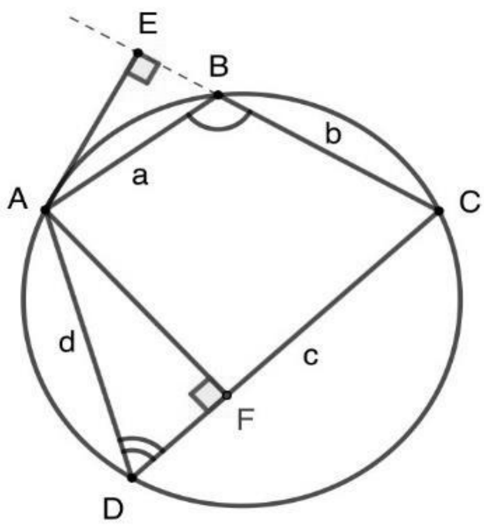
$$\boldsymbol{\sin\widehat{BCD} = \frac{2\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{ad + bc}}.$$

Lập luận tương tự như trên ta cũng thu được các công thức còn lại.

Điều phải chứng minh. ⊡

Định lý 4 Cho $\boldsymbol{ABCD}$ là một tứ giác nội tiếp có 4 cạnh là $\boldsymbol{a, b, c, d > 0}$. Gọi $\boldsymbol{AE, AF}$ lần lượt là các đường cao hạ từ đỉnh $\boldsymbol{A}$ lên các cạnh $\boldsymbol{BC}$ và $\boldsymbol{DC}$ của tứ giác **ABCD**, và S là diện tích tứ giác *ABCD*. Khi đó:

$$\boldsymbol{AE = \frac{2aS}{ab + cd}};$$
$$\boldsymbol{AF = \frac{2dS}{ab + cd}}.$$



Hình 4. Đường cao AE và AF

Chứng minh:

Áp dụng công thức lượng giác có đường cao $\boldsymbol{AE}$ với $\boldsymbol{E}$ là hình chiếu của $\boldsymbol{A}$ lên cạnh $\boldsymbol{BC}$, ta có

$$\sin\widehat{ABC} = \frac{AE}{a}$$

$$\Rightarrow \quad AE = a\sin\widehat{ABC}.$$

Sử dụng Định lí 3 với công thức tính diện tích *S* trong Định lí 1, ta nhận được kết quả

$$\sin\widehat{ABC} = \frac{2S}{ab+cd}.$$

Do đó:

$$AE = \frac{2aS}{ab+cd}.$$

Xét cho trường hợp còn lại, ta được

$$\sin\widehat{ADC} = \frac{AF}{d}$$

$$\Rightarrow \quad AF = d\sin\widehat{ADC}.$$

Lại sử dụng Định lí 3 với công thức tính diện tích *S* trong Định lí 1, ta có

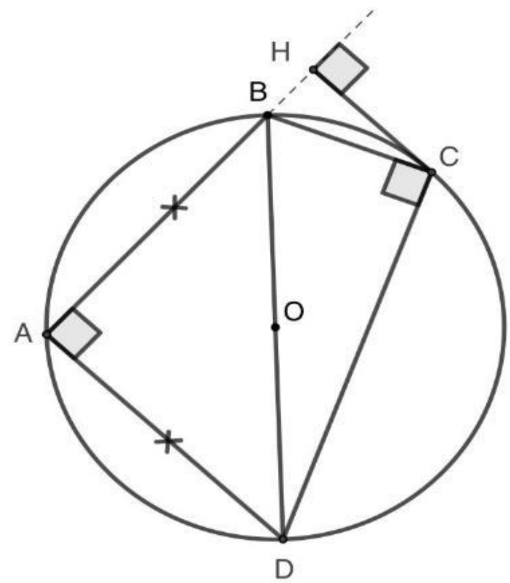
$$\sin\widehat{ADC} = \frac{2S}{ab+cd}.$$

Do đó:

$$AF = \frac{2dS}{ab+cd}.$$

Điều phải chứng minh. ⊡

Ví dụ 2: Cho tứ giác $\boldsymbol{ABCD}$ nội tiếp một đường tròn đường kính $\boldsymbol{BD}$ trong đó $\boldsymbol{AB = AD = 2a}$, $\boldsymbol{BC = a}$. Tính sin của các góc trong tứ giác $\boldsymbol{ABCD}$. Đường thẳng qua $\boldsymbol{C}$ song song với $\boldsymbol{AD}$ cắt $\boldsymbol{AB}$ tại $\boldsymbol{H}$. Xác định độ dài đoạn $\boldsymbol{CH}$.



Hình 5. CH song song AD

Bài giải:

Vì tứ giác $\boldsymbol{ABCD}$ nội tiếp đường tròn đường kính $\boldsymbol{BD}$ nên ta có các góc

$$\widehat{BAD} = \widehat{BCD} = 90^0.$$

Do đó độ dài cạnh góc vuông $\boldsymbol{CD}$ là

$$CD = \sqrt{AB^2 + AD^2 - BC^2} = a\sqrt{7}$$

và diện tích tứ giác $\boldsymbol{ABCD}$ là

$$S = \frac{1}{2}(AB.AD + BC.CD) = \frac{4+\sqrt{7}}{2}a^2.$$

Áp dụng hệ thức lượng tứ giác nội tiếp ta có

$$\sin\widehat{ABC} = \frac{2S}{AB.BC + CD.DA} = \frac{4+\sqrt{7}}{2(1+\sqrt{7})};$$

$$\sin\widehat{ADC} = \sin\left(180^0 - \widehat{ABC}\right) = \frac{4+\sqrt{7}}{2(1+\sqrt{7})};$$

$$\sin\widehat{BAD} = \sin\widehat{BCD} = 1.$$

Vì $\boldsymbol{CH}$ song song với $\boldsymbol{AD}$ nên $\boldsymbol{CH}$ là đường cao hạ từ đỉnh $\boldsymbol{C}$ xuống đường thẳng $\boldsymbol{AB}$ của tứ giác nội tiếp $\boldsymbol{ABCD}$.

Áp dụng công thức tính đường cao ta được

$$CH = \frac{2.BC.S}{AB.BC + CD.DA} = \frac{4+\sqrt{7}}{2(1+\sqrt{7})}a.$$

Định lý 5 (Hệ thức lượng tứ giác nội tiếp) Cho $\boldsymbol{ABCD}$ là một tứ giác nội tiếp có 4 cạnh là $\boldsymbol{a,b,c,d>0}$. Khi đó:

$$\sin\widehat{ABC}=\frac{2S}{ab+cd};$$

$$\cos\widehat{ABC}=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)};$$

$$\tan\widehat{ABC}=\frac{4S}{a^2+b^2-c^2-d^2};$$

$$\cot\widehat{ABC}=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{4S}.$$

Chứng minh:

Kết hợp Định lí 1và Định lí 3 ta có công thức sin:

$$\sin\widehat{ABC}=\frac{2S}{ab+cd}.$$

Áp dụng Định lí 2 suy ra công thức côsin:

$$\cos\widehat{ABC}=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}.$$

Áp dụng hệ thức lượng trong trong đường tròn ta được:

$$\tan\widehat{ABC}=\frac{\sin\widehat{ABC}}{\cos\widehat{ABC}};$$

$$\cot\widehat{ABC}=\frac{\cos\widehat{ABC}}{\sin\widehat{ABC}},$$

Suy ra các kết quả còn lại. $\boxdot$

Ví dụ 3: Cho $\boldsymbol{ABCD}$ là một tứ giác nội tiếp có 4 cạnh là $\boldsymbol{a,b,c,d>0}$. Chứng minh rằng

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{4(ab+cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}$$

Bài giải:

Áp dụng hệ thức lượng trong tứ giác $\boldsymbol{ABCD}$ nội tiếp ta có

$$\sin\widehat{ABC}=\frac{2S}{ab+cd}.$$

Theo *Định lí 5*:

$$\cos\widehat{ABC}=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}.$$

Bình phương 2 vế các đẳng thức trên và cộng vế theo vế của chúng lại với nhau dẫn đến

$$\left(\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}\right)^2+\left(\frac{4S}{2(ab+cd)}\right)^2=1.$$

Do đó:

$$(4S)^2=(2(ab+cd))^2-\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2.$$

Suy ra

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{4(ab+cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}.$$

Điều phải chứng minh. $\boxdot$

4. Kết luận

Trong bài viết chúng tôi đã thiết lập được các hệ thức lượng cho tứ giác nội tiếp trong một đường tròn bao gồm công thức tính sin và côsin, tan và côtan của tất cả các góc trong một tứ giác nội tiếp đường tròn; các công thức tính độ dài của đường cao tứ giác nội tiếp hạ từ một đỉnh xuống các cạnh đối diện theo yếu tố diện tích cũng được thiết lập. Một số ví dụ cũng được đề xuất cho sự áp dụng.

Tài liệu tham khảo

Blinkov, A.D. (2010). Geometric Problems on Construction, Moscow Mathematical Education Press, Moscow (in Russian).

Bold, B. (1969). Famous problems of geometry and how to solve them, *Dover, New York*.

Eves, H. (1990). An Introduction to the History of Mathematics, *Thomson Brooks/Cole, New York*.

Grigorieva, E. (2013). Methods of solving complex geometry problems, *Birkhäuser*.

Hartshorne, R. (2000). Geometry: Euclide and Beyond, *Springer, New York*.

Levrie, P. A. (2019). Straightforward Proof of Descartes's Circle Theorem, *Math Intelligencer.vol* 41, pp. 24-27. *https://doi.org/*10.1007/s00283-019-09883-x

Nelsen, R.B. (2001). Heron's formula via proofs without words, *Coll. Math. J.* vol 32, pp. 290-292. *https://doi.org/10.2307/2687566*

Puttaswamy, T.K. (2012). Mathematical Achievements of Pre-Modern Indian Mathematicians. https://doi.org/10.1016/B978-0-12-397913-1.00017-X.