BỘ ĐIỀU KHIỂN CHO SỰ CỘNG HƯỞNG ĐỒNG NHẤT GIỮA HAI HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN DẠNG HINDMARSH - ROSE 2D VÀ FITZHUGH-NAGUMO

Phan Văn Long Em*, Nguyễn Tấn Đạt, Nguyễn Minh Phúc và Nguyễn Thị Ngọc Lan

Trường Đại học An Giang, Đại học Quốc Gia Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam

**Tác giả liên hệ: Phan Văn Long Em, Email: pvlem@agu.edu.vn*

Lịch sử bài báo

Ngày nhận: 29/7/2024; Ngày nhận chỉnh sửa: 24/9/2024; Ngày duyệt đăng: 07/10/2024

Tóm tắt

Sự cộng hưởng đồng nhất khó có thể xảy ra giữa hai hệ phương trình vi phân hoàn toàn khác nhau ngay cả khi độ mạnh liên kết giữa chúng rất lớn. Trong bài báo này, chúng tôi giới thiệu một bộ điều khiển để giúp cho sự cộng hưởng xảy ra giữa hệ phương trình vi phân dạng Hindmarsh-Rose 2D và FitzHugh-Nagumo. Cụ thể, chúng tôi tìm điều kiện đủ để sự cộng hưởng xảy ra với bộ điều khiển đó và mô phỏng số trên phần mềm R để kiểm tra lại tính hiệu quả của nó.

Từ khóa: *Bộ điều khiển, cộng hưởng đồng nhất, hệ phương trình vi phân dạng Hindmarsh-Rose 2D, hệ phương trình vi phân dạng FitzHugh-Nagumo.*

IDENTICAL SYNCHRONIZATION CONTROLLER BETWEEN THE HINDMARSH-ROSE 2D AND THE FITZHUGH-NAGUMO TYPE MODEL

Phan Van Long Em*, Nguyen Tan Dat, Nguyen Minh Phuc, and Nguyen Thi Ngoc Lan

An Giang University, Vietnam National University Ho Chi Minh City, Vietnam

**Corresponding author: Phan Van Long Em, Email: pvlem@agu.edu.vn*

Article history

Received: 29/7/2024; Received in revised form: 24/9/2024; Accepted: 07/10/2024

Abstract

Identical synchronization is not easy to get between two different systems of ordinary differential equations, even with a large coupling strength. This study proposes a controller to facilitate identical synchronization between the model of Hindmarsh-Rose 2D type and that of the FitzHugh-Nagumo. Specifically, this study identifies the sufficient conditions for achieving the desired synchronization using the introduced controller, and then simulating it numerically using the R programming language to verify its effectiveness.

Keywords*: controller, identical synchronization, model of Hindmarsh-Rosse 2D, model of FitzHugh-Nagumo.*

DOI: https://doi.org/10.52714/dthu.13.8.2024.1359

Trích dẫn: Phan, V. L. E., Nguyễn, T. Đ., Nguyễn, M. P., & Nguyễn, T. N. L. (2024). Bộ điều khiển cho sự cộng hưởng đồng nhất giữa hai hệ phương trình vi phân dạng Hindmarsh - Rose 2D và FitzHugh-Nagumo. *Tạp chí Khoa học Đại học Đồng Tháp, 13*(8), 101-108. https://doi.org/10.52714/dthu.13.8.2024.1359.

1. Giới thiệu

Sự cộng hưởng hay *sự đồng bộ hóa* là một trong những hiện tượng quan trọng trong tự nhiên và trong khoa học phi tuyến, đặc biệt là trong mạng lưới các hệ phương trình dao động được liên kết yếu với nhau (Aziz-Alaoui, 2006).

Trong những năm gần đây, sự đồng bộ hóa đã được nghiên cứu rộng rãi trên nhiều lĩnh vực, nhiều hiện tượng tự nhiên cũng phản ánh sự đồng bộ hóa như sự di chuyển tạo thành từng đám mây của đàn chim, sự di chuyển của đàn cá chép trong hồ, sự di chuyển của đoàn diễu hành, sự nhận và truyền thông tin của một nhóm các tế bào,… (Braun & cs., 1994; Fitzhugh, 1960; Nagumo & cs., 1962). Chính vì thế việc nghiên cứu về sự đồng bộ hóa giữa các hệ phương trình toán học thực sự có ý nghĩa góp phần làm phong phú thêm kết quả cho lĩnh vực toán ứng dụng.

Sự cộng hưởng của các hệ có nghĩa là chúng có cùng đặc tính ở cùng thời điểm. Có rất nhiều loại cộng hưởng. Chẳng hạn như sự cộng hưởng đồng nhất trong một mạng lưới gồm hai hệ phương trình thì sự đồng bộ hóa có nghĩa là hệ phương trình này sẽ sao chép những đặc tính của hệ phương trình kia kể từ một thời điểm nào đó (Aziz-Alaoui, 2006). Đã có nhiều kết quả nghiên cứu về sự cộng hưởng đồng nhất xét trên các cấu trúc mạng lưới khác nhau của các tế bào, tương ứng với nhiều mô hình mô phỏng khác nhau của tế bào (Ambrosio & Aziz-Alaoui, 2012; Ambrosio & Aziz-Alaoui, 2013; Phan, 2022; Phan, 2023). Ở những nghiên cứu này, các kết quả đều cho thấy sự cộng hưởng xảy ra khi độ mạnh liên kết giữa các tế bào là đủ lớn, đồng thời các kết quả đạt được này đều dựa trên các cấu trúc mạng lưới khác nhau nhưng mỗi tế bào vẫn được mô phỏng bởi cùng một mô hình hoặc là mô hình FitzHugh-Nagumo (Ambrosio & Aziz-Alaoui, 2012; Ambrosio & Aziz-Alaoui, 2013) hoặc là mô hình Hindmarsh-Rose (Phan, 2022; Phan, 2023). Chưa có một kết quả nào liên quan đến sự cộng hưởng đồng nhất giữa hai hệ phương trình vi phân hoàn toàn khác nhau. Vì sự khác biệt giữa hai mô hình nên sự cộng hưởng đồng nhất là khó có thể xảy ra giữa hai hệ phương trình vi phân hoàn toàn khác nhau ngay cả khi độ mạnh liên kết giữa chúng rất lớn. Trong bài báo này, chúng tôi giới thiệu một bộ điều khiển để giúp cho sự cộng hưởng xảy ra giữa hệ phương trình vi phân dạng Hindmarsh-Rose 2D và FitzHugh-Nagumo. Cụ thể, chúng tôi tìm điều kiện đủ để sự cộng hưởng đồng nhất xảy ra với bộ điều khiển đó và mô phỏng số để kiểm tra lại tính hiệu quả của nó.

Để cho việc nghiên cứu dễ dàng hơn, chúng tôi xin giới thiệu một cách sơ lược rằng mô hình Hindmarsh-Rose 2D và mô hình FitzHugh-Nagumo dùng để mô phỏng điện áp của tế bào thần kinh. Chúng được biết đến như là các mô hình hai chiều đơn giản hóa từ mô hình nổi tiếng của Hodgkin-Huxley (Ermentrout & Terman, 2009; Hodgkin & Huxley, 1952). Tuy là các mô hình đơn giản nhưng chúng có nhiều kết quả giải tích đáng chú ý và duy trì được việc biểu diễn các tính chất của điện áp tế bào về mặt sinh học.

Cụ thể hơn, mô hình Hindmarsh-Rose 2D được tạo thành từ hai phương trình vi phân với hai biến u và v. Biến đầu tiên là biến nhanh được gọi là biến hoạt náo, nó đại diện cho điện áp của màng tế bào. Biến thứ hai là biến chậm, nó đại diện cho một số đại lượng vật lý phụ thuộc vào thời gian như là độ dẫn điện của dòng ion đi qua màng tế bào. Hệ phương trình Hindmarsh-Rose 2D (HR) được cho bởi hệ sau (Phan, 2022; Phan, 2023):

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = u_t = g(u) + v + I, \\ \dfrac{dv}{dt} = v_t = 1 - bu^2 - v, \end{cases} \tag{1}$$

trong đó $g(u) = -u^3 + au^2$; $u = u(t)$ thể hiện điện áp màng tế bào; $v = v(t)$ thể hiện cho các dòng ion chuyển động xuyên qua màng tế bào; các tham số $a = 3,\ b = 5$ là các hằng số được xác định bằng kinh nghiệm thực tiễn; I là cường độ dòng điện kích hoạt từ bên ngoài; t là biến chỉ thời gian.

Một cách tương tự, mô hình FitzHugh-Nagumo được tạo thành từ hai phương trình của hai biến $\bar{u}$ và $\bar{v}$. Biến đầu tiên là biến nhanh, được gọi là biến hoạt náo, nó thể hiện cho điện áp của màng tế bào. Biến thứ hai là biến chậm, nó thể hiện cho một số đại lượng vật lí phụ thuộc thời gian như độ dẫn điện của dòng ion đi ngang qua màng tế bào. Hệ phương trình FitzHugh-Nagumo được biểu diễn bởi hệ sau, sử dụng kí hiệu như trong (Ambrosio & Aziz-Alaoui, 2012; Ambrosio & Aziz-Alaoui, 2013):

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{d\bar{u}}{dt} = \varepsilon \bar{u}_t = f(\bar{u}) - \bar{v} + \bar{I}, \\ \dfrac{d\bar{v}}{dt} = \bar{v}_t = \bar{a}\bar{u} - \bar{b}\bar{v} + \bar{c}, \end{cases} \tag{2}$$

trong đó $\bar{u} = \bar{u}(t)$ thể hiện điện áp màng tế bào; $\bar{v} = \bar{v}(t)$ thể hiện cho các dòng ion chuyển động xuyên qua màng tế bào; $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ là các hằng số ($\bar{a}$, $\bar{b}$ dương); $0 < \varepsilon < 1$; $t \in \mathbb{R}^+$ là biến thời gian; $f(\bar{u}) = -\bar{u}^3 + 3\bar{u}$ và $\bar{I}$ là dòng điện kích hoạt từ bên ngoài.

Từ hai hệ phương trình (1) và (2), chúng tôi giới thiệu trong nghiên cứu này một bộ điều khiển để tạo mối quan hệ giữa chúng và giúp cho sự cộng hưởng đồng nhất xảy ra. Cụ thể, chúng tôi tìm điều kiện đủ để sự cộng hưởng đồng nhất xảy ra với bộ điều khiển đó ở phần 2; phần 3 là mô phỏng số để kiểm tra lại tính hiệu quả của bộ điều khiển; và phần 4 là kết luận.

2. Điều kiện đủ cho sự cộng hưởng đồng nhất giữa hai hệ phương trình vi phân dạng Hindmarsh-Rose 2D và FitzHugh-Nagumo

Trong bộ não con người có rất nhiều tế bào, chúng liên kết với nhau tạo thành một mạng lưới tế bào. Một mạng lưới tế bào là một hệ thống các tế bào được liên kết với nhau về mặt sinh lý học. Sự trao đổi giữa chúng chủ yếu là dựa vào các quá trình điện hóa.

Trong nghiên cứu này, chúng tôi xét hai hệ phương trình vi phân khác nhau là mô hình Hindmarsh-Rose 2D và mô hình FitzHugh-Nagumo. Cả hai hệ phương trình đều giúp mô phỏng các tính chất của điện áp tế bào. Tuy nhiên, việc xét sự cộng hưởng đồng nhất giữa hai mô hình khác nhau như thế chưa được thực hiện trước đây. Từ những nghiên cứu trước đó (Phan, 2022; Phan, 2023), chúng tôi nhận thấy rằng các tế bào trong cùng một mạng lưới đều được mô phỏng bởi cùng một mô hình, sự cộng hưởng của chúng có thể xảy ra khi độ mạnh liên kết giữa chúng đủ lớn. Tuy nhiên, nếu chúng ta sử dụng ý tưởng tương tự như những nghiên cứu đạt được trước đó cho hai mô hình hoàn toàn khác nhau thì lại không đạt được kết quả mong muốn. Để cho dễ hiểu, chúng tôi xét mạng lưới gồm hai mô hình Hindmarsh-Rose 2D và FitzHugh-Nagumo được liên kết tuyến tính với nhau như biểu diễn ở hệ phương trình (3):

$$\begin{cases} u_t = g(u) + v + I, \\ v_t = 1 - bu^2 - v, \\ \varepsilon \bar{u}_t = f(\bar{u}) - \bar{v} + \bar{I} - g_{syn}(\bar{u} - u), \\ \bar{v}_t = \bar{a}\bar{u} - \bar{b}\bar{v} + \bar{c}, \end{cases} \tag{3}$$

trong đó g_{syn} là một hằng số dương đại diện cho độ mạnh liên kết (xem Ermentrout & cs., 2009; Phan, 2022; Phan, 2023).

Khi đó, chúng ta hãy xem Hình 1 là hình biểu diễn sai số cộng hưởng giữa mô hình Hindmarsh-Rose 2D và mô hình FitzHugh-Nagumo tương ứng với giá trị của độ mạnh liên kết là $g_{syn} = 0.5$ ở Hình 1(a) và $g_{syn} = 2.5$ ở Hình 1(b). Có thể thấy rằng độ mạnh liên kết đã tăng lên đáng kể nhưng sai số cộng hưởng vẫn không có dấu hiệu tiến về 0. Nghĩa là rất khó để sự cộng hưởng xảy ra giữa hai mô hình hoàn toàn khác nhau bằng các hàm liên kết đã sử dụng trước đó (Phan, 2022; Phan, 2023). Do đó, chúng tôi giới thiệu trong nghiên cứu này một bộ điều khiển nhằm giúp cho sự cộng hưởng đồng nhất có thể xảy ra giữa hai mô hình khác nhau, cụ thể là mô hình Hindmarsh-Rose 2D và mô hình FitzHugh-Nagumo. Chú ý rằng với cách xây dựng bộ điều khiển trong nghiên cứu này, chúng ta hoàn toàn có thể áp dụng cho những mô hình khác.

Để cho bài nghiên cứu trở nên rõ ràng hơn, chúng tôi giới thiệu định nghĩa về sự cộng hưởng đồng nhất giữa hai hệ phương trình vi phân (1) và (2) như sau.

Định nghĩa 1. Đặt $|e_1| + |e_2|$ là sai số cộng hưởng, trong đó $e_1 = \bar{u} - u, e_2 = \bar{v} - v.$ Chúng ta nói rằng hệ phương trình (1) và (2) là cộng hưởng đồng nhất nếu sai số cộng hưởng tiến về 0 khi t tiến về vô cùng.

Mạng lưới các tế bào được mô phỏng bởi cùng một hệ phương trình vi phân có thể đạt được sự cộng hưởng đồng nhất với một giá trị độ mạnh liên kết đủ lớn. Tuy nhiên, để đạt được sự cộng hưởng đồng nhất theo Định nghĩa 1 cho hai mô hình khác nhau là rất khó nếu ta áp dụng cùng phương pháp như những công trình nghiên cứu đã đề cập trước đó (Phan, 2022; Phan, 2023). Nói cách khác để sự cộng hưởng đồng nhất xảy ra, chúng ta cần xây dựng bộ điều khiển cho mạng lưới gồm hệ phương trình (1) và (2). Cụ thể chúng ta cộng thêm vào cho mô hình (1)-(2) một bộ điều khiển $(w,\bar{w})$ như sau:

$$\begin{cases} u_t = g(u) + v + I, \\ v_t = 1 - bu^2 - v, \\ \varepsilon \bar{u}_t = f(\bar{u}) - \bar{v} + \bar{I} + w, \\ \bar{v}_t = \bar{a}\bar{u} - \bar{b}\bar{v} + \bar{c} + \bar{w}, \end{cases} \tag{4}$$

trong đó bộ điều khiển $w,\bar{w}$ được thiết kế như sau:

$$\begin{cases} w = -f(u) + v - \bar{I} - ke_1 + \varepsilon(g(u) + v + I), \\ \bar{w} = -\bar{a}u + \bar{b}v - \bar{c} + 1 - bu^2 - v, \end{cases} \tag{5}$$

với một nguyên tắc cải tiến được thiết kế như sau:

$$k_t = re_1^2, \tag{6}$$

trong đó $k = k(t)$; r là một hằng số dương tùy ý.

Chú ý 1. Bằng cách xây dựng bộ điều khiển như trên, chúng ta hoàn toàn có thể xây dựng bộ điều khiển để cộng vào mô hình (1) thay vì mô hình (2).

Dưới tác động của các bộ điều khiển được xây dựng ở trên, phương trình vi phân của các sai số cộng hưởng thành phần tương ứng với hệ (4) được tính như sau:

$$\begin{aligned} \varepsilon e_{1t} &= \varepsilon \bar{u}_t - \varepsilon u_t \\ &= f(\bar{u}) - \bar{v} + \bar{I} + w - \varepsilon(g(u) + v + I) \\ &= f(\bar{u}) - f(u) - (\bar{v} - v) - ke_1 \\ &= f(\bar{u}) - f(u) - e_2 - ke_1, \end{aligned} \tag{7}$$

và

$$\begin{aligned} e_{2t} &= \bar{v}_t - v_t \\ &= \bar{a}\bar{u} - \bar{b}\bar{v} + \bar{c} + \bar{w} - (1 - bu^2 - v) \\ &= \bar{a}\bar{u} - \bar{b}\bar{v} + \bar{c} - \bar{a}u + \bar{b}v - \bar{c} \\ &= \bar{a}e_1 - \bar{b}e_2. \end{aligned} \tag{8}$$

Mệnh đề 1. *Hàm số f thỏa mãn điều kiện sau đây:*

$$\left| f(\bar{u}) - f(u) \right| \le \beta \left| \bar{u} - u \right|, \tag{9}$$

trong đó, $\bar{u},u$ là các điện áp tế bào và β là một số thực dương nào đó.

Chứng minh. Với mọi $\bar{u},u$, chúng ta có:

$$\begin{aligned} f(\bar{u}) - f(u) &= -\bar{u}^3 + 3\bar{u} + u^3 - 3u \\ &= (\bar{u} - u)\left[3 - (\bar{u} - u)^2 - \bar{u}.u\right]. \end{aligned}$$

Vì $\bar{u},u$ bị chặn và nằm trong một tập compact (Ambrosio, B., Aziz-Alaoui, M. A. and Phan V. L. E, 2019) nên tồn tại một số thực dương β sao cho:

$$\left| f(\bar{u}) - f(u) \right| \le \beta \left| \bar{u} - u \right|. \qquad \blacksquare$$

Tiếp theo, chúng ta nghiên cứu vấn đề sự cộng hưởng đồng nhất của mạng lưới (4). Kết quả chính được nêu trong Định lí sau:

Định lí 1. *Mạng lưới (4) có thể đạt được sự cộng hưởng đồng nhất dưới tác động của bộ điều khiển (5) và nguyên tắc cải tiến (6).*

Chứng minh. Chúng ta xây dựng hàm số Lyapunov như sau:

$$V(t) = \frac{1}{2}\left(\bar{a}\varepsilon e_1^2 + e_2^2 + \frac{\bar{a}}{r}(k - m)^2 \right), \tag{10}$$

trong đó m là hằng số cần xác định để hàm số Lyapunov đạt được những kết quả mong đợi.

Tính đạo hàm của $V(t)$ theo thời gian, kết hợp với (7) và (8), ta được:

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} &= \bar{a}\varepsilon e_1 e_{1t} + e_2 e_{2t} + \frac{\bar{a}}{r}(k - m).k_t \\ &= \bar{a}e_1(f(\bar{u}) - f(u) - e_2 - ke_1) \\ &\quad + e_2(\bar{a}e_1 - \bar{b}e_2) + \bar{a}ke_1^2 - \bar{a}me_1^2 \\ &= \bar{a}e_1\left(f(\bar{u}) - f(u)\right) - \bar{a}e_1e_2 \\ &\quad - \bar{a}ke_1^2 + \bar{a}e_2e_1 - \bar{b}e_2^2 + \bar{a}ke_1^2 - \bar{a}me_1^2 \\ &= \bar{a}e_1\left(f(\bar{u}) - f(u)\right) - b\bar{e}_2^2 - \bar{a}me_1^2. \end{aligned} \tag{11}$$

Sử dụng Mệnh đề 1, ta có:

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} &\le \left[\bar{a}\beta e_1^2 - \bar{a}me_1^2 - be_2^2\right] \\ &\le \left[\bar{a}(\beta - m)e_1^2 - be_2^2\right]. \end{aligned} \tag{12}$$

Ta chọn $m > \beta$, nên (12) có thể được đánh giá như sau:

$$\frac{dV(t)}{dt} \le -\gamma\left[\frac{1}{2}(a\varepsilon e_1^2 + e_2^2)\right], \tag{13}$$

trong đó

$$\gamma = \min\left\{\frac{2(m-\beta)}{\varepsilon}; 2b\right\}.$$

Từ (13), ta có $0 \le V(t) \le V(0)$. Sử dụng bất đẳng thức này cùng với (10), ta suy ra rằng $V(t)$ bị chặn. Dựa vào lý thuyết ổn định Lyapunov và nguyên lý bất biến của LaSalle (Aeyels, 1995), ta có:

$$\lim_{t\to+\infty}(|e_1| + |e_2|) = 0.$$

Khi đó, theo Định nghĩa 1 thì mạng lưới (4) đạt được sự cộng hưởng đồng nhất. Định lí đã được chứng minh. ■

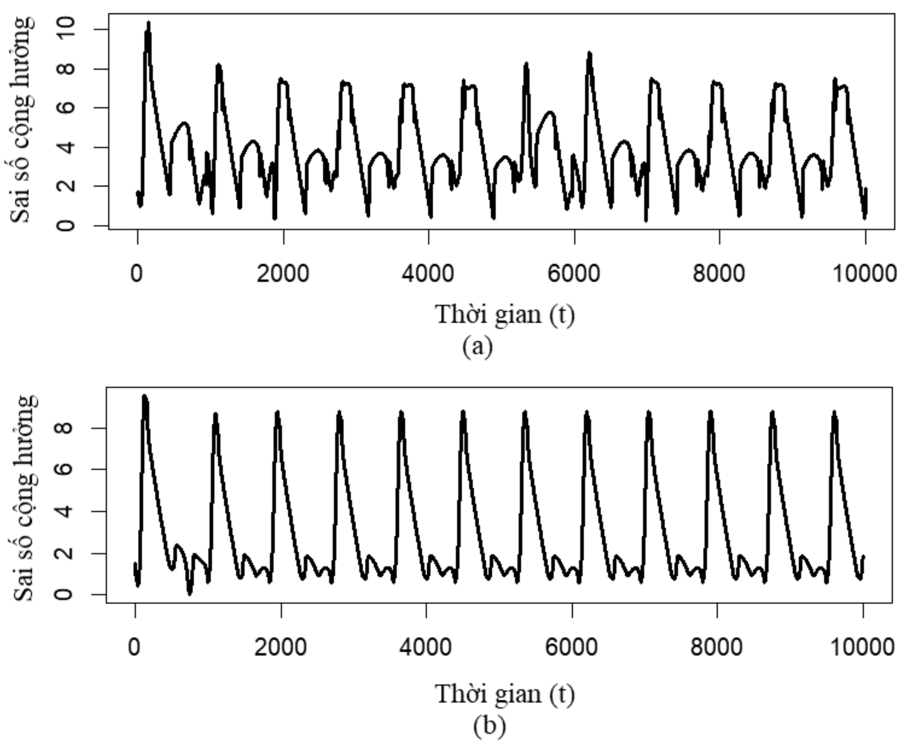
3. Mô phỏng số và thảo luận

Trong phần này, chúng tôi trình bày kết quả mô phỏng số để kiểm tra xem bộ điều khiển (5) và nguyên tắc cải tiến (6) được xây dựng như trên có thực sự hiệu quả. Kết quả mô phỏng số được thực hiện trên R cùng với giá trị các tham số được cho như sau:

$$a = 3,\ b = 5, I = 0.5,$$

$$\bar{a} = 1, \bar{b} = 0.001, \bar{c} = 0, \bar{I} = 0, \varepsilon = 0.1.$$

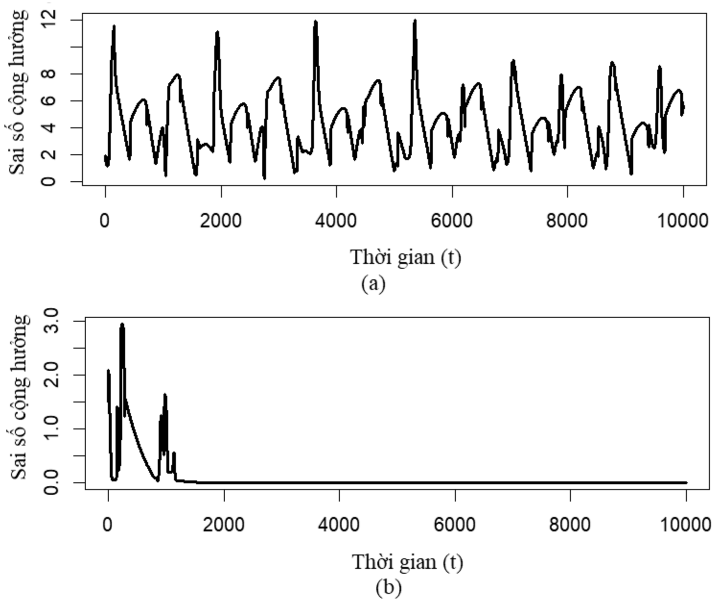
Đầu tiên, chúng tôi trình bày kết quả mô phỏng số ở Hình 1 là biểu diễn sai số cộng hưởng giữa mô hình Hindmarsh-Rose 2D và mô hình FitzHugh-Nagumo khi chúng liên kết tuyến tính với nhau tạo thành mạng lưới (3) với điều kiện ban đầu là $(0,1,1,0.5)$. Cụ thể, Hình 1(a) biểu diễn sai số cộng hưởng tương ứng với giá trị của độ mạnh liên kết là $g_{syn} = 0.5$ và $g_{syn} = 2.5$ ở Hình 1(b). Có thể thấy rằng độ mạnh liên kết đã tăng lên đáng kể nhưng sai số cộng hưởng vẫn không có dấu hiệu tiến về 0 khi thời gian tiến ra vô cùng. Nghĩa là rất khó để sự cộng hưởng xảy ra giữa hai mô hình khác nhau đang xét trong nghiên cứu này.



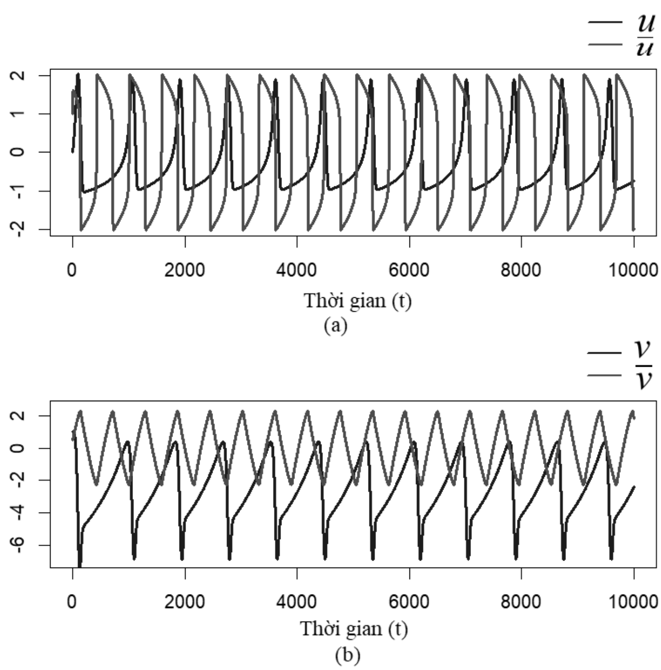
Hình 1. Sai số cộng hưởng theo thời gian giữa hai hệ phương trình vi phân dạng Hindmarsh-Rose 2D và FitzHugh-Nagumo với liên kết tuyến tính một chiều (3). Hình (a) tương ứng với $g_{syn} = 0.5$; Hình (b) tương ứng với $g_{syn} = 2.5$

Tiếp theo, chúng tôi trình bày kết quả mô phỏng số cho hệ phương trình (4) với điều kiện ban đầu $(0,1,1,0.5)$, tức là mạng lưới gồm hai mô hình Hindmarsh-Rose 2D và FitzHugh-Nagumo với bộ điều khiển (5) và nguyên tắc cải tiến (6).

Cụ thể, Hình 2(a) biểu diễn sai số cộng hưởng theo thời gian t của mạng lưới (4) không có cộng thêm bộ điều khiển (5) cũng như nguyên tắc cải tiến (6). Chúng ta thấy rằng, sai số cộng hưởng không tiến về 0, nghĩa là sự cộng hưởng đồng nhất đã không xảy ra. Cùng với Hình 3, chúng ta thấy rằng các biến u được biểu diễn bởi đường màu xanh và $\bar{u}$ được biểu diễn bởi đường màu đỏ ở Hình 3(a) không có sự tương đồng theo thời gian. Tương tự, các biến v được biểu diễn bởi đường màu xanh và $\bar{v}$ được biểu diễn bởi đường màu đỏ ở Hình 3(b) cũng không có sự tương đồng theo thời gian. Tóm lại, khi bộ điều khiển không được cộng vào thì sự cộng hưởng đồng nhất đã không xảy ra.

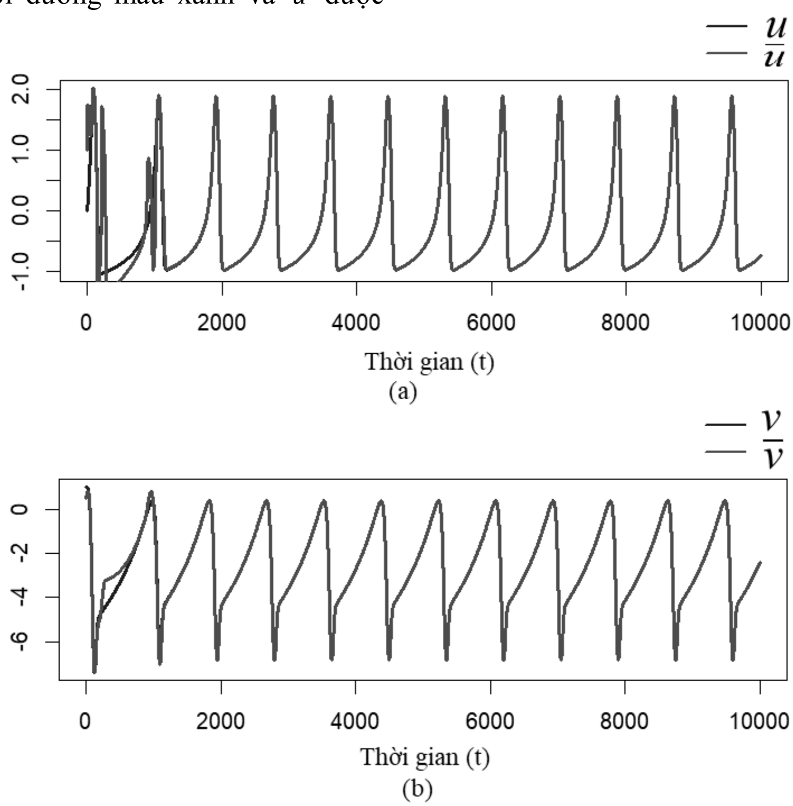


Hình 2. Sai số cộng hưởng theo thời gian giữa hai hệ phương trình vi phân dạng Hindmarsh-Rose 2D và FitzHugh-Nagumo. Hình (a) không có bộ điều khiển (5) và nguyên tắc cải tiến (6); Hình (b) có bộ điều khiển (5) và nguyên tắc cải tiến (6)



Hình 3. (a) Biểu diễn chuỗi thời gian của các biến u đường màu xanh và $\bar{u}$ đường màu đỏ khi không có bộ điều khiển (5) và nguyên tắc cải tiến (6); (b) Biểu diễn chuỗi thời gian của các biến v đường màu xanh và $\bar{v}$ đường màu đỏ khi không có bộ điều khiển (5) và nguyên tắc cải tiến (6)

Bây giờ, chúng ta hãy quan sát Hình 2(b) là hình biểu diễn sai số cộng hưởng theo thời gian t của mạng lưới (4) có cộng thêm bộ điều khiển (5) cũng như nguyên tắc cải tiến (6). Chúng ta thấy rằng sai số cộng hưởng đã tiến về không. Nói một cách khác, sự cộng hưởng đồng nhất đã xảy ra. Cùng với Hình 3, chúng ta thấy rằng các biến u được biểu diễn bởi đường màu xanh và $\bar{u}$ được biểu diễn bởi đường màu đỏ ở Hình 4(a) đã có sự tương đồng theo thời gian. Tương tự, các biến v được biểu diễn bởi đường màu xanh và $\bar{v}$ được biểu diễn bởi đường màu đỏ ở Hình 4(b) cũng đã có sự tương đồng theo thời gian. Điều này nói lên rằng bộ điều khiển và nguyên tắc cải tiến mà chúng tôi xây dựng là có hiệu quả.



Hình 4. (a) Biểu diễn chuỗi thời gian của các biến u đường màu xanh và $\bar{u}$ đường màu đỏ khi có bộ điều khiển (5) và nguyên tắc cải tiến (6); (b) Biểu diễn chuỗi thời gian của các biến v đường màu xanh và $\bar{v}$ đường màu đỏ khi có bộ điều khiển (5) và nguyên tắc cải tiến (6)

4. Kết luận

Bài báo giới thiệu bộ điều khiển giúp đạt được sự cộng hưởng đồng nhất giữa hai mô hình toán học khác nhau, cụ thể là mô hình Hindmarsh-Rose 2D và mô hình FitzHugh-Nagumo. Đặc biệt, kết quả đã chỉ ra được điều kiện đủ để sự cộng hưởng đồng nhất xảy ra nhờ sự hỗ trợ của bộ điều khiển được giới thiệu, cũng như qua kết quả mô phỏng số chúng ta hoàn toàn thấy được sự hiệu quả của bộ khiển này. Nếu không có nó thì hai hệ phương trình vi phân khác nhau khó có thể đạt được sự cộng hưởng như mong muốn. Tương lai, chúng tôi sẽ nghiên cứu sự cộng hưởng tổng quát giữa hai mô hình toán học khác nhau.

Tài liệu tham khảo

Aeyels, D. (1995). Asymptotic Stability of Nonautonomous Systems by Lyapunov's Direct Method. *Systems and Control Letters*, 25, 273-280. https://doi.org/10.1016/0167-6911(94)00088-D

Aziz-Alaoui, M. A. (2006). Synchronization of Chaos. *Encyclopedia of Mathematical Physics, Elsevier*, (Vol. 5), 213-226.

Ambrosio, B., & Aziz-Alaoui, M. A. (2012). Synchronization and control of coupled reaction-diffusion systems of the FitzHugh-

Nagumo-type. *Computers and Mathematics with Application*, (64), 934-943.

Ambrosio, B., & Aziz-Alaoui, M. A. (2013). Synchronization and control of a network of coupled reaction-diffusion systems of generalized FitzHugh-Nagumo type. *ESAIM: Proceedings and Surveys*, (39), 15-24.

Ambrosio, B., Aziz-Alaoui, M. A., & Phan V. L. E. (2018). Global attractor of complex networks of reaction-diffusion systems of Fitzhugh-Nagumo type. *American Institute of Mathematical Sciences*, 23 (9), 3787-3797.

Braun, H.A., Wissing, H., Schäfer, K., & Hirsch, M.C. (1994). Oscillation and noise determine signal transduction in shark multimodel sensory cells. *Nature*, (Vol. 367), p. 270- 273.

Ermentrout, G. B., & Terman, D. H. (2009). *Mathematical Foundations of Neurosciences*. Springer.

Fitzhugh, R. (1960). Thresholds and plateaus in the Hodgkin-Huxley nerve equations. *J. Gen. Physiol.*, (Vol. 43), p. 867-896.

Hodgkin, A. L., & Huxley, A. F. (1952). A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *J. Physiol.*, (117), 500-544.

Nagumo, J., Arimoto, S., & Yoshizawa, S. (1962). An active pulse transmission line simulating nerve axon. *Proc. IRE.*, (50), 2061-2070.

Phan, V. L. E. (2022). Sufficient Condition for Synchronization in Complete Networks of Reaction-Diffusion Equations of Hindmarsh-Rose Type with Linear Coupling. *IAENG International Journal of Applied Mathematics*, *vol. 52*, no. 2, 315-319.

Phan, V. L. E. (2023). Sufficient Condition for Synchronization in Complete Networks of *n* Reaction-Diffusion Systems of Hindmarsh-Rose Type with Nonlinear Coupling. *Engineering Letters*, *vol. 31*, no. 1, 413-418.