PHƯƠNG PHÁP ĐƯỜNG MỨC KẾT HỢP VỚI PHẦN MỀM DESMOS TRONG VIỆC ĐỊNH HƯỚNG LỜI GIẢI CHO BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC

Phạm Thị Trân Châu[1*], Võ Đức Thịnh[2], Ngô Thị Kim Yến[1] và Trần Thuỵ Hoàng Yến[2]

[1]*Sinh viên, Khoa Sư phạm Toán - Tin, Trường Đại học Đồng Tháp, Việt Nam*

[2]*Khoa Sư phạm Toán - Tin, Trường Đại học Đồng Tháp, Việt Nam*

[*]*Tác giả liên hệ: phamthitranchau2000@gmail.com*

Lịch sử bài báo

Ngày nhận: 19/5/2021; Ngày nhận chỉnh sửa: 28/7/2021; Ngày duyệt đăng: 28/8/2021

Tóm tắt

Trong bài báo này, chúng tôi sẽ giới thiệu phương pháp đường mức dưới sự hỗ trợ của phần mềm Desmos - công cụ dạy và vẽ đồ thị để phân tích và định hướng tìm lời giải sơ cấp cho bài toán bất đẳng thức ở phổ thông. Bên cạnh đó chúng tôi cũng đưa ra một số nhận định để cho thấy việc sử dụng phần mềm Desmos trong việc dự đoán điểm rơi của bài toán bất đẳng thức lợi thế hơn một số phương pháp dự đoán điểm rơi trước đó. Hơn nữa, thông qua việc mô tả nghiệm bài toán tối ưu qua các hình ảnh trực quan, người dùng sẽ có thể cảm nhận tốt hơn về mối liên hệ giữa nghiệm tối ưu của bài toán với các nghiệm khả thi khác, từ đó có những hiểu biết sâu sắc hơn về bài toán tối ưu nói chung cũng như bài toán bất đẳng thức nói riêng.

Từ khóa: *Bất đẳng thức, dự đoán điểm rơi, phần mềm Desmos, phương pháp đường mức.*

THE LEVEL-SET METHOD COMBINED WITH DESMOS SOFTWARE TO ORIENT THE SOLUTION OF INEQUALITY PROBLEMS

Pham Thi Tran Chau[1*], Vo Duc Thinh[2], Ngo Thi Kim Yen[1], and Tran Thuy Hoang Yen[2]

[1]*Student, Department of Mathematics and Information Technology Teacher Education, Dong Thap University, Vietnam*

[2]*Department of Mathematics and Information Technology Teacher Education, Dong Thap University, Vietnam*

[*]*Corresponding author: phamthitranchau2000@gmail.com*

Article history

Received: 19/5/2021; Received in revised form: 28/7/2021; Accepted: 28/8/2021

Abstract

In this paper, we present the level-set method combined with Desmos software - a free graphing and teaching tool to analyze and find elementary solutions for inequality problems in high schools. Besides, we also show that Desmos outperforms some previous methods in predicting solutions to inequalit problems. Moreover, the description of the optimization problem through visual images will help user feel better about the relationship between the optimal solution to optimization problems with feasible solutions; thereby better understanding the optimization problem in general as well as the inequality problem in particular.

Keywords: *Desmos software, inequality problems, level-set method, predicting the solution.*

DOI: https://doi.org/10.52714/dthu.11.1.2022.919

Trích dẫn: Phạm, T. T. C., Võ, Đức T., Ngô, T. K. Y., & Trần, T. H. Y. (2022). Phương pháp đường mức kết hợp với phần mềm Desmos trong việc định hướng lời giải cho bài toán bất đẳng thức. *Tạp chí Khoa học Đại học Đồng Tháp, 11*(1), 3-11. https://doi.org/10.52714/dthu.11.1.2022.919.

1. Đặt vấn đề

Bất đẳng thức là một trong những nội dung được đánh giá là khó trong chương trình môn Toán trung học phổ thông và nội dung này thường sử dụng dùng để phân loại đối tượng học sinh. Minh chứng là trong những năm gần đây, bài toán bất đẳng thức thường xuất hiện trong các đề thi tuyển sinh vào lớp 10, thi học sinh giỏi các cấp tỉnh, cấp toàn quốc hay cuộc thi IMO và thi trung học phổ thông quốc gia nhằm để phân loại và chọn lọc các em học sinh khá giỏi. Tuy các sách, các tài liệu về bất đẳng thức khá nhiều, các phương pháp giải bất đẳng thức cũng khá phong phú, đa dạng nhưng học sinh vẫn gặp nhiều khó khăn khi phải giải một dạng bất đẳng thức mới. Cái khó của các bài toán bất đẳng thức nằm ở chỗ chúng thường sử dụng khá nhiều kĩ thuật mà không phải học sinh nào cũng có thể nhìn ra được. Vì lẽ đó, nhiều tác giả đã cố gắng tìm ra những phương pháp giúp học sinh dễ tìm lời giải hơn trong việc giải toán bất đẳng thức (Nguyễn, 2009; Nguyễn, 2018; Đặng, 2018; Nguyễn, 2005; Mitrinovic, D. S, 1964; Trần, 2017; Nguyễn, 2015). Một phương pháp khá hiệu quả trong chứng minh bất đẳng thức là phương pháp dự đoán điểm rơi (Trần, 2009). Tuy nhiên, để dự đoán điểm rơi của một bài toán bất đẳng thức không phải là việc dễ dàng, đặc biệt khi bài toán đó không có dạng đối xứng (để có thể áp dụng điểm rơi Cauchy, điểm rơi Cauchy-Schwarz). Hơn nữa, điểm rơi của bài toán bất đẳng thức chính là nghiệm của bài toán tối ưu tương ứng hay đó là một dạng bài toán tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất thường gặp ở phổ thông. Với cách tiếp cận này, một số tác giả đã sử dụng phương pháp Lagrange, một phương pháp cơ bản trong lý thuyết tối ưu, để tìm điểm rơi của bài toán bất đẳng thức. Đây là một trong những phương pháp tìm giá lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm nhiều biến số với các ràng buộc hàm (phương trình và bất phương trình). Phương pháp Lagrange có ưu điểm là giúp chúng ta đưa việc chứng minh bài toán bất đẳng thức về việc giải bài các hệ phương trình thông qua điều kiện tối ưu Karush-Kuhn-Tucker (điều kiện KKT). Tuy nhiên, phương pháp này có một hạn chế lớn là sử dụng khái niệm đạo hàm riêng của hàm nhiều biến, đây là khái niệm xa lạ và không thể áp dụng vào phổ thông. Hơn nữa, nhiều bài toán bất đẳng thức khi sử dụng điều kiện KKT lại đưa về hệ phương trình phức tạp, rất khó hoặc mất nhiều thể gian để tìm ra nghiệm. Một phương pháp khác để dự đoán nghiệm của bài toán tối ưu là phương pháp đường mức. Phương pháp này ban đầu được sử dụng để giải bài toán quy hoạch tuyến tính (Gregoire *và cs.*, 2002; Stanley & Fadil, 2001), một dạng toán được đưa vào chương trình giáo dục phổ thông môn Toán năm 2018 (Bộ Giáo dục và Đào tạo, 2018), và sau đó được phát triển các bài toán quy hoạch phi tuyến. Phương pháp đường mức khá hiệu quả và phù hợp với học sinh phổ thông trong việc dự đoán nghiệm của các bài toán bất đẳng thức với điều kiện phương trình cũng như bất phương trình vì phương pháp này không dùng nhiều kiến thức của toán học bậc đại học. Một sự phù hợp nữa của phương pháp đường mức với chương trình giáo dục phổ thông môn Toán năm 2018 là nó có thể được hỗ trợ từ các phần mềm vẽ hình toán học. Đây là một trong những mục tiêu quan trọng trong việc dạy và học toán ở bậc phổ thông (Bộ Giáo dục và Đào tạo, 2018). Mặc dù khá hiệu quả trong việc tìm nghiệm của một số bài toán tối ưu, tuy nhiên không có nhiều tài liệu cả tiếng Việt lẫn tiếng Anh trình bày về phương pháp đường mức áp dụng vào tìm lời giải cho các bài toán tối ưu ở phổ thông.

Trong bài báo này, chúng tôi sử dụng phương pháp đường mức dưới sự hỗ trợ của phần mềm toán học Desmos hay website desmos.com để dự đoán điểm rơi cũng như phân tích, định hướng tìm lời giải cho một số bài toán bất đẳng thức. Từ những phân tích này, chúng tôi sẽ trình bày lời giải bài toán bất đẳng thức bằng phương pháp của toán học phổ thông một cách đơn giản và không sử dụng nhiều kỹ thuật phức tạp. Đây là cách tiếp cận phù hợp với mục tiêu và đặc điểm của chương trình giáo dục phổ thông môn Toán năm 2018.

2. Phương pháp đường mức dưới sự hỗ trợ của phần mềm toán học

2.1. Hướng dẫn vẽ hình bằng phần mềm Desmos/website desmos.com

Desmos là một website trực tuyến và hoàn toàn miễn phí với tính năng hiển thị đồ thị hàm số khi người dùng nhập công thức toán học. Desmos có phiên bản cài đặt trên máy tính và điện thoại di động. Đặc biệt hơn, Desmos còn cho phép người dùng thay đổi các tham số để tạo ra các hình ảnh chuyển động trực quan. Ngoài ra, các công thức toán học của Desmos có thể được nhập trực tiếp từ bàn phím mà không cần sự hỗ trợ từ các phần mềm khác giúp người học dễ dàng thao tác và không mất nhiều thời gian.

Desmos có thể được sử dụng cho các mục đích sau:

- Vẽ đồ thị hàm số chính xác với hàm số biểu thức do người dùng nhập (Desmos/calculator).

- Vẽ các đồ thị có thể tương tác được.

- Vẽ các chuyển động phụ thuộc nhau (tham số thay đổi, đồ thị thay đổi).

- Vẽ các dạng hình học cơ bản (Desmos/Geometry).

- Tạo các tác phẩm nghệ thuật từ các hàm số.

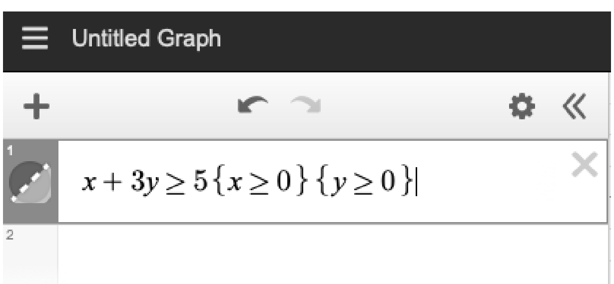
- Sử dụng thiết kế bài giảng và tổ chức lớp học trực tuyến.

Ví dụ 1: Vẽ miền tập hợp các số thực không âm x, y thỏa mãn điều kiện $x+3y \geq 5$.

Sử dụng Desmos graphing để vẽ một miền giới hạn bởi các bất phương trình và phương trình theo các bước sau:

Bước 1: Vào wesite desmos.com chọn Graphing Calculator.

Bước 2: Nhập công thức toán học đầu tiên vào khung bên trái (Hình 1).



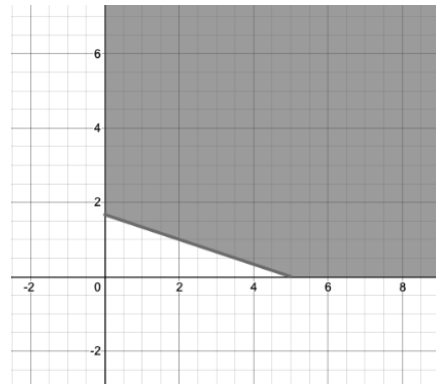
Hình 1. Kết quả nhập điều kiện $x+3y \geq 5$

Trong đó,

(i) dấu “$\geq$” trong công thức ở Hình 1 được nhập từ bàn phím bằng cách nhập lần lượt dấu “$=$” và dấu “$>$”.

(ii) các ký hiệu $x \geq 0$ và $y \geq 0$ là nhập điều kiện x, y không âm.

Kết quả miền điều kiện được thể hiện ở Hình 2.



Hình 2. Biểu diễn hình học miền điều kiện của $x+3y \geq 5$

2.2. Cơ sở toán học của phương pháp đường mức

Trong giải tích hàm, ta đã biết rằng, một hàm giá trị thực liên tục trên một tập compact thì luôn tồn tại giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên tập compact đó (Cinlar & Vanderbei, 2013, Hệ quả 3.24). Kết quả sau là sự tổng quát của kết quả trên trong trường hợp miền xác định không là tập compact.

Mệnh đề 1 (Aragon *và* cs., 2019, Định lý 2.6)**.** Giả sử $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ là một ánh xạ liên tục, inf-compact trên D, nghĩa là tồn tại m sao cho $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq m\}$ là tập compact, thì f đạt giá trị nhỏ nhất trên D.

2.3. Phương pháp đường mức để giải bài toán tối ưu

Xét bài toán tối ưu min $f(x, y)$ với điều kiện $(x, y) \in D$, trong đó $f(x, y)$ là inf-compact trên D. Để tìm nghiệm bài toán trên ta thực hiện các bước sau:

Bưới 1: Vẽ miền ràng buộc lên mặt phẳng toạ độ.

Bước 2: Vẽ đường cong $f(x, y)=m$ với m là một giá trị nào đó.

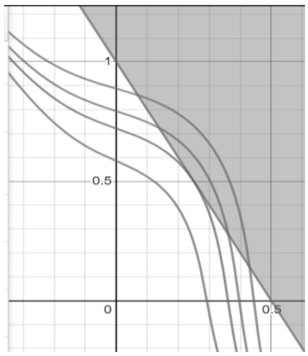
Bước 3: Thay đổi giá trị m sao cho đường cong $f(x, y)=m$ có tiếp xúc với biên của miền D tương ứng với giá trị nhỏ nhất của m là giá trị nhỏ nhất của bài toán và điểm tiếp xúc khi đó là nghiệm của bài toán tối ưu.

Chú ý: Các đường cong $f(x, y)=m$ ở trên được gọi là các *đường mức*.

Ví dụ 2: Cho x, y thỏa mãn điều kiện $2x + y \geq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P(x,y) = 8x^3 + y^3 + xy.$$

Phân tích bài toán bằng phương pháp đường mức kết hợp với phần mềm Desmos



Hình 3. Biểu diễn hình học miền điều kiện và đường mức của Ví dụ 2

Sử dụng phương pháp đường mức thể hiện như Hình 3 ta thấy giá trị nhỏ nhất của $P(x,y)$ đạt tại $x = \frac{1}{4}$ và $y = \frac{1}{2}$. Hơn nữa, nghiệm nằm trên đường thẳng $2x + y = 1$. Từ những điều này, ta rút ra hai kết luận:

(i) Có thể áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số $2x$ và y nghĩa là có thể thay $2xy$ bởi $(2x+y)^2$ mà không làm thay đổi giá trị nhỏ nhất của $P(x,y)$.

(ii) Có thể thay $2x + y = 1$ mà không làm thay đổi giá trị nhỏ nhất của $P(x,y)$.

Do đó ta sẽ phân tích $P(x,y)$ về dạng $A(2x+y)^3 - Bxy$ với B là số dương.

Từ những phân tích trên, ta có cách giải bài toán bằng phương pháp sơ cấp như sau.

Lời giải: Ta có:

$$P(x,y) = 8x^3 + y^3 + xy.$$

$$= (2x+y)^3 - 6xy\left[(2x+y) - \frac{1}{6}\right]$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số $2x$ và y rồi bình phương hai vế ta được

$$(2x+y)^2 \geq 4.2xy \Leftrightarrow -6xy \geq -\frac{6}{8}(2x+y)^2$$

Điều này có nghĩa là

$$-6xy(2x+y-1)$$
$$\geq -\frac{6}{8}(2x+y)^2(2x+y-1)$$
$$\geq -\frac{6}{8}(2x+y)^3 + \frac{6}{8}(2x+y)^2.$$

Do đó:

$$P(x,y) = (2x+y)^3 - 6xy\left[(2x+y) - \frac{1}{6}\right]$$
$$\geq (2x+y)^3 - \frac{6}{8}(2x+y)^3 + \frac{1}{8}(2x+y)^2$$
$$= \frac{1}{4}(2x+y)^3 + \frac{1}{8}(2x+y)^2 \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}.$$

Vậy $P(x,y) \geq \frac{3}{8}$ và dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 2x = y \\ 2x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Vậy min $P(x,y) = \frac{3}{8}$ tại $x = \frac{1}{4}$ và $y = \frac{1}{2}$.

Chú ý: (i) Bài toán trong Ví dụ 2 được trích từ đề thi môn Phương pháp tối ưu trong toán học phổ thông, thuộc chương trình đại học liên thông ngành Toán của Trường Đại học Đồng Tháp. Trong quá trình tham khảo kết quả của một số học viên, chúng tôi nhận thấy có hai sai lầm trong quá trình làm bài của học viên như sau:

Sai lầm 1: Từ bất đẳng thức $2x + y \geq 1$, người học lại rút ra $y = 1 - 2x$ rồi sau đó thay vào $P(x,y)$. Lập luận này rõ ràng là chưa chính xác.

Sai lầm 2: Từ bất đẳng thức $2x + y \geq 1$, người học lại rút ra $y \geq 1 - 2x$. Thay vào $P(x,y)$ như sau:

$$P(x,y) = 8x^3 + y^3 + xy$$
$$\geq 8x^3 + (1-2x)^3 + x(1-2x).$$

Lập luận này là không chính xác vì từ $2x + y \geq 1$ chưa thể khẳng định $x \geq 0$ và do đó không thể khẳng định $xy \geq x(1-2x)$ khi $y \geq 1 - 2x$.

(ii) Chúng ta có thể thay đổi miền ràng buộc hoặc hàm mục tiêu của bài toán trên để được bài toán khác với cách giải tương tự.

Ví dụ 3: Cho x, y thỏa mãn điều kiện $2x + y \geq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P(x,y) = 8x^3 + y^3 - xy$.

3. So sánh phương pháp đường mức với phương pháp Lagrange

Phương pháp Lagrange để giải bài toán tối ưu với ràng buộc hàm.

Xét bài toán (P): $\min f(x,y)$ sao cho

$$\begin{cases} g_i(x,y) \leq 0,\ \forall i = 1,\dots,m \\ h_j(x,y) = 0,\ \forall j = 1,\dots,s. \end{cases}$$

Hàm Lagrange:

$$L(x,y,\lambda_1,\dots,\lambda_n,\mu_1,\dots,\mu_s)$$
$$= f(x,y) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x,y) + \sum_{j=1}^{s} \mu_j h_j(x,y).$$

Mệnh đề 2 (Aragon, F. J *và cs.*, 2019, Định lý 6.38, 6.39)**.** Giả sử (x_0, y_0) là điểm KKT của bài toán (P), nghĩa là tồn tại $\lambda_1,\dots,\lambda_m \geq 0, \mu_1,\dots,\mu_s$ sao cho

$$\begin{cases} L'_x(x_0,y_0,\lambda_1,\dots,\lambda_m,\mu_1,\dots,\mu_s) = 0 \\ L'_y(x_0,y_0,\lambda_1,\dots,\lambda_m,\mu_1,\dots,\mu_s) = 0 \\ \lambda_i g_i(x_0,y_0) = 0, \forall i = 1,\dots,m \\ g_i(x_0,y_0) \leq 0, \forall i = 1,\dots,m \\ h_j(x_0,y_0) = 0, \forall j = 1,\dots,s. \end{cases}$$

Đặt $\nabla^2 L(x_0,y_0,\lambda_1,\dots,\lambda_m) =$

$$\begin{bmatrix} L'_{xx}(x_0,y_0,\lambda_1,\dots,\lambda_m) & L'_{xy}(x_0,y_0,\lambda_1,\dots,\lambda_m) \\ L'_{yx}(x_0,y_0,\lambda_1,\dots,\lambda_m) & L'_{yy}(x_0,y_0,\lambda_1,\dots,\lambda_m) \end{bmatrix}.$$

Khi đó:

i) Nếu $\nabla^2 L(x_0,y_0,\lambda_1,\dots,\lambda_m)$ xác định dương thì (x_0,y_0) là nghiệm của bài toán (P).

ii) Nếu $v\nabla^2 L(x_0,y_0,\lambda_1,\dots,\lambda_m)v > 0$ với mọi $v \neq 0$ thỏa mãn

$$\begin{cases} \left\langle \nabla g_i(x_0,y_0), v \right\rangle \leq 0, \forall i = 1,\dots,m, \\ \left\langle \nabla g_i(x_0,y_0), v \right\rangle = 0, \forall i \in I(x_0,y_0), \\ \left\langle \nabla h_j(x_0,y_0), v \right\rangle = 0, \forall j = 1,\dots,s, \end{cases}$$

trong đó

$I(x_0,y_0) = \{i \in \{1,2\} \mid g_i(x_0,y_0) = 0\}$ thì (x_0,y_0) là nghiệm của bài toán (P).

Sau đây, chúng tôi trình bày ví dụ để so sánh giữa hai phương pháp Lagrange và phương pháp đường mức có sự hỗ trợ của phần mềm Desmos trong bài toán bất đẳng thức.

Ví dụ 4: Cho x, y thỏa mãn

$$\begin{cases} g_1(x,y) = x^2 + y^2 - 4 \leq 0, \\ g_2(x,y) = y^2 - x + 1 \leq 0, \\ g_3(x,y) = -2y - x + 1 \leq 0. \end{cases}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x,y) = x^2 + (y+1)^2$.

Lời giải:

Cách 1: Sử dụng Phương pháp Lagrange.

Đặt $L(x,y,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$

$$= x^2 + (y+1)^2 + \lambda_1(x^2 + y^2 - 4)$$
$$+\lambda_2(y^2 - x + 1) + \lambda_3(-2y - x + 1).$$

Tồn tại $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \geq 0$ sao cho

$$\begin{cases} L'_x(x_0,y_0,\lambda_1,\lambda_2) = 2x + 2x\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ L'_y(x_0,y_0,\lambda_1,\lambda_2) = 2(y+1) + 2y\lambda_1 + 2y\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 g_1(x,y) = \lambda_1(x^2 + y^2 - 4) = 0. \\ \lambda_2 g_2(x,y) = \lambda_2(y^2 - x + 1) = 0 \\ \lambda_3 g_3(x,y) = \lambda_3(-2y - x + 1) = 0 \\ \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \geq 0 \end{cases}$$

Trường hợp 1: $\lambda_1 = 0$, ta được:

$$\begin{cases} 2x - \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 2(y+1) + 2y\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0. \\ \lambda_2(y^2 - x + 1) = 0 \\ \lambda_3(-2y - x + 1) = 0 \end{cases}$$

Trường hợp 1.1: $\lambda_3 = 0$, ta được:

$$\begin{cases} 2x - \lambda_2 = 0 \\ 2y(\lambda_2 + 1) + 2 = 0 \\ \lambda_2(y^2 - x + 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = 2x \\ 2y(2x + 1) + 2 = 0 \\ 2x(y^2 - x + 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} (\text{loại}) \\ \begin{cases} 2y + 4xy + 2 = 0 \\ y^2 - x + 1 = 0 \end{cases} \end{array}\right. .$$

Trường hợp 1.2: $\lambda_3 \neq 0$.

Khi đó $-2y - x + 1 = 0$. Điều này tương đương với $x = 1 - 2y$. Thay vào hệ trên ta được:

$$\begin{cases} 2(1 - 2y) - \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 2y(\lambda_2 + 1) + 2 - 2\lambda_3 = 0. \\ \lambda_2(y^2 - 2y) = 0 \ (*) \end{cases}$$

Từ $(*)$ ta có $\lambda_2 y(y - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_2 = 0 \\ y = 0 \\ y = -2 \end{array}\right.$.

Với $\lambda_2 = 0$, ta được $\begin{cases} 2(1 - 2y) - \lambda_3 = 0 \\ 2y + 2 - 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4y + \lambda_3 = 2 \\ 2y - 2\lambda_3 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_3 = \dfrac{6}{5} \\ \begin{cases} y = \dfrac{1}{5} \\ x = \dfrac{3}{5} \end{cases} \end{array}\right. (\text{loại}).$$

Với $y = 0 \Rightarrow x = 1$, ta có

$$\begin{cases} 2 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 2 - 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 1 \end{cases}.$$

Với $y = -2 \Rightarrow x = 5$, ta có

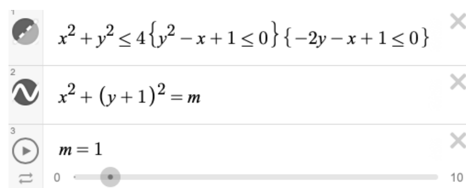
$$\begin{cases} 10 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = -11 \\ \lambda_3 = 21 \end{cases} (\text{loại}).$$

Tương tự, như vậy ta xét các trường hợp còn lại. Bằng tính toán trực tiếp, ta có $\nabla^2 L(1,0,1,1)$ là ma trận xác định dương. Vậy giá trị nhỏ nhất của $f(x,y) = 2$ tại $x = 1$ và $y = 0$.

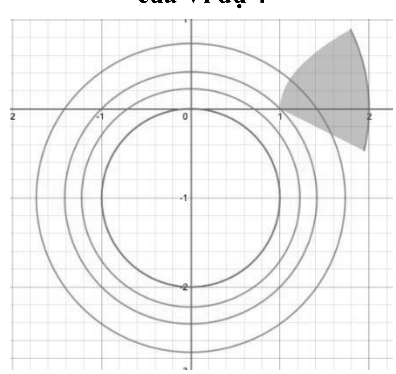
Nhận xét: Trong bài toán trên, việc giải các hệ phương trình là khá phức tạp vì phải xét nhiều trường hợp. Do đó người làm sẽ mất khá nhiều thời gian và phải rất cẩn thận nếu không sẽ dễ mắc sai lầm. Hơn nữa, phương pháp nhân tử Lagrange không phù hợp để giới thiệu với học sinh vì sử dụng kiến thức ngoài bậc học phổ thông.

Cách 2: Dự đoán nghiệm bằng phương pháp đường mức kết hợp với phần mềm Desmos.

Trước tiên, vẽ các đường mức $f(x,y) = m$ và miền ràng buộc của bài toán bằng phần mềm Desmos ta sẽ được kết quả như Hình 4.



Hình 4. Kết quả nhập điều kiện và đường mức của Ví dụ 4



Hình 5. Biểu diễn hình học miền điều kiện và đường mức của Ví dụ 4

Từ Hình 5 ta thấy rằng, nghiệm bài toán (điểm rơi bất đẳng thức) đạt tại $x = 1$ và $y = 0$. Hơn nữa, miền ràng buộc thỏa mãn $x \geq 1$ nghĩa là $x^2 - x \geq 0$. Từ những phân tích trên ta có lời giải sau:

Từ $-2y - x + 1 \leq 0$ ta suy ra $x + 2y \geq 1$.

Ta có $f(x,y) = x^2 + (y+1)^2$
$$= x^2 + y^2 + 2y + x - x + 1$$
$$\geq x^2 + y^2 - x + 2.$$
Dễ dàng nhận thấy rằng
$x^2 + y^2 - x + 2 \geq x^2 - x + 2$.
Dấu "=" xảy ra khi $y = 0$.
Ta có: $y^2 - x + 1 \leq 0$.
Suy ra $x \geq 1 + y^2 \geq 1$.
Từ đó ta có $x^2 - x + 2 \geq 2$.
Dấu "=" xảy ra khi $x^2 - x = 0$. Do đó:
$$f(x,y) \geq x^2 + y^2 - x + 2$$
$$\geq x^2 - x + 2 \geq 2.$$
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ y^2 = 0 \\ x^2 - x = 0 \end{cases}$.

Điều này tương đương với $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$.

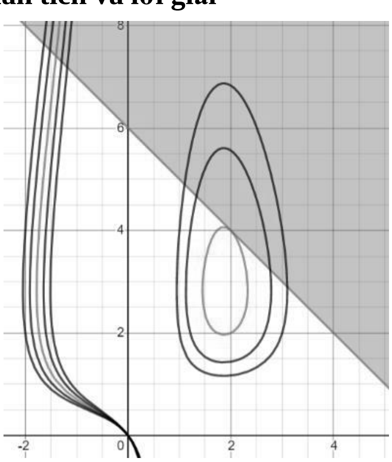
Vậy giá trị nhỏ nhất của $f(x,y) = 2$ tại $x = 1$ và $y = 0$.

4. Áp dụng vào giải một số bài toán bất đẳng thức ở phổ thông

Ví dụ 5: (Đề thi học sinh giỏi lớp 9 huyện Diễn Châu năm 2020-2021)

Cho x, y là hai số dương thỏa mãn $x + y \geq 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$$Q = x^2 - 2x + y + \frac{6}{x} + \frac{8}{y}.$$

Phân tích và lời giải



Hình 6. Biểu diễn hình học miền điều kiện và đường mức ở Ví dụ 5

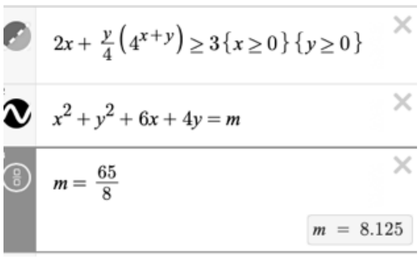
Từ Hình 6 các tập mức và miền xác định ta thấy Q đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 2$ và $y = 4$. Hơn nữa, giá trị nhỏ nhất này nằm trên đường thẳng $x + y = 6$. Vì vậy ta sẽ kết hợp $\frac{6}{x}$ với $\frac{3x}{2}$ và $\frac{8}{y}$ với $\frac{y}{2}$, đồng thời phân tích bài toán về dạng $Q = (x-2)^2 + a(x+y) + \left(\frac{3x}{2} + \frac{6}{x}\right)$
$$+ \left(\frac{y}{2} + \frac{8}{y}\right) + b,$$
với $a > 0$. Vì vậy ta có lời giải như sau:
$$Q = x^2 - 2x + y + \frac{6}{x} + \frac{8}{y}$$
$$= x^2 - 4x + \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right) + \left(\frac{3x}{2} + \frac{6}{x}\right) + \left(\frac{y}{2} + \frac{8}{y}\right).$$
Ta có $\frac{1}{2}(x+y) \geq 3$.
$$\frac{3x}{2} + \frac{6}{x} \geq 2\sqrt{\frac{3x}{2}.\frac{6}{x}} = 6.$$
$$\frac{y}{2} + \frac{8}{y} \geq 2\sqrt{\frac{y}{2}.\frac{8}{y}} = 4.$$
Nên suy ra $Q = (x-2)^2 - 4 + \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right)$
$$+ \left(\frac{3x}{2} + \frac{6}{x}\right) + \left(\frac{y}{2} + \frac{8}{y}\right)$$
$$\geq -4 + 3 + 6 + 4 = 9.$$
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi
$$\begin{cases} x - 2 = 0 \\ x + y = 6 \\ \frac{3x}{2} = \frac{6}{x} \\ \frac{y}{2} = \frac{8}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$
Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức Q = 9 tại $x = 2$ và $y = 4$.

Ví dụ 6: (Đề thi THPT Quốc gia năm 2020 môn Toán, Mã đề 102)

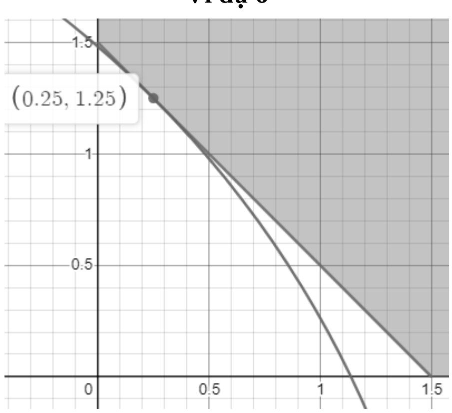
Cho x, y là các số thực không âm thỏa mãn $2x + y.4^{x+y-1} \geq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = x^2 + y^2 + 6x + 4y.$$

Sử dụng phương pháp đường mức phân tích bài toán:



Hình 7. Kết quả nhập điều kiện và đường mức Ví dụ 6



Hình 8. Biểu diễn hình học miền điều kiện và đường mức Ví dụ 6

Sử dụng phương pháp đường mức kết hợp với desmos.com như Hình 7, 8 ta có thể thấy miền điều kiện bài toán tương đương với $x + y \geq \frac{3}{2}$ và giá trị nhỏ nhất của P đạt tại $x = \frac{1}{4}, y = \frac{5}{4}$. Do đó, ta có thể phân tích P về dạng $\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{4}\right)^2 + a(x + y) + b,$ với a là số dương.

Từ đó, ta có lời giải bài toán như sau:

Lời giải:

Ta có: $2x + y.4^{x+y-1} \geq 3$ điều này tương đương với $2y.2^y \geq (3 - 2x)^{3-2x}$.

Điều này suy ra: $2y \geq 3 - 2x$ nghĩa là $2(x + y) \geq 3$. Do đó

$$\mathrm{P} = x^2 + y^2 + 6x + 4y$$

$$= \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{13}{2}(x + y) - \frac{13}{8}$$

$$\geq \frac{65}{8}.$$

Dấu "$=$" xảy ra khi $x = \frac{1}{4}, y = \frac{5}{4}$. □

Nhận xét: Rõ ràng rằng, nếu không có sự hỗ trợ của phần mềm toán học thì không dễ để nhìn thấy rằng miền ràng buộc của bài toán trên tương đương với điều kiện $x + y \geq \frac{3}{2}$.

Các ví dụ nêu trên là các bài toán về tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức có hai biến, đó là một dạng toán tìm điểm rơi của bất đẳng thức. Sau đây, chúng tôi chọn một ví dụ về bất đẳng thức ba biến là đề thi tuyển 10 để minh hoạ sự hiệu quả của phương pháp không chỉ đối với các bài toán hai biến mà trong một số trường hợp có thể áp dụng hiệu quả cho bài toán ba biến.

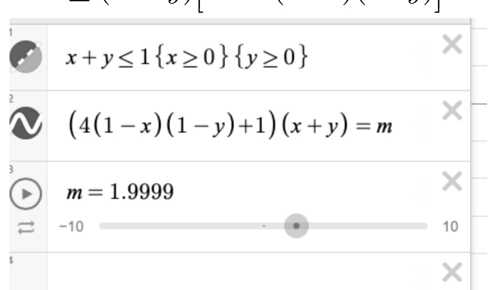
Ví dụ 7: (Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 môn Toán năm học 2017-2018, Hà Tĩnh) Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng

$$x + y + 2z \geq 4(1-x)(1-y)(1-z).$$

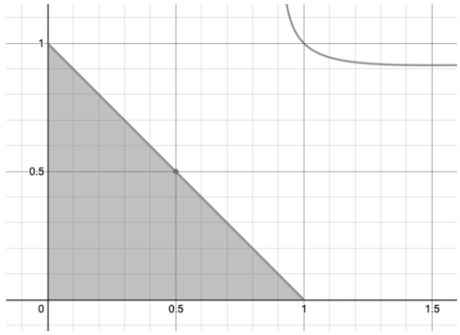
Phân tích và tìm lời giải:

Ta đưa bài toán trên về bài toán sau. Cho x, y là các số thực không âm thỏa mãn $x + y \leq 1$. Chứng minh rằng:

$$2 \geq (x + y)\left[1 + 4(1-x)(1-y)\right].$$



Hình 9. Kết quả nhập điều kiện và đường mức Ví dụ 7



Hình 10. Biểu diễn hình học miền điều kiện và đường mức Ví dụ 7

Sử dụng phương pháp đường mức kết hợp desmos.com ta dự đoán được nghiệm $x = y = \dfrac{1}{2}$. Vì vậy ta có thể giải bài toán trên như sau:

Đặt $t = x + y$. Khi đó $0 \le t \le 1$. Ta có:

$$\begin{aligned}
&(x+y)\left[1+4(1-x)(1-y)\right]\\
&\le (x+y)\left[5-4(x+y)+(x+y)^2\right]\\
&= t^3 - 4t^2 + 5t\\
&= (t-1)^3 - (t-1)^2 + 2\\
&= (t-1)^2(t-2) + 2 \le 2.
\end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = y = \dfrac{1}{2}$. $\square$

5. Kết luận

Trong bài báo này, chúng tôi đã giới thiệu phương pháp đường mức kết hợp với phần mềm Desmos hay website desmos.com để dự đoán nghiệm (điểm rơi bài toán bất đẳng thức) cũng như phân tích, tìm lời giải sơ cấp cho một số dạng bài toán bất đẳng thức. Phương pháp này không nhằm vào mục tiêu giải quyết các bài toán khó về bất đẳng thức mà nhằm đơn giản hoá một số bài toán để đa số học sinh có thể cảm nhận và giải được các bài toán này, góp phần giúp học sinh thích thú hơn khi học các nội dung về bất đẳng thức.

Ngoài phần mềm Desmos hay website desmos.com, một số phần mềm có tính năng tượng tự như Geogebra cũng có thể được sử dụng. Hơn nữa, với các phần mềm vẽ hình 3D với tính năng tương tự, chúng ta có thể sử dụng phương pháp này để định hướng, tìm lời giải cho các bài toán bất đẳng thức có ba biến. Đây là vấn đề cần được tiếp tục nghiên cứu.

Lời cảm ơn: Nghiên cứu này được hỗ trợ bởi đề tài nghiên cứu khoa học của sinh viên Trường Đại học Đồng Tháp mã số SPD2020.02.04.

Tài liệu tham khảo

Aragon, F. J, Goberna, M. A, Lopez, M. A., & Rodriguez, M. M. L. (2019). *Nonlinear Optimization*. Springer Nature Switzerland AG.

Bộ Giáo dục và Đào tạo. (2018). *Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán*.

Cinlar, E., & Vanderbei, R. J. (2013) *Real and convex analysis*. Springer New York Heidelberg Dordrecht London.

Đặng, T. N. (2018). *Khám phá tư duy kỹ thuật giải bất đẳng thức, bài toán Min-Max*. Hà Nội: NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.

Gregoire, A., Francois, J., & Anca, T. M. (2002). A level-set method for shape optimization. *Comptes Rendus Mathematique, 334*(12), 1125-1130). DOI:10.1016/S1631-073X(02)02412-3.

Mitrinovic, D. S. (1964). *Elementary inequalities*. Noordhoff LTD - Groningen, The Netherlands.

Nguyễn, N. Đ., & Nguyễn, T. M. H. (2015). Dùng bất đẳng thức cosi để tìm cực trị trong đại số và hình học. *Tạp chí Giáo dục, tháng 4* (đặc biệt), 73-75.

Nguyễn, T. H. (2009*). Các bài toán về giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.* Hà Nội: NXB Giáo dục.

Nguyễn, V. M. (2005). *Bất đẳng thức định lý và áp dụng*. Hà Nội: NXB Giáo dục.

Nguyễn, V. L. (2018). *Các bài giảng về bất đẳng thức Cosi*. Hà Nội: NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.

Stanley, O. J., & Fadil, S. (2001). Level Set Methods for Optimization Problems Involving Geometry and Constraints I. Frequences of a Two-Density Inhomogeneous Drum. *Journal of Computational Physics, 171*(1), 272-288. DOI: 10.1006/jcph.2001.6789

Trần, P. (2009). *Những viên kim cương trong chứng minh bất đẳng thức.* Hà Nội: NXB Tri thức.

Trần, Q. Đ., & Bùi, V. N. (2017). Hướng dẫn học sinh lớp 12 khám phá lời giải bài toán về giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức. *Tạp chí Giáo dục, kì 1-tháng 1*(397), 47-50.