

**MỘT SỐ BIỆN PHÁP PHÁT TRIỂN NĂNG LỰC TƯ DUY VÀ LẬP LUẬN
TOÁN HỌC CHO HỌC SINH THÔNG QUA DẠY HỌC GIẢI BÀI TẬP
CHỦ ĐỀ ĐẠI SỐ TỔ HỢP – TOÁN 10**

Nguyễn Văn Khang¹ và Lê Hoàng Mai^{2*}

¹Học viên cao học, Trường Đại học Đồng Tháp, Việt Nam

²Phòng Bảo đảm chất lượng, Trường Đại học Đồng Tháp, Việt Nam

*Tác giả liên hệ: Lê Hoàng Mai, Email: lhmai@dthu.edu.vn

Lịch sử bài báo

Ngày nhận: 21/7/2024; Ngày nhận chỉnh sửa: 04/9/2024; Ngày duyệt đăng: 06/9/2024

Tóm tắt

Phát triển năng lực toán học nói chung, năng lực tư duy và lập luận trong dạy học môn Toán trung học phổ thông nói riêng đóng vai trò quan trọng trong việc đáp ứng mục tiêu của chương trình giáo dục phổ thông môn Toán năm 2018. Trong chương trình giáo dục phổ thông môn Toán năm 2018, nội dung chủ đề Đại số tổ hợp - Toán 10 có những khái niệm có thể vận dụng để giải các bài toán thực tiễn. Ngoài việc cung cấp những khái niệm và công cụ cần thiết để giải quyết những bài toán đếm thường gặp trong thực tế cuộc sống, một trong những ứng dụng trực tiếp là phục vụ cho việc học tập nội dung xác suất trong chương trình Toán. Nhìn chung, nội dung của chủ đề này là tương đối khó và khá trừu tượng đối với học sinh lớp 10. Thông qua các dạng bài tập chủ đề Đại số Tổ hợp học sinh có nhiều cơ hội phát triển năng lực toán học nói chung, năng lực tư duy và lập luận toán học cho học sinh nói riêng. Trong bài viết này, chúng tôi đưa ra các định hướng và đề xuất một số biện pháp nhằm phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học cho học sinh lớp 10 thông qua dạy học giải bài tập chủ đề Đại số tổ hợp – Toán 10, nhằm góp phần nâng cao chất lượng dạy học môn toán ở trường trung học phổ thông, đáp ứng mục tiêu chương trình giáo dục phổ thông 2018.

Từ khóa: Chủ đề Đại số tổ hợp, dạy học giải bài tập, năng lực, năng lực tư duy và lập luận toán học, phát triển năng lực.

DOI: <https://doi.org/10.52714/dthu.13.01S.2024.1314>

Trích dẫn: Nguyễn, V. K., & Lê, H. M. (2024). Một số biện pháp phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học cho học sinh thông qua dạy học giải bài tập chủ đề đại số tổ hợp – Toán 10. *Tạp chí Khoa học Đại học Đồng Tháp*, 13(01S), 203-215. <https://doi.org/10.52714/dthu.13.01S.2024.1314>.

Copyright © 2024 The author(s). This work is licensed under a CC BY-NC 4.0 License.

SOME MEASURES TO DIRECTLY DEVELOP STUDENTS' MATHEMATICAL REASONING THROUGH SOLVING ALGEBRA PROBLEM COMPLEX IN MATH 10

Nguyen Van Khang¹ and Le Hoang Mai^{2*}

¹*Post-graduate student, Dong Thap University, Cao Lanh 870000, Vietnam*

²*Quality Assurance Office, Dong Thap University, Cao Lanh 870000, Vietnam*

**Corresponding author: Le Hoang Mai, Email: lhmai@dthu.edu.vn*

Article history

Received: 21/7/2024; Received in revised form: 04/9/2024; Accepted: 06/9/2024

Abstract

Developing general mathematical competence as well as reasoning abilities in teaching high school mathematics in particular, plays an important role in meeting the goals of the 2018 General Education Mathematics Program. In this Program, the content of the topic of Algebra problem complex in Math 10 has several concepts applied to solve practical problems. In addition to providing the necessary concepts and tools to solve common counting problems in real life, one of the direct applications is to serve the learning of probability content in the mathematics program. In general, the content of this topic is relatively difficult and quite abstract for grade 10 students. Through the types of exercises on this topic, students have many opportunities to develop general mathematical competences, and mathematical reasoning abilities for students in particular. This article provides orientations and measures to develop mathematical reasoning ability for 10th grade students through teaching and solving Algebra problem complex of Math 10 for teaching improvement, meeting the goals of the 2018 general education program.

Keywords: *Competence, competency development, mathematical thinking and reasoning ability, teaching and solving exercises, Algebra problem complex topic.*

1. Đặt vấn đề

Một trong những mục tiêu chủ yếu của chương trình giáo dục phổ thông (GDPT) môn Toán năm 2018 là *hình thành và phát triển năng lực toán học cho học sinh bao gồm các thành tố cốt lõi sau: Năng lực tư duy và lập luận toán học; năng lực mô hình hóa toán học; năng lực giải quyết vấn đề toán học; năng lực giao tiếp toán học; năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học toán* (Bộ Giáo dục và Đào tạo, 2018b).

Giải bài tập toán ở trường trung học phổ thông (THPT) là một hoạt động rất có hiệu quả và không thể thay thế được trong việc giúp học sinh nắm vững tri thức, phát triển năng lực tư duy, hình thành kỹ năng kỹ xảo, ứng dụng Toán học vào thực tiễn, góp phần vào việc phát triển một số phẩm chất và năng lực cho học sinh. Khai thác hệ thống bài tập trong chủ đề Đại số tổ hợp - Toán 10, giúp tạo cơ hội cho học sinh rèn luyện và phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học.

Theo Đỗ Đức Thái (Đỗ, 2018) cho rằng dạy học phát triển năng lực môn Toán THPT đóng vai trò quan trọng trong việc phát triển năng lực của học sinh đáp ứng mục tiêu của Chương trình GDPT 2018.

Chủ đề Đại số tổ hợp có nhiều dạng toán thuận lợi cho việc phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học cho học sinh thông qua hoạt động dạy học giải bài tập. Tuy nhiên, Qua thực tiễn dạy học giải bài tập chủ đề Đại số tổ hợp cho thấy giáo viên chưa quan tâm nhiều việc nhận xét khả năng phân tích, so sánh, đặc biệt hóa, trừu tượng hóa, suy luận và lập luận của học sinh đối với việc giải bài toán thông qua đó nhằm phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học cho học sinh. Giáo viên chỉ mới thực hiện việc giải bài tập mà chưa thể hiện tốt việc dạy học giải bài tập, chưa hình thành cho học sinh cách suy nghĩ, huy động kiến thức đã học để tìm lời giải khi đứng trước một bài toán, chưa cho học sinh thấy được tại sao với bài toán này lại chọn cách giải như thế. Vì vậy, nếu yêu cầu học sinh giải một bài toán không cùng dạng với bài toán đã giải thì học sinh sẽ gặp khó khăn trong việc tìm lời giải bài toán.

Việc phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học cho học sinh cần phải tạo ra môi trường học tập tích cực, khuyến khích sự sáng tạo, lập luận logic, chặt chẽ của học sinh. Tuy nhiên, thực tiễn dạy học Toán ở trường THPT cho thấy, nhiều học sinh còn bộc lộ những hạn chế về năng lực tư duy và lập luận toán học, thiếu linh hoạt trong định hướng cách làm, thường suy nghĩ máy móc rập khuôn, lúng túng khi đứng trước bài toán. Do đó, trong bài viết này chúng tôi trình bày một số khái niệm liên quan đến năng lực tư duy và lập luận Toán học, các biểu hiện của năng lực tư duy và lập luận Toán học, vai trò của dạy học giải bài tập và quy trình dạy học giải bài tập làm cơ sở lý luận. Từ đó, chúng tôi đề xuất một số biện pháp nhằm góp phần phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học cho học sinh thông qua việc dạy học giải bài tập chủ đề Đại số tổ hợp - Toán 10.

2. Nội dung

2.1. Một số khái niệm liên quan đến năng lực tư duy và lập luận toán học

2.1.1. Năng lực, năng lực toán học

Năng lực (competency) là thuật ngữ thường dùng trong khoa học và đời sống. Hiện nay khái niệm năng lực (tùy theo lĩnh vực và cách tiếp cận) được hiểu theo nhiều nghĩa khác nhau, chẳng hạn:

- Theo Weinert (2001) cho rằng “*Năng lực là tổng hợp các khả năng và kỹ năng sẵn có hoặc học được cũng như sự sẵn sàng của học sinh nhằm giải quyết những vấn đề nảy sinh, hành động một cách có trách nhiệm, có sự phê phán để đi đến giải pháp*”.

- Theo Từ điển tiếng Việt của Hoàng Phê (Hoàng, 2003) cho rằng: “*Năng lực là phẩm chất tâm lý và sinh lý tạo cho con người khả năng hoàn thành một loạt hoạt động nào đó với chất lượng cao*”.

- Theo Chương trình GDPT tổng thể năm 2018 (Bộ Giáo dục và Đào tạo, 2018a) “*Năng lực là thuộc tính cá nhân được hình thành, phát triển nhờ tố chất sẵn có và quá trình học tập, rèn luyện, cho phép con người huy động tổng hợp các kiến thức, kỹ năng và các thuộc tính cá nhân khác như hứng thú, niềm tin, ý chí, ... thực hiện thành công một loại hoạt động nhất định, đạt kết quả mong muốn trong những điều kiện cụ thể*”.

Theo Trần Kiều (Trần, 2014) thì những năng lực cần thiết phát triển thông qua môn Toán bao gồm: *năng lực tư duy; năng lực giải quyết vấn đề; năng lực mô hình hóa toán học; năng lực giao tiếp; năng lực sử dụng các công cụ, phương tiện học toán; năng lực tự học*.

Trong bài viết này, chúng tôi quan niệm năng lực toán học theo Chương trình GDPT môn Toán 2018 bao gồm các thành tố cốt lõi sau: “*năng lực tư duy và lập luận toán học; năng lực mô hình hóa toán học; năng lực giải quyết vấn đề toán học; năng lực giao tiếp toán học; năng lực sử dụng công cụ và phương tiện học Toán*”.

2.1.2. Năng lực tư duy và lập luận toán học

Năng lực tư duy và lập luận toán học là một năng lực thành phần cốt lõi quan trọng của năng lực toán học trong Chương trình GDPT 2018, được hình thành và phát triển một phần nhờ tố chất sẵn có còn lại chủ yếu là do quá trình học tập, rèn luyện, hoạt động giải quyết những nhiệm vụ học tập môn Toán. Nó là tổng hợp khả năng ghi nhớ, tái hiện, vận dụng, so sánh, phân tích, tổng hợp, trừu tượng hóa, suy luận giải quyết vấn đề, xử lý và linh cảm trong quá trình phân ánh, phát triển tri thức và vận dụng toán học vào thực tiễn.

Chương trình GDPT môn toán 2018 xác định cụ thể 5 năng lực thành phần cốt lõi của năng lực toán học, mỗi năng lực thành phần cốt lõi đều có những biểu hiện và yêu cầu cần đạt riêng. Biểu hiện cụ thể và yêu cầu cần đạt của năng lực tư duy và lập luận toán học là:

Biểu hiện A: Thực hiện được các thao tác tư duy như: So sánh, phân tích, tổng hợp, đặc biệt hoá, khái quát hoá, tương tự, quy nạp và diễn dịch.

Biểu hiện B: Chỉ ra được chứng cứ, lí lẽ và biết lập luận chặt chẽ, hợp lí trước khi hình thành và đưa ra lời giải bài toán.

Biểu hiện C: Giải thích hoặc điều chỉnh được cách thức giải quyết các vấn đề về phương diện toán học nói chung và mỗi bài toán cụ thể nói riêng.

Đối với học sinh cấp THPT, biểu hiện cụ thể yêu cầu cần đạt về năng lực tư duy và lập luận toán học: “*Thực hiện được tương đối thành thạo các thao tác tư duy, đặc biệt phát hiện được sự tương đồng, khác biệt trong những tình huống tương đối phức tạp và lí giải được kết quả của việc quan sát; sử dụng được các phương pháp lập luận, quy nạp và suy diễn để nhìn ra những cách thức khác nhau trong việc giải quyết vấn đề; nêu và trả lời được câu hỏi khi lập luận, giải quyết vấn đề; giải thích, chứng minh, điều chỉnh được giải pháp thực hiện về phương diện toán học*”(Bộ Giáo dục và Đào tạo, 2018b).

2.1.3. Dạy học giải bài tập

a. Vai trò của dạy học giải bài tập

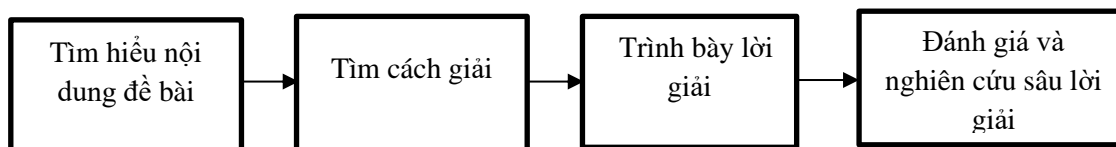
Theo Polya (1975), “*Bài tập (bài toán) đặt ra sự cần thiết phải tìm kiếm một cách có ý thức phương tiện thích hợp để đạt mục đích trông thấy rõ ràng nhưng không thể đạt ngay được. Giải toán tức là tìm phương tiện đó*”.

Theo Nguyễn Bá Kim (Nguyễn, 2015, tr.302) cho rằng: “*Bài tập toán học ở trường phổ thông chứa đựng những hoạt động thể hiện mức độ đạt mục tiêu dạy học, đồng thời thể hiện những chức năng khác nhau hướng đến việc thực hiện các mục tiêu dạy học môn Toán. Qua hoạt động giải bài tập toán học, học sinh được hình thành, củng cố tri thức, kỹ năng, kỹ xảo ở những khâu khác nhau của quá trình dạy học; kỹ năng ứng dụng toán học vào thực tiễn. Hình thành và phát triển cho học sinh những phẩm chất chủ yếu, năng lực chung và năng lực toán học với các thành tố cốt lõi là năng lực tư duy và lập luận toán học, năng lực mô hình hóa toán học, năng lực giải quyết vấn đề toán học, năng lực sử dụng công cụ và phương tiện toán học; bồi dưỡng thể giới quan duy vật biện chứng*”.

Như vậy, những bài tập toán tạo ra các tình huống kích thích học sinh ra tìm lời giải đáp, mà lời giải này có thể toàn bộ hoặc từng phần không ở trạng thái có sẵn ở học sinh tại thời điểm bài tập được đưa ra. Dạy học giải bài tập không chỉ là việc truyền đạt kiến thức mà còn là quá trình tạo ra môi trường học tập tích cực và hỗ trợ, nơi mà học sinh có thể phát triển kỹ năng và kiến thức của mình một cách toàn diện và có thể áp dụng kiến thức toán học vào thực tiễn.

b. Quy trình dạy học giải bài tập toán

Trong dạy học giải bài tập Toán, kỹ năng tìm kiếm lời giải là một trong các kỹ năng quan trọng nhất, mà việc rèn luyện các thao tác tư duy là thành phần không thể thiếu trong dạy học giải bài tập Toán. Trong tác phẩm của Polya (Polya, 1975), ông đã đưa ra 4 bước để đi đến lời giải bài toán, thể hiện qua sơ đồ sau:



Sơ đồ 1. Quy trình dạy học giải bài tập toán

2.2. Một số biểu hiện năng lực tư duy và lập luận toán học của học sinh thông qua dạy học giải bài tập chủ đề Đại số tổ hợp

Trong dạy học giải bài tập môn Toán nói chung và chủ đề Đại số tổ hợp – Toán 10 nói riêng, năng lực tư duy và lập luận toán học của học sinh được biểu hiện thông qua các thành phần năng lực của nó. Theo Chương trình GDPT môn Toán 2018, biểu hiện năng lực tư duy và lập luận toán học của học sinh trong dạy học thông qua giải bài tập chủ đề Đại số tổ hợp gồm:

Biểu hiện a: Áp dụng được các quy tắc đếm tổng quát, khái niệm hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp, nhị thức Newton, phát hiện được phương pháp giải bài toán mới thông qua trừu tượng hóa, khái quát hóa từng bài tập cụ thể riêng lẻ.

Biểu hiện b: Thông qua phân tích, tổng hợp, so sánh để làm rõ sự giống nhau và khác nhau giữa quy tắc cộng và quy tắc nhân, giữa các khái niệm hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp trong trường hợp khái quát và cụ thể.

Biểu hiện c: Lựa chọn các quy tắc đếm phù hợp, lựa chọn khái niệm, công thức tính số hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp để giải bài toán theo nhiều cách. Lập luận hợp lý để lựa chọn cách giải bài toán tối ưu.

- Sử dụng được các phương pháp lập luận, quy nạp và diễn dịch để nhìn ra những cách thức khác nhau trong giải bài tập chủ đề Đại số tổ hợp.

- Phát hiện được những sai lầm thường gặp trong bài toán Đại số tổ hợp, điều chỉnh được cách thức giải bài toán.

2.3. Một số biện pháp phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học cho học sinh thông qua dạy học giải bài tập chủ đề Đại số Tổ hợp

2.3.1. Định hướng đề xuất biện pháp

Dựa trên cơ sở lí luận và các biểu hiện của năng lực tư duy và lập luận toán học được trình bày trong mục 2.2, chúng tôi đưa ra một số định hướng, từ đó đề xuất các biện pháp nhằm phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học cho học sinh thông qua dạy học giải bài tập chủ đề Đại số tổ hợp – Toán 10. Các định hướng cụ thể như sau:

- Các biện pháp phải đảm bảo đáp ứng được mục tiêu, nguyên tắc dạy học môn Toán theo Chương trình GDPT môn Toán năm 2018.

- Các biện pháp phải mang tính khả thi, có thể thực hiện được trong điều kiện thực tế của quá trình dạy học giải bài tập Toán chủ đề Đại số tổ hợp – Toán 10.

- Các biện pháp cần phải thể hiện rõ quan điểm phát triển năng lực toán học nói chung, năng lực tư duy và lập luận toán học cho học sinh nói riêng thông qua các hoạt động giải bài tập toán chủ đề Đại số tổ hợp – Toán 10.

- Các biện pháp phải đảm bảo yêu cầu cần đạt về phẩm chất và năng lực của chủ đề Đại số tổ hợp – Toán 10.

- Hệ thống các bài tập của chủ đề Đại số tổ hợp được phân loại và có quan tâm đến các bài toán thực tiễn để phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học cho học sinh.

2.3.2. Một số biện pháp phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học cho học sinh thông qua dạy học giải bài tập chủ đề Đại số tổ hợp - Toán 10

Trên cơ sở những định hướng đã được trình bày ở mục 2.3.1, chúng tôi đề xuất một số biện pháp góp phần phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học cho học sinh thông qua dạy học giải bài tập chủ đề Đại số Tổ hợp - Toán 10.

2.3.2.1. Phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học cho học sinh thông qua hoạt động tổ chức cho học sinh phân biệt khái niệm quy tắc cộng và quy tắc nhân; khái niệm hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp

a) Mục đích của biện pháp

Biện pháp này giúp cho học sinh không nhầm lẫn giữa các quy tắc đếm, phân biệt các khái niệm hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp, thấy được sự tương đồng và khác biệt của các khái niệm, công thức, các định lý từ đó giúp học sinh vận dụng chúng một cách linh hoạt và hiệu quả trong việc giải quyết các bài toán liên quan. Đồng thời giúp học sinh giải được các bài toán tương tự hoặc mở rộng trong chủ đề Đại số tổ hợp, từ đó học sinh có thể vận dụng kiến thức đã học vào các tình huống mới và sáng tạo trong việc giải quyết các bài toán đại số tổ hợp phức tạp hơn. Học sinh cũng có thể tự tìm ra nhiều cách giải bài toán, vận dụng các quy tắc và công thức đã học vào các tình huống đặc biệt. Qua đó giúp học sinh phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học.

b) Cách thức thực hiện

- Giáo viên lựa chọn các bài toán tổng hợp liên quan đến việc lựa chọn khái niệm quy tắc cộng hay quy tắc nhân, hoán vị, chỉnh hợp hay tổ hợp. Lựa chọn các bài toán vừa có sử dụng quy tắc cộng vừa có sử dụng quy tắc nhân, vừa sử dụng chỉnh hợp vừa sử dụng tổ hợp.

- Giáo viên hướng dẫn cho học sinh hiểu bài toán, phân tích giả thiết và kết luận của bài toán chỉ rõ dấu hiệu, dữ kiện, điều kiện bài toán. Xác định điều kiện, dữ kiện này liên quan tới khái niệm nào, quy tắc nào?. Có bài toán nào tương tự đã từng gặp không? Giáo viên giúp học sinh tự tìm ra lời giải đúng để giải bài toán.

- Giáo viên có thể cho học sinh thảo luận thông qua hoạt động nhóm, chia sẻ và phát biểu ý kiến đưa ra lí lẽ chỉ rõ tính chất khái niệm quy tắc cộng, quy tắc nhân, hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp để thấy sự giống nhau và khác nhau của chúng, giải thích lí do sử dụng khái niệm này mà không phải là khái niệm kia. Đây là cơ hội để học sinh học hỏi, củng cố kiến thức thông qua việc hỗ trợ, giải thích cho nhau.

c) Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Cho một bàn dài có 10 ghế và 10 học sinh trong đó có 5 học sinh nữ. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi cho 10 học sinh sao cho nam, nữ ngồi xen kẽ nhau?

Bước 1: Tìm hiểu nội dung đề bài, giáo viên yêu cầu học sinh tìm hiểu và tóm tắt đề bài.

- 10 học sinh trong đó có 5 học sinh nữ, suy ra cũng có 5 học sinh nam.

- 5 học sinh nam và 5 học sinh nữ ngồi xen kẽ nhau, tức là không có 2 nam hay 2 nữ ngồi cạnh nhau.

- Bài toán yêu cầu sắp xếp 10 học sinh (5 nam, 5 nữ) ngồi trên một bàn có 10 ghế sao cho nam và nữ ngồi xen kẽ nhau.

Sau khi tiếp nhận câu hỏi thì học sinh phải suy nghĩ và qua đó làm nảy sinh vấn đề tư duy như: *Dạng toán này đã gặp hay chưa? Cách giải bài toán hiện tại đã có hay chưa?*

- Xác định dạng bài toán: Sắp xếp 10 học sinh ngồi vào 10 ghế.

Bước 2: Tìm cách giải bài toán.

Giáo viên nêu một số câu hỏi phân tích để dẫn dắt học sinh tìm ra cách giải.

Giáo viên: Dãy 10 ghế xếp theo bàn dài, có những **phương án** nào xếp cho 5 học sinh nam không ngồi cạnh nhau?

Học sinh: Có hai **phương án** xếp 5 học sinh nam không ngồi cạnh nhau đó là ngồi vị trí chẵn 2, 4, 6, 8, 10 hoặc ngồi vị trí lẻ 1, 3, 5, 7, 9 (quy tắc cộng).

Giáo viên: Mỗi phương án có bao nhiêu cách xếp 5 học sinh nam ngồi vào 5 chỗ?

Học sinh: Mỗi cách xếp 5 học sinh nam ngồi vào 5 chỗ là một hoán vị 5 phần tử, suy ra có $5!$ cách xếp (hoán vị).

Giáo viên: Mỗi cách xếp 5 học sinh nam ngồi trong một **phương án**, ta cần phải xếp 5 học sinh nữ ngồi vào 5 ghế còn lại, có bao nhiêu cách xếp 5 học sinh nữ ngồi vào 5 chỗ?

Học sinh: Mỗi cách xếp 5 học sinh nam ngồi trong một **phương án**, cách xếp 5 học sinh nữ ngồi vào 5 chỗ còn lại là một hoán vị 5 phần tử, suy ra có $5!$ cách xếp (hoán vị).

Giáo viên: Vậy trong một phương án có bao nhiêu cách xếp 5 học sinh nam và 5 học sinh nữ ngồi vào 10 ghế xen kẽ nhau?

Học sinh: Trong một phương án có $5!.5!$ cách xếp 5 học sinh nam và 5 học sinh nữ ngồi vào 10 ghế xen kẽ nhau (quy tắc nhân).

Bước 3: Trình bày lời giải.

Lời giải mong đợi từ học sinh, với định hướng là sử dụng quy tắc cộng, quy tắc nhân và hoán vị để giải bài toán.

Phương án 1: Xếp 5 học sinh nam ngồi vào vị trí chẵn có $5!$ cách, sau đó xếp 5 học sinh nữ vào 5 vị trí còn lại có $5!$ cách. Theo quy tắc nhân có $5!.5!$ cách.

Phương án 2: Xếp 5 học sinh nam ngồi vào vị trí lẻ có $5!$ cách, sau đó xếp 5 học sinh nữ vào 5 vị trí còn lại có $5!$ cách. Theo quy tắc nhân có $5!.5!$ cách.

Vậy theo quy tắc cộng có $5!.5!+5!.5!=2.5!.5!=28800$ cách.

Bước 4: Đánh giá, nghiên cứu sâu lời giải.

Thông qua ví dụ học sinh biết khái quát được vấn đề, tìm ra phương án, cũng như cách sử dụng hợp lý các khái niệm quy tắc cộng, quy tắc nhân và hoán vị.

Để học sinh có thể sử dụng phương pháp giải bài toán này cho một bài toán khác, giáo viên đề xuất bài toán mới: thay “xếp xen kẽ” thành “-xếp cạnh nhau”. Chẳng hạn giáo viên cho học sinh bài toán sau: *Cho một bàn dài có 10 ghế và 10 học sinh, trong đó có 5 học sinh nữ. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi cho 10 học sinh sao cho các học sinh nữ ngồi cạnh nhau?*

Khái quát bài toán sắp xếp vị trí và chú ý học sinh phân biệt cách sắp xếp xen kẽ với cách sắp xếp cạnh nhau.

Ví dụ 2: Một nhóm công nhân gồm 15 nam và 5 nữ. Người ta muốn chọn từ nhóm ra 5 người để lập thành một tổ công tác sao cho phải có 1 tổ trưởng nam, 1 tổ phó nam và có ít nhất 1 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách lập tổ công tác?

Giáo viên yêu cầu học sinh tìm hiểu bài toán và sau đó giáo viên gợi ý, hỗ trợ học sinh tìm cách giải bài toán thông qua hệ thống câu hỏi như sau:

Giáo viên: Giả thiết và yêu cầu của bài toán là gì? Bài toán đã cho có giống với ví dụ nào trước đây đã làm không?

Học sinh: Bài toán cho 15 nam và 5 nữ. Yêu cầu chọn từ nhóm ra 5 người để lập thành một tổ công tác sao cho phải có 1 tổ trưởng nam, 1 tổ phó nam và có ít nhất 1 nữ. Bài toán này có phần giống với bài toán: Lớp có 40 học sinh gồm 25 nam và 15 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 6 học sinh tham gia mùa hè xanh trong đó có ít nhất 3 nam.

Giáo viên: Để giải quyết bài toán này với giả thiết ít nhất 2 nam (1 tổ trưởng, 1 tổ phó) và ít nhất 1 nữ thì ta có bao nhiêu trường hợp?

Học sinh: có 3 trường hợp: 4 nam và 1 nữ, 3 nam và 2 nữ, 2 nam và 3 nữ.

Giáo viên: Mỗi trường hợp chọn 1 tổ trưởng nam, 1 tổ phó nam và chọn 3 người còn lại phải có nữ thì ta có những công đoạn nào, ta sử dụng quy tắc nào?

Học sinh: Thực hiện theo 3 công đoạn chọn 2 nam 1 nữ, 1 nam 2 nữ, 3 nữ.

Sau khi học sinh phân tích giả thiết và yêu cầu bài toán, với sự hỗ trợ của giáo viên, học sinh đưa ra hướng giải quyết bài toán cụ thể như sau:

Cách 1:

+ Trường hợp 1: chọn 4 nam và 1 nữ.

- Bước 1: chọn 2 trong 15 nam làm tổ trưởng và tổ phó có A_{15}^2 cách (có tính thứ tự).

- Bước 2: chọn 1 nữ trong 5 nữ có 5 cách.

- Bước 3: chọn 2 nam trong 13 nam còn lại có C_{13}^2 cách (không tính thứ tự).

Suy ra có $5A_{15}^2 \cdot C_{13}^2$ cách chọn cho trường hợp 1.

+ Trường hợp 2: chọn 3 nam và 2 nữ.

- Bước 1: chọn 2 trong 15 nam làm tổ trưởng và tổ phó có A_{15}^2 cách.

- Bước 2: chọn 1 nam trong 13 nam còn lại có 13 cách.

- Bước 3: chọn 2 nữ trong 5 nữ có C_5^2 cách.

Suy ra có $13A_{15}^2 \cdot C_5^2$ cách chọn cho trường hợp 2.

+ Trường hợp 3: chọn 2 nam và 3 nữ.

- Bước 1: chọn 2 trong 15 nam làm tổ trưởng và tổ phó có A_{15}^2 cách.

- Bước 2: chọn 3 nữ trong 5 nữ có C_5^3 cách.

Suy ra có $A_{15}^2 \cdot C_5^3$ cách chọn cho trường hợp 3.

Vậy theo quy tắc cộng có $5A_{15}^2.C_{13}^2 + 13A_{15}^2.C_5^2 + A_{15}^2.C_5^3 = 111300$ cách.

Sau khi học sinh phân tích và giải bài toán, giáo viên nhận xét và nhấn mạnh lại dấu hiệu nhận biết để áp dụng quy tắc đếm, chỉnh hợp hay tổ hợp. Đồng thời có thể đặt vấn đề còn cách nào khác để giải bài toán này không? Tìm cách trình bày ngắn gọn hơn được không?

Giáo viên có thể gợi ý cho học sinh trong 3 trường hợp trên luôn có công đoạn chọn 2 bạn nam để làm tổ trưởng và tổ phó trong 15 bạn nam (có phân biệt thứ tự).

Giáo viên: Nếu chia công việc cần thực hiện theo 2 công đoạn thì chia như thế nào?

Học sinh: Công đoạn 1: chọn 2 bạn nam để làm tổ trưởng, tổ phó trong 15 bạn nam. Công đoạn 2: Chọn 3 thành viên còn lại.

Giáo viên: Công đoạn 2: Chọn 3 thành viên còn lại như thế nào?

Học sinh: Công đoạn 2 có 3 trường hợp độc lập là 1 nữ 2 nam, 2 nữ 1 nam, 3 nữ.

Giáo viên: Như vậy để tìm số cách chọn theo yêu cầu đề bài các em có thể tìm số cách chọn 2 nam làm tổ trưởng và tổ phó trong và 3 tổ viên, trong đó có nữ (ít nhất 1 nữ).

Từ gợi ý này của giáo viên, học sinh có thể tìm được phương án giải quyết cho bài toán ngắn gọn, đơn giản hơn, cụ thể như sau:

Cách 2:

+ Bước 1: Chọn 2 trong 15 nam làm tổ trưởng và tổ phó có A_{15}^2 cách.

+ Bước 2: chọn 3 tổ viên, trong đó có nữ.

- Trường hợp 1: chọn 1 nữ và 2 nam có $5.C_{13}^2$ cách.

- Trường hợp 2: chọn 2 nữ và 1 nam có $13.C_5^2$ cách.

- Trường hợp 3: chọn 3 nữ có C_5^3 cách.

Vậy có $A_{15}^2 \cdot 5.C_{13}^2 + 13.C_5^2 + C_5^3 = 111300$ cách.

* *Cơ hội phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học cho học sinh:* Thông qua biện pháp này, giúp học sinh phân biệt được dấu hiệu nhận biết các khái niệm quy tắc cộng, quy tắc nhân, chỉnh hợp và tổ hợp, điểm giống nhau và khác nhau. Chẳng hạn, điểm giống nhau giữa chỉnh hợp và tổ hợp là đều chọn một số phần tử trong một tập hợp, nhưng khác nhau ở chỗ, chỉnh hợp là chọn có quan tâm đến xếp thứ tự, còn tổ hợp là chọn không quan tâm đến xếp thứ tự. Tức là, mỗi tổ hợp chập k của n phần tử có $k!$ chỉnh hợp chập k của n phần tử. Do đó, mối quan hệ giữa số chỉnh hợp và số tổ hợp được thể hiện qua công thức: $A_n^k = k!.C_n^k$. Tư duy được bài toán chia theo trường hợp hay giai đoạn, chia thế nào để thuận lợi. Từ đó, giúp học sinh biết giải thích và đưa ra lí lẽ, chứng cứ của mình để điều chỉnh, trình bày lời giải ngắn gọn hơn, phù hợp hơn. Qua đó, góp phần phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học cho học sinh.

2.3.2.2. Phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học cho học sinh thông qua việc tổ chức dạy học giải bài tập có tính thực tiễn

a) Mục đích của biện pháp

Trong quá trình dạy học giải bài tập chủ đề Đại số tổ hợp giáo viên cần chú ý sử dụng các yếu tố thực tiễn của Toán học, để tạo sự hứng thú cũng như động lực học tập cho học sinh. Thông qua các bài toán có tính thực tiễn trong quá trình dạy học giải bài tập toán sẽ giúp học

sinh khơi gợi sự tò mò, muốn khám phá cái mới.

Thông qua các bài toán thực tiễn giúp học sinh biết được mình học các kiến thức liên quan đến chủ đề Đại số tổ hợp để làm gì? Vận dụng vào thực tiễn như thế nào? Điều đó giúp học sinh có được động cơ học tập, động cơ khám phá, tìm hiểu. Từ đó phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học của học sinh.

b) Cách thức thực hiện

Giáo viên lựa chọn các bài toán có tính thực tiễn liên quan chủ đề Đại số tổ hợp và phù hợp với năng lực của học sinh.

Giáo viên khơi gợi, dẫn dắt học sinh tìm cách giải bài toán thông qua hệ thống câu hỏi gợi ý, định hướng cho học sinh như: Phân tích giả thiết, kết luận; bài toán thuộc loại nào; phân tích cái đã cho và cái phải tìm; bài toán đã cho liên quan đến quy tắc, khái niệm nào? Bài toán có phần nào tương tự như những bài toán đã làm rồi không?

Học sinh thực hiện việc phân tích, huy động kiến thức và đưa ra phương hướng giải bài toán, sau đó trình bày lời giải của bài toán.

Giáo viên nhận xét, sửa chữa bài giải của học sinh, nhấn mạnh mấu chốt của bài toán. Thông qua lời giải giáo viên cho học sinh nhận xét, trình bày ý nghĩa thực tiễn của bài toán.

c) Ví dụ minh họa

Ví dụ 3. Gia đình bạn Tài đặt mật mã của chiếc khóa công (Hình 1) là một dãy gồm 4 chữ số khác nhau. Bạn Tài chẳng may quên dãy mật mã đã đặt. Hỏi bạn Tài thực hiện tối đa bao nhiêu lần thì sẽ mở được chiếc khóa công?



Hình 1. Khóa công số

Cách thức thực hiện

Giáo viên dẫn dắt, gợi ý và tạo động lực cho học sinh tìm cách giải bài toán thông qua hệ thống câu hỏi như sau:

Giáo viên: Tìm hiểu đề bài, giả thiết và yêu cầu của bài toán là gì?

Học sinh: Bài toán đặt mật mã chiếc khóa công 4 chữ số với yêu cầu các chữ số đôi một khác nhau. Hỏi số lần thử tối đa để bạn Tài mở được chiếc khóa công nếu quên mật mã.

Giáo viên: Số lần thử tối đa để bạn Tài mở được chiếc khóa công nếu quên mật mã chính là gì?

Học sinh: Số lần thử tối đa để bạn Tài mở được chiếc khóa công nếu quên mật mã chính là số cách lập mật mã với 4 chữ số đôi một khác nhau, tức là số cách xếp bốn chữ số khác nhau lấy từ 10 chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9.

Học sinh nhận ra 4 công đoạn để lập được một mật khẩu (công cụ: Quy tắc nhân), hoặc công cụ chính hợp để giải quyết bài toán (chính hợp chập 4 của 10 phần tử).

Giáo viên ghi nhận kết quả của học sinh và dẫn dắt học sinh kiểm tra kết quả câu trả lời của bạn có chính xác chưa? Các quy tắc nào giúp giải quyết những bài toán tương tự như vậy?

Lời giải mong đợi từ HS: Công cụ sử dụng Quy tắc nhân

Gọi dãy số mật mã mã của chiếc khóa công là abcd:

- Công đoạn 1: Chọn a: có 10 cách chọn.
- Công đoạn 2: Chọn b: có 9 cách chọn (khác a đã chọn).
- Công đoạn 3: Chọn c: có 8 cách chọn (khác a, b đã chọn).
- Công đoạn 4: Chọn d: có 7 cách chọn (khác a, b, c đã chọn).

Vậy theo quy tắc nhân có $10.9.8.7 = 5040$ cách đặt mật mã hay số lần thử tối đa để bạn Tài mở được chiếc khóa công nếu quên mật mã.

Cách giải khác: Công cụ sử dụng khái niệm chỉnh hợp

Mỗi cách lập mật khẩu là một chỉnh hợp 4 của 10. Vậy số cách lập mật khẩu là $A_{10}^4 = 5040$ cách.

Nhận xét: Thông qua ví dụ học sinh thấy được ý nghĩa của Quy tắc đếm, tính được số cách đặt mật mã khóa cho chiếc khóa, vận dụng cho thực tiễn đặt mật khẩu trong một phần mềm ứng dụng máy tính, điện thoại,...

Ví dụ 4: Một đội bóng đá gồm 22 cầu thủ, mỗi trận đấu huấn luyện viên cần chọn ra đội hình gồm 11 cầu thủ để thi đấu.

a. Có bao nhiêu cách chọn một đội hình thi đấu với giả thiết cầu thủ nào của đội cũng có thể chơi ở bất kỳ vị trí nào?

b. Giả sử đội bóng được huấn luyện viên triệu tập có 3 thủ môn, 7 hậu vệ, 8 tiền vệ, 4 tiền đạo. Hỏi có bao nhiêu cách chọn một đội hình thi đấu với sơ đồ đội hình 4:4:2 (1 thủ môn, 4 hậu vệ, 4 tiền vệ và 2 tiền đạo).

c. Nêu nhận xét về kết quả khác nhau của hai trường hợp trên. Tuy nhiên, thực tế huấn luyện viên của đội bóng không có nhiều cách chọn như câu b. Tại sao?

Cách thức thực hiện

Giáo viên phân tích bài toán theo hướng cho học sinh đóng vai là một Huấn luyện viên thì học sinh sẽ thực hiện công việc chọn đội hình như thế nào?

Công cụ toán học là quy tắc cộng, quy tắc nhân hay hoán vị, tổ hợp, chỉnh hợp.

Giáo viên: Câu a, yêu cầu như thế nào? sử dụng khái niệm nào để tính số kết quả?

Học sinh: Mỗi đội hình thi đấu là một cách chọn 11 cầu thủ trong 22 cầu thủ, sắp xếp vào 11 vị trí trên sân thi đấu hợp (không kể thứ tự), sử dụng khái niệm chỉnh hợp.

Giáo viên: Câu b, yêu cầu như thế nào? Nếu lấy 1 cầu thủ bất kì làm thủ môn (hoặc tiền đạo,...) có được không? sử dụng công thức, khái niệm quy tắc nào để tính số kết quả?

Học sinh: Huấn luyện viên muốn sử dụng sơ đồ đội hình 4:4:2 (1 thủ môn, 4 hậu vệ, 4 tiền vệ và 2 tiền đạo) chọn đội hình thi đấu, bao gồm 4 bước thực hiện: Bước 1 chọn thủ môn, bước 2 chọn hậu vệ, bước 3 chọn tiền vệ và bước 4 chọn tiền đạo.

Lời giải mong đợi từ học sinh

a. Mỗi cách chọn 11 cầu thủ từ 22 cầu thủ là một chỉnh hợp chập 11 của 22 phần tử. Số cách chọn là: $A_{22}^{11} = 70543211!$

b. Có các bước chọn và sắp xếp như sau:

- Bước 1: Chọn 1 thủ môn từ 3 thủ môn có: A_3^1 cách.

-Bước 2: Chọn và xếp 4 hậu vệ từ 7 hậu vệ có: A_7^4 cách.

- Bước 3: Chọn và xếp 4 tiền vệ từ 8 tiền vệ có: A_8^4 cách.

- Bước 4: Chọn 2 tiền đạo từ 4 tiền đạo có: A_4^2 cách.

Theo quy tắc nhân có: $A_3^1 \cdot A_7^4 \cdot A_8^4 \cdot A_4^2 = 50803200$ cách.

c. Nhận xét về kết quả khác nhau của hai trường hợp trên (mong đợi từ học sinh):

Về kết quả tìm được trong câu a. và câu b. có giá trị rất lớn, tức là huấn luyện viên có rất nhiều cách lựa chọn một đội hình thi đấu.

Kết quả ở câu b. ít hơn nhiều so với kết quả ở câu a. vì các phần tử lựa chọn (cầu thủ) ở câu b. thu hẹp (chọn vị trí cầu thủ trong đội hình thi đấu theo nhóm) hơn nhiều ở câu a.

Về thực tế, mỗi nhóm cầu thủ có năng lực khác nhau, cách lựa chọn một đội hình thi đấu của huấn luyện viên bao gồm sự lựa chọn cầu thủ phù hợp, khả năng làm việc với sơ đồ đội hình hiện tại và phong độ hiện có của cầu thủ, chắc chắn số kết quả lựa chọn ít hơn nhiều so với kết quả của câu b.

Nhận xét: Đây là bài toán có tính thực tiễn rất cao, qua đó rèn luyện cho học sinh lựa chọn các quy tắc đếm phù hợp, phân tích, tổng hợp, vận dụng toán học vào đời sống, nghề nghiệp, kích thích tình yêu toán học, qua đó phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học.

Ví dụ 5: Một đội thanh niên tình nguyện có 15 người, gồm 12 nam và 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách phân công đội thanh niên tình nguyện đó về giúp đỡ 3 tỉnh miền núi, sao cho mỗi tỉnh có 4 nam và 1 nữ?

Cách thức thực hiện

Giáo viên phân tích bài toán theo hướng cho học sinh đóng vai là một nhà quản lí thanh niên tình nguyện thì học sinh sẽ thực hiện công việc chia nhóm như thế nào? Việc nào trước, sau, quy trình có mấy bước (Quy tắc nhân), mỗi bước thực hiện như thế nào?

Lời giải mong đợi từ học sinh

Bước 1: Phân công các thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ nhất. Có $C_{12}^4 \cdot C_3^1$ cách.

Bước 2: Phân công các thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ hai có $C_8^4 \cdot C_2^1$ cách.

Bước 3: Phân công các thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ ba có $C_4^4 \cdot C_1^1$ cách.

Theo quy tắc nhân, số cách phân công đội thanh niên tình nguyện về 3 tỉnh thỏa mãn yêu cầu bài toán là $C_{12}^4 \cdot C_3^1 \cdot C_8^4 \cdot C_2^1 \cdot C_4^4 \cdot C_1^1 = 207900$.

Tổng quát hóa lớp bài toán: "... có bao nhiêu cách phân công/chia tổ ...". Dạng toán này có ý nghĩa thực tiễn rất lớn là việc phân công sắp xếp công việc một cách chính xác, khoa học, khách quan để đem lại hiệu quả cao nhất.

* *Cơ hội phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học cho học sinh được thể hiện:* Học sinh biết cách định hướng, phân tích, huy động kiến thức đưa ra lí lẽ hợp lí trong giải bài toán đếm của chủ đề Đại số tổ hợp. Ngoài ra, thông qua các bài toán thực tiễn của chủ đề, học sinh thấy ý nghĩa của quy tắc đếm và khái niệm chỉnh hợp, tổ hợp; có thêm hứng thú, niềm tin trong học tập, học sinh sẽ cố gắng hơn, quan tâm đến tìm hiểu toán nhiều hơn. Hơn thế nữa, kiến thức toán còn là công cụ hữu ích, hiệu quả để giải quyết vấn đề vào thực tiễn cuộc sống.

3. Kết luận

Năng lực tư duy và lập luận toán học là một trong những năng lực cốt lõi, quan trọng. Giáo viên cần phát triển cho học sinh THPT trong quá trình dạy học môn Toán. Chủ đề Đại số tổ hợp có nhiều dạng Toán thuận lợi cho việc phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học cho học sinh. Thông qua dạy học giải bài tập chủ đề Đại số tổ hợp sẽ góp phần phát triển năng lực toán học nói chung, phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học của học sinh nói riêng. Chúng tôi đã dựa vào các biểu hiện của năng lực tư duy và lập luận toán học để đưa ra định hướng cũng như các biện pháp nhằm phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học trong quá trình dạy học chủ đề này. Từ những biện pháp đã đề xuất trong bài viết này, giáo viên cần áp dụng một cách linh hoạt nhằm giúp học sinh tiếp cận vấn đề theo nhiều hướng khác nhau, từ đó dễ dàng giải được bài toán, qua đó phát triển được năng lực tư duy và lập luận toán học.

Tài liệu tham khảo

- Bộ Giáo dục và Đào tạo. (2018a). *Thông tư số 32/2018/TT-BGDĐT ngày 26/12/2018 về chương trình Giáo dục phổ thông tổng thể năm 2018*.
- Bộ Giáo dục và Đào tạo. (2018b). *Thông tư số 32/2018/TT-BGDĐT ngày 26/12/2018 về chương trình Giáo dục phổ thông môn Toán năm 2018*.
- Cung, T. A., Trần, V. T., Đặng, H. T. (Đồng Chủ biên), Nguyễn, Đ. Đ., Phạm, H. H., Đặng, Đ. H., & Nguyễn, C. G. V. (2022). *Sách Bài tập Toán 10 – Tập 2*. Hà Nội: NXB Giáo dục Việt Nam.
- Đỗ, Đ. T. (Chủ biên), Đỗ, T. Đ., Phạm, X. C., Nguyễn, S. H., Đỗ, T. Đ., Phạm, S. N., Vũ, Đ. P., Nguyễn, T. K. S., Vũ, P. T., & Trần, Q. V. (2018). *Dạy học phát triển năng lực môn Toán trung học phổ thông*. Hà Nội: NXB Đại học Sư phạm.
- Polya, G. (1997). *Giải bài toán như thế nào?* (Hồ Thuần, Bùi Tường, biên dịch). Hà Nội: NXB Giáo dục Việt Nam.
- Hà, H. K. (Tổng Chủ biên), Cung, T. A., Trần, V. T., Đặng, H. T. (Đồng chủ biên), Hạ, V. A., Trần, M. C., Nguyễn, Đ. Đ., Phạm, H. H., Đặng, Đ. H., Phan, T. H., Nguyễn, T. K. S., Dương, A. T., & Nguyễn, C. G. V. (2022). *Sách giáo khoa Toán 10 – Tập 2*. Hà Nội: NXB Giáo dục Việt Nam.
- Hà, H. K. (Tổng Chủ biên), Cung, T. A., Trần, V. T., Đặng, H. T. (Đồng chủ biên), Hạ, V. A., Trần, M. C., Phan, T. H. D., Nguyễn, Đ. Đ., Phạm, H. H., Đặng, Đ. H., Phan, T. H., Nguyễn, T. K. S., Dương, A. T., & Nguyễn, C. G. V. (2022). *Sách giáo Viên Toán 10*. Hà Nội: NXB Giáo dục Việt Nam.
- Hoàng, P., Hoàng, T. T. L., Vũ, X. L., Phạm, T. T., Đào, T. M. T., & Đặng, T. H. (2020). *Từ điển Tiếng Việt*. Hà Nội – Đà Nẵng: NXB Đà Nẵng và Trung tâm Từ điển học.
- Nguyễn, B. K. (2015). *Phương pháp dạy học môn Toán*. Hà Nội: NXB Đại học Sư phạm.
- Tran, K. (2014). Về mục tiêu môn toán trong trường phổ thông Việt Nam. *Tạp chí Khoa học Giáo dục*, số 102, tháng 3/2014.
- Weinert, F. E. (2001). Concept of competence: a conceptual clarification. In D.S.Rychen & L.H.S Iganik (Eds).