SỰ HỘI TỤ CỦA DÃY LẶP LAI GHÉP CHO ÁNH XẠ TỰA ϕ-KHÔNG GIÃN TIỆM CẬN VÀ BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC TỰA BIẾN PHÂN HỖN HỢP TỔNG QUÁT TRONG KHÔNG GIAN BANACH

Nguyễn Tóp Ti[1*] và Nguyễn Trung Hiếu[2]

[1]*Sinh viên, Khoa Sư phạm Toán - Tin, Trường Sư phạm, Trường Đại học Đồng Tháp, Việt Nam*

[2]*Khoa Sư phạm Toán - Tin, Trường Sư phạm, Trường Đại học Đồng Tháp, Việt Nam*

[*]*Tác giả liên hệ: Nguyễn Tóp Ti, Email: nguyentopti0209@gmail.com*

Lịch sử bài báo

Ngày nhận: 14/10/2024; Ngày nhận chỉnh sửa: 13/11/2024; Ngày duyệt đăng: 29/11/2024

Tóm tắt

Trong bài báo này, chúng tôi giới thiệu một dãy lặp lai ghép để xấp xỉ điểm chung của tập điểm bất động của ánh xạ tựa ϕ-không giãn tiệm cận và tập nghiệm bài toán bất đẳng thức tựa biến phân hỗn hợp tổng quát. Sau đó, chúng tôi chứng minh sự hội tụ của dãy lặp này trong không gian Banach. Đồng thời, chúng tôi xây dựng ví dụ minh họa cho sự hội tụ của dãy lặp.

Từ khóa: *ánh xạ tựa ϕ-không giãn tiệm cận, bài toán bất đẳng thức tựa bất đẳng thức biến phân hỗn hợp tổng quát, dãy lặp lai ghép.*

ONVERGENCE OF A HYBRID ITERATIVE PROCESS FOR ASYMPTOTICALLY QUASI ϕ-NONEXPANSIVE MAPPINGS AND GENERALIZED MIXED VARIATIONAL-LIKE INEQUALITY PROBLEMS IN BANACH SPACES

Nguyen Top Ti[1*] và Nguyen Trung Hieu[2]

[1]*Student, Faculty of Mathematics - Informatics Teacher Education, School of Education, Dong Thap University, Cao Lanh 870000, Vietnam*

[2]*Faculty of Mathematics - Informatics Teacher Education, School of Education, Dong Thap University, Cao Lanh 870000, Vietnam*

[*]*Corresponding author: Nguyen Top Ti, Email: nguyentopti0209@gmail.com*

Article history

Received: 14/10/2024; Received in revised form: 13/11/2024; Accepted: 29/11/2024

Abstract

In this paper, we introduce a hybrid iterative process for approximating common elements of fixed points of asymptotically quasi ϕ-nonexpansive mappings and solutions of generalized mixed variational-like inequality problems. Then, we prove a strong convergence result for the proposed iteration in Banach spaces with a numerical example to illustrate this point.

Keywords: *asymptotically unexpanded quasi ϕ-mapping, generalized mixed variational-like inequality problem, hybrid iterative process.*

DOI: https://doi.org/10.52714/dthu.14.2.2025.1436

Trích dẫn: Nguyễn, T. T., & Nguyễn, T. H. (2025). Sự hội tụ của dãy lặp lai ghép cho ánh xạ tựa ϕ-không giãn tiệm cận và bài toán bất đẳng thức tựa biến phân hỗn hợp tổng quát trong không gian Banach. *Tạp chí Khoa học Đại học Đồng Tháp*, *14*(2), 52-64. https://doi.org/10.52714/dthu.14.2.2025.1436

1. Giới thiệu

Nhiều vấn đề trong toán học và những ngành khoa học kĩ thuật dẫn đến việc giải bài toán EP sau: "*Tìm điểm* $x \in K$ *sao cho* $\psi(x,y) \geq 0$ *với mọi* $y \in K$*, trong đó* K *là tập lồi, đóng và* $\psi : K \times K \to \mathbb{R}$ *là hàm hai biến*". Bài toán EP được gọi là *bài toán cân bằng* và được giới thiệu bởi Muu và Oettli vào năm 1992 (Muu & Oettli, 1992). Sau đó, một số điều kiện cho sự tồn tại nghiệm của bài toán EP đã được thiết lập bởi Blum và Oettli (Blum & Oettli, 1994), Noor và Oettli (Noor & Oettli, 1994). Bài toán EP là bài toán tổng quát của nhiều mô hình toán học như bài toán tối ưu, bài toán bất đẳng thức biến phân và bài toán điểm bất động. Bài toán EP được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu theo nhiều hướng khác nhau, trong đó có hướng nghiên cứu sự tồn tại nghiệm, tính chất của tập nghiệm và phương pháp giải. Một kỹ thuật quan trọng trong phương pháp giải những lớp bài toán EP là xây dựng dãy lặp và khảo sát sự hội tụ của dãy lặp này đến nghiệm của bài toán cân EP hoặc đến hình chiếu của điểm xuất phát lên tập nghiệm của những lớp bài toán EP. Bên cạnh đó, vấn đề tìm điểm chung của tập nghiệm những lớp bài toán EP và tập điểm bất động của ánh xạ phi tuyến cũng được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu. Trong hướng nghiên cứu này, nhiều dãy lặp để xấp xỉ điểm chung của bài toán EP và tập điểm bất động của những lớp ánh xạ không giãn suy rộng trong không gian Hilbert và không gian Banach đã được thiết lập (Tada & Takahashi, 2007; Takahashi & Takahashi, 2007; Takahashi & Zembayashi, 2009).

Gần đây, bài toán EP được tổng quát theo nhiều hướng khác nhau. Một trong những cách tiếp cận là mở rộng từ hàm hai biến $\psi(x,y)$ trong bài toán EP sang hàm ba biến $\psi(x,y,z)$. Năm 2019, Mahato và cộng sự (Mahato & cs., 2019) đã nghiên cứu sự tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán "*Tìm điểm* $x \in K$ *sao cho* $\psi(y,x,x) \geq 0$ *với mọi* $y \in K$*, trong đó* K *là tập lồi, đóng và* $\psi : K \times K \times K \to \mathbb{R}$ *là hàm ba biến*", đồng thời các tác giả cũng giới thiệu phương pháp lặp để tìm điểm chung của tập điểm bất động của họ đếm được các ánh xạ tựa ϕ-không giãn và tập nghiệm của họ hữu hạn bài toán cân bằng ba biến này, một số kết quả hội tụ đã được thiết lập. Năm 2019, Kazmi và Ali (Kazmi & Ali, 2019) đã giới thiệu một tổng quát của bài toán cân bằng hàm ba biến trong (Mahato & cs., 2019) và được gọi là *bài toán bất đẳng thức tựa biến phân hỗn hợp suy rộng* (GMVLIP). Bài toán GMVLIP được xem như là một dạng bài toán cân bằng ba biến tổng quát và được phát biểu như sau: "*Tìm điểm* $x \in K$ *sao cho*

$$\psi(y,x,x) + b(x,y) - b(x,x) \geq 0$$

với mọi $y \in K$*, trong đó* K *là tập lồi, đóng,* $\psi : K \times K \times K \to \mathbb{R}$ *là hàm ba biến và* $b : K \times K \to \mathbb{R}$ *là hàm hai biến*". Đồng thời, Kazmi và Ali (Kazmi & Ali, 2019) cũng nghiên cứu sự tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán GMVLIP đồng thời đề xuất phương pháp lặp để tìm điểm chung của tập điểm bất động của họ hữu hạn những ánh xạ tựa ϕ-không giãn tiệm cận và tập nghiệm của họ hữu hạn bài toán GMVLIP. Năm 2021, Farid và cộng sự (Farid & cs., 2021) đã giới thiệu dãy lặp lai ghép có yếu tố quán tính để nghiên cứu điểm chung của tập nghiệm bài toán GMVLIP, tập nghiệm bài toán bất đẳng thức biến phân và tập điểm bất động của ánh xạ tựa ϕ-không giãn tiệm cận trong không gian Banach. Kết quả này được xem như là một cải tiến và tổng quát những kết quả hội tụ của dãy lặp từ bài toán EP sang bài toán GMVLIP.

Trong bài báo bày, chúng tôi kết hợp số hạng có yếu tố quán tính, dãy lặp hai bước được đề xuất bởi Thianwan và Yambangwai (2019), phép chiếu suy rộng trong không gian Banach để giới thiệu một dãy lặp lai ghép để xấp xỉ điểm chung của tập điểm bất động của ánh xạ tựa ϕ-không giãn tiệm cận và tập nghiệm bài toán bất đẳng thức tựa biến phân hỗn hợp tổng quát. Sau đó, chúng tôi chứng minh sự hội tụ của dãy lặp này trong không gian Banach. Đồng thời, chúng tôi xây dựng ví dụ minh họa cho sự hội tụ của dãy lặp.

2. Một số khái niệm và kết quả cơ bản trong không gian Banach

Cho E là không gian Banach trơn và E^* là không gian liên hợp của E. Với mọi $x \in E,$ ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc $J : E \to 2^{E^*}$ được xác định bởi $Jx = \{x^* \in E^* : \langle x^*, x\rangle = \| x \|^2 = \| x^* \|^2\}$. Xét phiếm hàm Lyapunov $\phi : E \times E \to \mathbb{R}$ được xác định bởi

$$\phi(x,y) = \| x \|^2 - 2\langle x, Jy\rangle + \| y \|^2, \forall x,y \in E.$$

Sau đây, chúng tôi sẽ trình bày một số tính chất của phiếm hàm Lyapunov.

Nhận xét 2.1 Với mọi $x,y,z \in E$, ta có

(1) $(\| x \| - \| y \|)^2 \leq \phi(x,y) \leq (\| x \| + \| y \|)^2.$

(2) $\phi(x,y) = \phi(x,z) + \phi(z,y) + 2\langle x - z, Jz - Jy\rangle.$

(3) $\phi(x, J^{-1}(\lambda Jy + (1-\lambda)Jz))$
$\leq \lambda\phi(x,y) + (1-\lambda)\phi(x,z), \forall \lambda \in [0,1]$

(4) $\phi(x,y) = \| x \| . \| Jx - Jy \|$
$+ \| y \| . \| x - y \|.$

(5) $\phi(x,y) = \phi(x,z) + \phi(z,y)$
$+2\langle x - z, Jz - Jy\rangle.$

(6) $\phi(x,y) = \langle x, Jx - Jy\rangle + \langle y - x, Jy\rangle$
$\leq \| x \| . \| Jx - Jy \| + \| x - y \| . \| y \|.$

Bổ đề 2.2 (Kamimura & Takahashi, 2002, Mệnh đề 2). Cho E là không gian Banach lồi và trơn, $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ là hai dãy trong E sao cho $\{x_n\}$ hoặc $\{y_n\}$ bị chặn. Khi đó, nếu $\lim_{n\to\infty}\phi(x_n, y_n) = 0$ thì $\lim_{n\to\infty} || x_n - y_n ||= 0$.

Kí hiệu $F(S) = \{x \in K : Sx = x\}$ là tập hợp điểm bất động của ánh xạ $S : K \to K$.

Định nghĩa 2.3 Cho E là không gian Banach trơn, K là tập con khác rỗng của E và ánh xạ $S : K \to K$. Khi đó

(1) (Qin & cs., 2009, tr.1052) S được gọi là *tựa ϕ -không giãn* nếu $F(S) \neq \varnothing$ với mọi $p \in F(S)$ và $x \in K$ ta có $\phi(p, Sx) \leq \phi(p, x)$.

(2) (Qin & cs., 2010, tr.3876) S được gọi là *tựa ϕ -không giãn tiệm cận* nếu tồn tại dãy số thực $\{t_n\}$ thoả mãn $t_n \geq 1, \lim_{n\to\infty} t_n = 1$ và $F(S) \neq \varnothing$ sao cho $\phi(p, S^n x) \leq t_n \phi(p, x)$ với mọi $n \geq 1$, $x \in K$ và $p \in F(S)$.

(3) (Anh & Hieu, 2015, Định nghĩa 2) S được gọi là *đóng* nếu với mọi dãy $\{u_n\} \subset K$ thoả mãn $\lim_{n\to\infty} u_n = a$ và $\lim_{n\to\infty} Su_n = b$ thì $Sa = b$.

(4) (Kazmi & Ali, 2019, Định nghĩa 2.2) S được gọi là *chính quy tiệm cận đều* trên K nếu với mọi tập con bị chặn $A \subset K$ ta có

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{a\in A} || S^{n+1}a - S^n a ||= 0.$$

Bổ đề 2.4 (Hao, 2013, Bước 1 trong chứng minh của Định lí 2.1). *Cho E là không gian Banach phản xạ, lồi và trơn sao cho E và E^* có tính chất Kadec-Klee, K là một tập con đóng khác rỗng của E và ánh xạ $S : K \to K$ là đóng và tựa ϕ -không giãn tiệm cận. Khi đó $F(S)$ là tập con đóng và lồi của K.*

Phép chiếu suy rộng trong không gian Banach, được kí hiệu bởi Π_K, là một mở rộng của phép chiếu metric trong không gian Hilbert. Phép chiếu suy rộng trong không gian Banach có một số tính chất cơ bản sau.

Bổ đề 2.5 (Alber, 1996, tr.15 – 50). *Cho E là không gian Banach phản xạ và lồi đều và K là tập con khác rỗng của E. Khi đó với mọi $x \in E$ và $y, z \in K$ ta có*

$$z = \Pi_K x \Leftrightarrow \langle z - y, Jx - Jz\rangle \leq 0.$$

Bổ đề 2.6 (Alber, 1996, tr.15 – 50). *Cho E là không gian Banach phản xạ, lồi và trơn. K là tập con lồi, đóng và khác rỗng của E. Khi đó với mọi $x \in K$ và $y \in E$ ta có*

$$\phi(x, \Pi_K y) + \phi(\Pi_K y, y) \leq \phi(x, y).$$

Tiếp theo, chúng tôi giới thiệu một số kết quả liên quan đến nghiệm bài toán GMVLIP.

Định nghĩa 2.7 (Preda & cs., 2007, tr.417). Cho E là không gian Banach phản xạ và K là tập con khác rỗng của E. Hàm $\psi : K \times K \times K \to \mathbb{R}$ được gọi là α-đơn điệu yếu suy rộng nếu tồn tại hàm $\alpha : E \times E \to \mathbb{R}$ sao cho với $x, y \in K$ ta có

$$\psi(y, x, y) - \psi(y, x, x) \leq \alpha(x, y)$$

với $\lim_{t\to 0} \dfrac{\alpha(x, ty + (1-t)x)}{t} = 0$.

Tiếp theo, ta xét các giả thiết sau:

(H1) E là không gian Banach phản xạ, lồi ngặt, trơn đều, E^* là không gian đối ngẫu của E sao cho E và E^* có tính chất Kadec-Klee, K là tập con lồi, đóng, khác rỗng của E.

(H2) $\psi : K \times K \times K \to \mathbb{R}$ là hàm ba biến, $\alpha : K \times K \to \mathbb{R}$ là hàm hai biến, hàm $b : K \times K \to \mathbb{R}$ là lồi và liên tục thỏa mãn

$$b(x, x) - b(x, y) - b(y, x) + b(y, y) \geq 0.$$

Xét bài toán 2.1: Tìm $x \in K$ sao cho

$$\psi(y, x, x) + \frac{1}{r}\langle y - x, Jx - Jz\rangle + b(x, y) - b(x, x) \leq 0, \ \forall y \in K.$$

Bổ đề 2.8 (Kazmi & Ali, 2019, Định lí 3.2)**.** *Giả sử các giả thiết (H1) – (H2) được thỏa mãn và*

(1) $\psi(y, x, .)$ là nửa liên tục trên.

(2) $\psi(., x, z)$ là lồi và nửa liên tục dưới.

(3) $\psi(x, y, z) + \psi(y, x, z) = 0$.

(4) ψ là α-đơn điệu yếu suy rộng.

(5) $\alpha(., y)$ là nửa liên tục dưới.

Khi đó, Bài toán 2.1 có nghiệm.

Kí hiệu: Ω là tập nghiệm của Bài toán GMVLIP: *Tìm điểm $x \in K$ sao cho*

$$\psi(y, x, x) + b(x, y) - b(x, x) \geq 0, \ \forall y \in K.$$

Bổ đề 2.9 (Kazmi & Ali, 2019, Bổ đề 3.3.). Giả sử các *giả thiết của Bổ đề 2.8 được thỏa mãn, $\alpha(x, y) + \alpha(y, x) \geq 0$ với mọi $x, y \in K$. Với $r > 0$, xét ánh xạ $T_r : E \to K$ xác định bởi:*

$$T_r x = \{z \in K : \psi(y, z, z) + \frac{1}{r}\langle y - z, Jz - Jx\rangle + b(z, y) - b(z, z) \leq 0, \forall\ y \in K$$

với mọi $x \in E$. Khi đó

(1) $T_r x$ *là ánh xạ đơn trị.*

(2) $\langle T_r x - T_r y, JT_r x - Jx\rangle \le \langle T_r x - T_r y, JT_r y - Jy\rangle.$

(3) $F(T_r) = \Omega$.

(4) $\phi(q, T_r x) + \phi(T_r x, x) \le \phi(q, x),\ \forall q \in F(T_r),\ x \in E$.

(5) Ω *là tập đóng và lồi.*

(6) T_r *là ánh xạ tựa* ϕ *-không giãn.*

(7) $\phi(p, T_r x) \le \phi(p, x),\ \forall p \in F(T_r)$.

Bổ đề sau được sử dụng trong chứng minh kết quả chính.

Bổ đề 2.10 (Yang & cs., 2012, tr.6072 – 6082). Cho E là không gian Banach lồi đều, $r > 0$ và $B[0,r]$ là hình cầu đóng của E. Khi đó, với mọi dãy $\{x_n\} \subset B[0,r]$ và dãy $\{\lambda_n\}$ các số dương thỏa mãn $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n = 1$, tồn tại hàm $g_r : [0, 2r \to [0, \infty$ lồi, liên tục và tăng ngặt với $g_r(0) = 0$ sao cho với mọi $i, j \in \mathbb{N}, i < j$ ta có

$$\|\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n x_n\|^2 \le \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n \|x_n\|^2 - \lambda_i\lambda_j g_r(\|x_i - x_j\|).$$

3. Kết quả chính

Trước hết, chúng tôi kết hợp số hạng có yếu tố quán tính, dãy lặp hai bước được đề xuất bởi Thianwan và Yambangwai (2019), phép chiếu suy rộng trong không gian Banach để giới thiệu một dãy lặp lai ghép để xấp xỉ điểm chung của tập điểm bất động của ánh xạ tựa ϕ-không giãn tiệm cận và tập nghiệm bài toán bất đẳng thức tựa biến phân hỗn hợp tổng quát. Sau đó, chúng tôi chứng minh sự hội tụ của dãy lặp này trong không gian Banach.

Xét các giả thiết sau:

(H3) Các ánh xạ $\alpha : K \times K \to \mathbb{R}$, $\psi : K \times K \times K \to \mathbb{R}$ và $b : K \times K \to \mathbb{R}$ thỏa mãn các giả thiết của Bổ đề 2.8, Bổ đề 2.9 và $\psi(y, ., y)$ liên tục.

(H4) Với mỗi $i = 1, 2$, $S_i : K \to K$ là đóng, chính quy tiệm cận trên K và là ánh xạ tựa ϕ-không giãn tiệm cận với dãy $\{t_n^{(i)}\} \subset [1, \infty), \lim_{n\to\infty} t_n^{(i)} = 1$, tập $F(S_i)$ bị chặn trong K, nghĩa là tồn tại $\zeta > 0$ sao cho $F(S_i) \subset \{x \in K : \|x\| \le \zeta\}$ và $\mathcal{F} = F(S_1) \cap F(S_2) \cap \Omega \ne \varnothing$.

Định lí 3.1. Giả sử các giả thiết (H1) - (H4) được thỏa mãn. Xét dãy lặp $\{u_n\}$ được xác định bởi:

$$\begin{cases} u_1, u_2 \in K, \Omega_1 = \Omega_2 = K \\ z_n = u_n + c_n(u_n - u_{n-1}) \\ v_n = J^{-1}((1-b_n)Jz_n + b_n JS_1^n z_n) \\ w_n = J^{-1}((1-a_n)JS_1^n v_n + a_n JS_2^n v_n) \\ y_n = T_{r_n} w_n \\ \Omega_{n+1} = \{z \in \Omega_n : \phi(z, y_n) \le \phi(z, z_n) + \xi_n\} \\ u_{n+1} = \Pi_{\Omega_{n+1}} u_1 \end{cases} \quad (3.1)$$

trong đó, $\xi_n = (t_n - 1)(1 + t_n b_n)(\zeta + \|z_n\|)^2$, $\{a_n\}$, $\{b_n\} \subset [0,1]$ sao cho $\liminf_{n\to\infty} b_n(1-b_n) > 0$, $\liminf_{n\to\infty} a_n(1-a_n) > 0$, $r_n \in [\delta, \infty)$ với $\delta > 0$ và $c_n \subset (0,1)$.

Khi đó, dãy $\{u_n\}$ hội tụ đến $u^* = \Pi_{\mathcal{F}} u_1$.

Chứng minh. Phép chứng minh của Định lí được chia thành 6 bước sau:

Bước 1. *Chứng minh phép chiếu* $\Pi_{\mathcal{F}} u_1$ *xác định.* Thật vậy, theo Bổ đề 2.4 ta có $F(S_1), F(S_2)$ là tập đóng và lồi. Mặt khác, theo Bổ đề 2.9(5) ta có Ω là đóng và lồi . Do đó $\mathcal{F} = F(S_1) \cap F(S_2) \cap \Omega$ là tập đóng và lồi trong K. Hơn nữa, theo giả thiết ta có $\mathcal{F}$ là tập khác rỗng. Vậy phép chiếu $\Pi_{\mathcal{F}} u_1$ xác định.

Bước 2. *Chứng minh phép chiếu* $\Pi_{\Omega_{n+1}} u_1$ *xác định.* Từ định nghĩa của Ω_{n+1}, ta có

$$\begin{aligned} \Omega_{n+1} &= \{z \in \Omega_n : \phi(z, y_n) \le \phi(z, z_n) + \xi_n\} \\ &= \{z \in \Omega_n : \|z\|^2 - 2\langle z, Jy_n\rangle + \|y_n\|^2 \\ &\le \|z\|^2 - 2\langle z, Jz_n\rangle + \|z_n\|^2 + \xi_n\} \\ &= \{z \in \Omega_n : 2\langle z, Jz_n - Jy_n\rangle \\ &\le \|z_n\|^2 - \|y_n\|^2 + \xi_n\} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Ta chứng minh Ω_{n+1} là tập đóng với mọi $n \in \mathbb{N}$ bằng phương pháp quy nạp. Với $n = 0,1$ ta có $\Omega_1 = \Omega_2 = K$

. Vì K là tập đóng nên Ω_1, Ω_2 là tập đóng. Giả sử Ω_{k+1} là tập đóng với mọi $n \ge 2$. Lấy $\{x_m^{(k+2)}\} \subset \Omega_{k+2}$ sao cho $\lim_{m\to\infty} x_m^{(k+2)} = x^{(k+2)}$.Từ giả thiết quy nạp Ω_{k+1} là tập đóng và $\{x_m^{(k+2)}\} \subset \Omega_{k+2} \subset \Omega_{k+1}$ nên $x^{(k+2)} \in \Omega_{k+1}$.

Mặt khác, từ (3.2) ta lại có

$$2\langle x_m^{(k+2)}, Jz_{k+1} - Jy_{k+1}\rangle$$
$$\le \| z_{k+1}\|^2 - \| y_{k+1}\|^2 + \xi_{k+1}. \quad (3.3)$$

Cho $m \to \infty$ trong (3.3) và sử dụng tính liên tục của ánh xạ $J(.)$, ta được

$$2\langle x^{(k+2)}, Jz_{k+1} - Jy_{k+1}\rangle$$
$$\le \| z_{k+1}\|^2 - \| y_{k+1}\|^2 + \xi_{k+1}. \quad (3.4)$$

Điều này chứng tỏ $x^{(k+2)} \in \Omega_{k+2}$ do đó Ω_{k+2} là tập đóng. Vậy theo nguyên lý quy nạp ta có Ω_{n+1} là tập đóng với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Tiếp theo, ta chứng minh Ω_{n+1} là tập lồi với mọi $n \in \mathbb{N}$ bằng phương pháp quy nạp. Với $n = 0,1$ ta có $\Omega_1 = \Omega_2 = K$. Vì K là tập lồi nên Ω_1, Ω_2 là tập lồi. Giả sử Ω_{k+1} là tập lồi với mọi $k \ge 2$.

Lấy $x, y \in \Omega_{k+2}, t \in [0,1]$ vì $\Omega_{k+2} \subset \Omega_{k+1}$ và $x, y \in \Omega_{k+2}$ nên $x, y \in \Omega_{k+1}$. Theo giả thiết quy nạp, ta có Ω_{k+1} là tập lồi nên

$$tx + (1-t)y \in \Omega_{k+1}. \quad (3.5)$$

Vì $x \in \Omega_{k+2}$ nên ta có

$$2\langle x, Jz_{k+1} - Jy_{k+1}\rangle$$
$$\le \| z_{k+1}\|^2 - \| y_{k+1}\|^2 + \xi_{k+1}. \quad (3.6)$$

Khi đó, nhân hai vế của (3.6) với t, ta được

$$2\langle tx, Jz_{k+1} - Jy_{k+1}\rangle$$
$$\le t(\| z_{k+1}\|^2 - \| y_{k+1}\|^2 + \xi_{k+1}) \quad (3.7)$$

Vì $y \in \Omega_{k+2}$ nên ta có

$$2\langle y, Jz_{k+1} - Jy_{k+1}\rangle$$
$$\le \| z_{k+1}\|^2 - \| y_{k+1}\|^2 + \xi_{k+1}. \quad (3.8)$$

Khi đó, nhân hai vế của (3.8) với $(1-t)$, ta được

$$2\langle (1-t)y, Jz_{k+1} - Jy_{k+1}\rangle$$
$$\le (1-t)(\| z_{k+1}\|^2 - \| y_{k+1}\|^2 + \xi_{k+1}) \quad (3.9)$$

Cộng vế theo vế của (3.7) và (3.9), ta được

$$2\langle tx + (1-t)y, Jz_{k+1} - Jy_{k+1}\rangle$$
$$\le \| z_{k+1}\|^2 - \| y_{k+1}\|^2 + \xi_{k+1}. \quad (3.10)$$

Từ (3.5) và (3.10), suy ra được $tx + (1-t)y \in \Omega_{k+2}$. Do đó, Ω_{k+2} là tập lồi. Vậy theo nguyên lý quy nạp ta có Ω_{n+1} là tập lồi với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Tiếp theo, ta chứng minh $\mathcal{F} \subset \Omega_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ bằng phương pháp quy nạp. Với $n = 1,2$ ta có $\Omega_1 = \Omega_2 = K$. Vì $\mathcal{F} \subset K$ nên $\mathcal{F} \subset \Omega_1, \Omega_2$. Giả sử $\mathcal{F} \subset \Omega_k$ nên ta lấy $p \in \mathcal{F}$ thì $p \in \Omega_k$ theo Nhận xét 2.1 (3) và đặt $t_k = \max\{t_k^{(1)}, t_k^{(2)}\}$ ta có

$$\phi(p, v_k) = \phi(p, J^{-1}((1-b_k)Jz_k + b_k JS_1^k z_k))$$
$$\le (1-b_k)\phi(p, z_k) + b_k\phi(p, S_1^k z_k)$$
$$\le \phi(p, z_k) - b_k\phi(p, z_k) + b_k t_k^{(1)}\phi(p, z_k)$$
$$= \phi(p, z_k) + b_k(t_k^{(1)} - 1)\phi(p, z_k). \quad (3.11)$$

$$\phi(p, y_k) = \phi(p, T_{r_k} J^{-1}((1-a_k)JS_1^k v_k + a_k JS_2^k v_k))$$
$$\le \phi(p, J^{-1}((1-a_k)JS_1^k v_k + a_k JS_2^k v_k))$$
$$\le (1-a_k)\phi(p, S_1^k v_k) + a_k\phi(p, S_2^k v_k)$$
$$\le a_k t_k^{(1)}\phi(p, v_k) + (1-a_k)t_k^{(2)}\phi(p, v_k)$$
$$\le a_k t_k\phi(p, v_k) + (1-a_k)t_k\phi(p, v_k)$$
$$= t_k\phi(p, v_k). \quad (3.12)$$

Thay (3.11) vào (3.12), ta có

$$\phi(p, y_k) \le t_k(\phi(p, z_k) + b_k(t_k^{(1)} - 1)\phi(p, z_k))$$
$$\le t_k\phi(p, z_k) + t_k b_k(t_k - 1)\phi(p, z_k)$$
$$= \phi(p, z_k) - \phi(p, z_k) + t_k\phi(p, z_k)$$
$$+ t_k b_k(t_k - 1)\phi(p, z_k) = \phi(p, z_k) + (t_k - 1)\phi(p, z_k)$$
$$+ t_k b_k(t_k - 1)\phi(p, z_k)$$
$$= \phi(p, z_k) + (t_k - 1)(1 + t_k b_k)\phi(p, z_k)$$

$\leq \phi(p,z_k) + (t_k - 1)(1 + t_k b_k)$

$(\| p \| + \| z_k \|)^2$

$\leq \phi(p,z_k) + (t_k - 1)(1 + t_k b_k)(\zeta + \| z_k \|)^2$

$= \phi(p,z_k) + \xi_k. \qquad (3.13)$

Điều này chứng tỏ $p \in \Omega_{k+1}$ hay $\mathcal{F} \subset \Omega_{k+1}$. Do đó, theo nguyên lý quy nạp ta có $\mathcal{F} \subset \Omega_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Vì $\mathcal{F} \subset \Omega_n$ và $\mathcal{F} \neq \varnothing$ nên $\Omega_n \neq \varnothing$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Vậy phép chiếu $\Pi_{\Omega_{n+1}} u_1$ xác định.

Bước 3. *Chứng minh $\{u_n\}$ là bị chặn và giới hạn $\lim_{n\to\infty} \phi(u_n,u_1)$ tồn tại.* Từ định nghĩa của $\{u_n\}$ ta có $u_n = \Pi_{\Omega_n} u_1$ do đó theo Bổ đề 2.6, ta có

$\phi(u_n,u_1) = \phi(\Pi_{\Omega_n} u_1, u_1)$

$\leq \phi(p,u_1) - \phi(p, \Pi_{\Omega_n} u_1)$

$\leq \phi(p,u_1), \forall p \in \Omega_n. \qquad (3.14)$

Lấy $u \in \mathcal{F}$ vì $\mathcal{F} \subset \Omega_n$ nên $u \in \Omega_n$. Khi đó, trong (3.14) lấy $p = u$, ta có

$$\phi(u_n,u_1) \leq \phi(u,u_1). \qquad (3.15)$$

Do đó, $\phi(u_n,u_1)$ bị chặn. Vì $u_{n+1} = \Pi_{\Omega_{n+1}} u_1 \in \Omega_{n+1} \subset \Omega_n$ nên từ (3.14) ta có

$$\phi(u_n,u_1) \leq \phi(u_{n+1},u_1), \forall n \geq 1. \qquad (3.16)$$

Điều này chứng tỏ rằng $\phi(u_n,u_1)$ là dãy tăng.

Vậy $\phi(u_n,u_1)$ hội tụ hay tồn tại giới hạn $\lim_{n\to\infty} \phi(u_n,u_1)$.

Bước 4. Chứng minh rằng $\lim_{n\to\infty} u_n = u^* \in K$. Thật vậy, với $m > n$, ta có

$$u_m = \Pi_{\Omega_m} u_1 \in \Omega_m \subset \Omega_n. \qquad (3.17)$$

Lấy $p = u_m$ trong (3.14) ta được

$\phi(u_n,u_1) \leq \phi(u_m,u_1) - \phi(u_m, \Pi_{\Omega_n} u_1)$

$= \phi(u_m,u_1) - \phi(u_m,u_n). \qquad (3.18)$

Bất đẳng thức (3.18) tương đương

$$\phi(u_m,u_n) \leq \phi(u_m,u_1) - \phi(u_n,u_1). \qquad (3.19)$$

Vì $\lim_{n\to\infty} \phi(u_n,u_1)$ tồn tại nên ta có

$$\lim_{n,m\to\infty} \phi(u_m,u_n) = 0. \qquad (3.20)$$

Mặt khác, E là lồi và trơn đều nên theo Bổ đề 2.2, ta có

$$\lim_{m,n\to\infty} \| u_m - u_n \| = 0. \qquad (3.21)$$

Điều này chứng tỏ u_n là dãy Cauchy trong K. Vì E là không gian Banach và K là tập đóng nên tồn tại $u^* \in K$ sao cho $\lim_{n\to\infty} u_n = u^*$.

Bước 5. Chứng minh rằng $u^* \in \mathcal{F}$. Đầu tiên ta chứng minh $u^* \in F(S_1)$. Vì $u_{n+1} \in \Omega_{n+1} \subset \Omega_n$ nên theo định nghĩa của Ω_{n+1}, ta có

$$\phi(u_{n+1},y_n) \leq \phi(u_{n+1},z_n) + \xi_n. \qquad (3.22)$$

Từ (3.20) và (3.21), khi ta chọn $m = n+1$ ta được

$\lim_{n\to\infty} \phi(u_{n+1},u_n) = 0 \qquad (3.23)$

$\lim_{n\to\infty} \| u_{n+1} - u_n \| = 0. \qquad (3.24)$

Theo định nghĩa của z_n, ta có

$\| z_n - u_n \| = \| u_n + c_n(u_n - u_{n-1}) - u_n \|$

$= c_n \| u_n - u_{n-1} \|. \qquad (3.25)$

Do đó từ (3.24) và (3.25), ta có

$$\lim_{n\to\infty} \| z_n - u_n \| = 0. \qquad (3.26)$$

Khi đó từ (3.26) và tính liên tục của ánh xạ $J(.)$, ta có

$$\lim_{n\to\infty} \| Jz_n - Ju_n \| = 0. \qquad (3.27)$$

Vì $\{u_n\}$ là dãy bị chặn nên theo (3.26) ta có $\{z_n\}$ là dãy bị chặn. Khi đó, tồn tại $A > 0$ sao cho

$$0 \leq \xi_n \leq A(t_n - 1) \qquad (3.28)$$

Vì $\lim_{n\to\infty} t_n = 1$ nên lấy giới hạn (3.28) khi $n \to \infty$, ta được $\lim_{n\to\infty} \xi_n = 0$ .Từ (3.24) và (3.26), ta có

$$\lim_{n\to\infty} \| u_{n+1} - z_n \| = 0. \qquad (3.29)$$

Từ (3.29) và tính liên tục của ánh xạ $J(.)$, ta có

$$\lim_{n\to\infty} \| Ju_{n+1} - Jz_n \| = 0. \qquad (3.30)$$

Từ Nhận xét 2.2 (6), ta có

$\phi(u_{n+1},z_n) = \langle u_{n+1}, Ju_{n+1} - Jz_n \rangle + \langle u_{n+1} - z_n, Jz_n \rangle$

$\leq \| u_{n+1} \| . \| Ju_{n+1} - Jz_n \|$

$$+\|z_n-u_{n+1}\|.\|z_n\|. \quad (3.31)$$

Do đó từ (3.29), (3.30) và (3.31), ta có

$$\lim_{n\to\infty}\phi(u_{n+1},z_n)=0. \quad (3.32)$$

Theo Bổ đề 2.3, ta có

$$\lim_{n\to\infty}\|u_{n+1}-z_n\|=0. \quad (3.33)$$

Từ (3.22), (3.32) và $\lim_{n\to\infty}\xi_n=0$, ta có

$$\lim_{n\to\infty}\phi(u_{n+1},y_n)=0. \quad (3.34)$$

Theo Bổ đề 2.3, ta có

$$\lim_{n\to\infty}\|u_{n+1}-y_n\|=0. \quad (3.35)$$

Từ (3.33), (3.35), ta có

$$\lim_{n\to\infty}\|z_n-y_n\|=0. \quad (3.36)$$

Khi đó, từ (3.36) và tính liên tục của ánh xạ $J(.)$, ta có

$$\lim_{n\to\infty}\|Jz_n-Jy_n\|=0. \quad (3.37)$$

Tương tự (2.12) và (2.13) ta có

$$\phi(p,w_n)\le t_n\phi(p,v_n). \quad (3.38)$$

Thay (3.11) vào (3.38), ta có

$$\phi(p,w_n)\le\phi(p,z_n)+\xi_n. \quad (3.39)$$

Từ Bổ đề 2.11 (4) và (3.39), ta có

$$\phi(y_n,w_n)\le\phi(p,w_n)-\phi(p,y_n)$$

$$\le\phi(p,z_n)-\phi(p,y_n)+\xi_n$$

$$=\|z_n\|^2-\|y_n\|^2+2\langle p,y_n-z_n\rangle+\xi_n$$

$$\le(\|z_n\|-\|y_n\|).(\|z_n\|+\|y_n\|)$$

$$+2\|p\|.\|y_n-z_n\|+\xi_n$$

$$\le(\|z_n-y_n\|).(\|z_n\|+\|y_n\|)$$

$$+2\|p\|.\|y_n-z_n\|+\xi_n. \quad (3.40)$$

Do đó từ (3.36), (3.40) và $\lim_{n\to\infty}\xi_n=0$, ta có

$$\lim_{n\to\infty}\phi(y_n,w_n)=0. \quad (3.41)$$

Từ (3.41) và Bổ đề 2.3, ta có

$$\lim_{n\to\infty}\|y_n-w_n\|=0. \quad (3.42)$$

Vì J liên tục trên mỗi tập bị chặn nên ta có

$$\lim_{n\to\infty}\|Jy_n-Jw_n\|=0. \quad (3.43)$$

Từ (3.36) và (3.42), ta có

$$\lim_{n\to\infty}\|z_n-w_n\|=0. \quad (3.44)$$

Vì J liên tục đều trên các tập bị chặn nên từ (3.44), ta có

$$\lim_{n\to\infty}\|Jz_n-Jw_n\|=0. \quad (3.45)$$

Lấy $p\in\mathcal{F}$ với S_1 là ánh xạ tựa ϕ -không giãn tiệm cận. Theo Nhận xét 2.1 (1), ta có

$$(\|p\|-\|S_1^nz_n\|)^2\le\phi(p,S_1^nz_n)$$

$$\le t_n^{(1)}\phi(p,z_n)\le t_n^{(1)}(\|p\|+\|z_n\|)^2$$

$$\le t_n^{(1)}(\zeta+\|z_n\|)^2. \quad (3.46)$$

Vì $\{t_n^{(1)}\}$ và $\{u_n\}$ là dãy hội tụ nên từ (3.26), (3.45) suy ra $\{S_1^nz_n\}$ bị chặn do đó $\{JS_1^nz_n\}$ bị chặn . Đặt

$$r_1=\sup_{n\in\mathbb{N}}\{\|z_n\|,\|S_1^nz_n\|\}$$

$$=\sup_{n\in\mathbb{N}}\{\|Jz_n\|,\|JS_1^nz_n\|\}.$$

Khi đó $Jz_n,JS_1^nz_n\in B[0,r_1]$ với mọi $n\in\mathbb{N}$. Do đó, theo Bổ đề 2.10, tồn tại hàm $g_{r_1}:[0,2r_1)\to[0,\infty)$ lồi, liên tục và tăng ngặt với $g_{r_1}(0)=0$ sao cho

$$\|(1-b_n)Jz_n+b_nJS_1^nz_n\|^2$$

$$\le(1-b_n)\|Jz_n\|^2+b_n\|JS_1^nz_n\|^2$$

$$-b_n(1-b_n)g_{r_1}(\|Jz_n-JS_1^nz_n\|)$$

$$=(1-b_n)\|z_n\|^2+b_n\|S_1^nz_n\|^2$$

$$-b_n(1-b_n)g_{r_1}(\|Jz_n-JS_1^nz_n\|). \quad (3.47)$$

Khi đó, từ định nghĩa của v_n và (3.47), ta có

$$\phi(p,v_n)=\phi(p,J^{-1}((1-b_n)Jz_n+b_nJS_1^nz_n))$$

$$\le\|p\|^2-2\langle p,(1-b_n)Jz_n+b_nJS_1^nz_n\rangle$$

$$+\|J^{-1}((1-b_n)Jz_n+b_nJS_1^nz_n)\|^2$$

$$\le\|p\|^2-2\langle p,(1-b_n)Jz_n+b_nJS_1^nz_n\rangle$$

$$+\|(1-b_n)Jz_n+b_nJS_1^nz_n\|^2$$

$$\le\|p\|^2-2\langle p,(1-b_n)Jz_n+b_nJS_1^nz_n\rangle$$

$$+(1-b_n)\|z_n\|^2+b_n\|S_1^nz_n\|^2$$

$$-b_n(1-b_n)g_{r_1}(\|Jz_n-JS_1^nz_n\|)$$

$$\le(1-b_n)(\|p\|^2-2\langle p,Jz_n\rangle$$

$+\|z_n\|^2)+b_n(\|p\|)^2$

$-2\langle p, JS_1^n z_n\rangle+\|S_1^n z_n\|^2)$

$b_n(1-b_n)g_{r_1}(\|Jz_n-JS_1^n z_n\|)$

$\leq(1-b_n)\phi(p,z_n)+b_n\phi(p,S_1^n z_n)$

$-b_n(1-b_n)g_{r_1}(\|Jz_n-JS_1^n z_n\|)$

$\leq(1-b_n)\phi(p,z_n)+b_n t_n^{(1)}\phi(p,z_n)$

$-b_n(1-b_n)g_{r_1}(\|Jz_n-JS_1^n z_n\|)$

$\leq(1+b_n(t_n^{(1)}-1))\phi(p,z_n)$

$-b_n(1-b_n)g_{r_1}(\|Jz_n-JS_1^n z_n\|).$ (3.48)

Thay (3.48) vào (3.38), ta có

$\phi(p,w_n)\leq t_n(1+b_n(t_n-1))\phi(p,z_n)$

$-b_n t_n(1-b_n)g_{r_1}(\|Jz_n-JS_1^n z_n\|)$

$\leq\phi(p,z_n)+\xi_n-b_n t_n(1-b_n)$

$g_{r_1}(\|Jz_n-JS_1^n z_n\|)$

$\leq\phi(p,z_n)+\xi_n-b_n(1-b_n)$

$g_{r_1}(\|Jz_n-JS_1^n z_n\|).$ (3.49)

Điều này dẫn đến

$b_n(1-b_n)g_{r_1}(\|Jz_n-JS_1^n z_n\|)$

$\leq\phi(p,z_n)-\phi(p,w_n)+\xi_n$

$=\|z_n\|^2-\|w_n\|^2+2\langle p,w_n-z_n\rangle+\xi_n$

$\leq(\|z_n\|-\|w_n\|).(\|z_n\|+\|w_n\|)$

$+2\|p\|.\|w_n-z_n\|+\xi_n$

$\leq(\|z_n-w_n\|).(\|z_n\|+\|w_n\|)$

$+2\|p\|.\|z_n-w_n\|+\xi_n.$ (3.50)

Vì $\lim_{n\to\infty}\xi_n=0$ và $\liminf_{n\to\infty} b_n(1-b_n)>0$ nên từ (3.44) và (3.50), ta suy ra được $\lim_{n\to\infty} g_{r_1}(\|Jz_n-JS_1^n z_n\|)=0$. Do $g_{r_1}(0)=0$ nên ta có $\lim_{n\to\infty}\|Jz_n-JS_1^n z_n\|=0.$

(3.51)

Vì J^{-1} là liên tục đều trên mỗi tập bị chặn nên ta có $\lim_{n\to\infty}\|z_n-S_1^n z_n\|=0.$ (3.52)

Mặt khác, ta có $\lim_{n\to\infty}u_n=u^*$ nên từ (3.26), ta có

$$\lim_{n\to\infty}\|z_n-u^*\|=0. \quad (3.53)$$

Từ (3.52) và (3.53) ta có

$$\lim_{n\to\infty}\|S_1^n z_n-u^*\|=0. \quad (3.54)$$

Hơn nữa, ta lại có

$\|S_1^{n+1}z_n-u^*\|\leq\|S_1^{n+1}z_n-S_1^n z_n\|$

$+\|S_1^n z_n-u^*\|.$ (3.55)

Từ (3.54), (3.55) và tính chính quy tiệm cận đều của S_1 nên ta suy ra được $\lim_{n\to\infty}\|S_1^{n+1}z_n-u^*\|=0.$ Mặt khác, vì S_1 có tính đóng nên kết hợp với (3.54) ta có $S_1u^*=u^*$. Do đó $u^*\in F(S_1)$.

Tiếp theo ta chứng minh $u^*\in F(S_2)$, ta có

$\|Jv_n-Jz_n\|=\|(1-b_n)Jz_n+b_nJS_1^n z_n-Jz_n\|$

$=\|Jz_n-b_nJz_n+b_nJS_1^n z_n-Jz_n\|$

$=\|b_nJS_1^n z_n-b_nJz_n\|$

$=b_n\|JS_1^n z_n-Jz_n\|.$ (3.56)

Từ (3.51) và (3.56), ta có

$$\lim_{n\to\infty}\|Jv_n-Jz_n\|=0 \quad (3.57)$$

Vì J^{-1} là liên tục đều trên các tập bị chặn nên ta có $\lim_{n\to\infty}\|v_n-z_n\|=0$ kết hợp với $\lim_{n\to\infty}\|z_n-u^*\|=0$ ta suy ra được $\lim_{n\to\infty}\|v_n-u^*\|=0$. Do đó, $\{v_n\}$ là dãy bị chặn. Vì S_1 là ánh xạ tựa ϕ-không giãn tiệm cận nên theo Nhận xét 2.1 (6) ta có

$\phi(u^*,S_1^n v_n)\leq t_n\phi(u^*,v_n)$

$\leq t_n(\|u^*\|.\|Ju^*-Jv_n\|$

$+\|u^*-v_n\|.\|v_n\|).$ (3.58)

Vì J liên tục đều trên các tập bị chặn và $\lim_{n\to\infty}\|v_n-u^*\|=0$ nên ta có $\lim_{n\to\infty}\|Jv_n-Ju^*\|=0$. Do đó từ (3.55) ta suy ra được $\lim_{n\to\infty}\phi(u^*,S_1^n v_n)=0$. Theo Bổ đề 2.2 ta được

$$\lim_{n\to\infty} \| S_1^n v_n - u^* \| = 0. \quad (3.59)$$

Với $p \in \mathcal{F}$ theo Nhận xét 2.1 (1), ta có

$$(\| p \| - \| S_i v_n \|)^2 \le \phi(p, S_i^n v_n) \le t_n \phi(p, v_n)$$

$$\le t_n (\| p \| + \| v_n \|)^2$$

$$\le t_n (\zeta + \| v_n \|)^2. \quad (3.60)$$

Khi đó từ (3.60) và $\{v_n\}$ là dãy bị chặn nên ta suy ra được $\{S_1^n v_n\}$ và $\{S_2^n v_n\}$ bị chặn. Đặt

$$r_2 = \sup_{n\in\mathbb{N}} \{ \| z_n \|, \| S_1^n v_n \|, \| S_2^n v_n \| \}$$

$$= \sup_{n\in\mathbb{N}} \{ \| J z_n \|, \| J S_1^n v_n \|, \| J S_2^n v_n \| \} \quad (3.61)$$

Khi đó $J z_n, J S_1^n v_n, J S_2^n v_n \in B[0, r_2]$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Do đó theo Bổ đề 2.10 tồn tại hàm $g_{r_2} : [0, 2r_2] \to [0, \infty)$ lồi đều và tăng ngặt sao cho $g_{r_2}(0) = 0$ và

$$\| (1 - a_n) J S_1^n v_n + a_n J S_2^n v_n \|^2$$

$$\le (1 - a_n) \| J S_1^n v_n \|^2 + a_n \| J S_2^n v_n \|^2$$

$$- a_n (1 - a_n) g_{r_2} (\| J S_1^n v_n - J S_2^n v_n \|). \quad (3.62)$$

Từ (3.62) và lập luận tương tự như chứng minh ở (3.48), (3.49), ta có

$$\phi(p, w_n) \le \phi(p, z_n) + \xi_n$$

$$- a_n (1 - a_n) g_{r_2} (\| J S_1^n v_n - J S_2^n v_n \|). \quad (3.63)$$

Điều này dẫn đến

$$a_n (1 - a_n) g_{r_2} (\| J S_1^n v_n - J S_2^n v_n \|)$$

$$\le \phi(p, z_n) - \phi(p, w_n) + \xi_n$$

$$= \| z_n \|^2 - \| w_n \|^2 + 2\langle p, w_n - z_n \rangle + \xi_n$$

$$\le (\| z_n \| - \| w_n \|).(\| z_n \| + \| w_n \|)$$

$$+ 2 \| p \| . \| w_n - z_n \| + \xi_n$$

$$\le (\| z_n - w_n \|).(\| z_n \| + \| w_n \|)$$

$$+ 2 \| p \| . \| z_n - w_n \| + \xi_n. \quad (3.64)$$

Vì $\lim_{n\to\infty} \xi_n = 0$ và $\liminf_{n\to\infty} a_n (1 - a_n) > 0$ nên từ (3.44) và (3.64) ta suy ra được $\lim_{n\to\infty} g_{r_2} (\| J S_1^n v_n - J S_2^n v_n \|) = 0$. Do $g_{r_2}(0) = 0$ nên ta có

$$\lim_{n\to\infty} \| J S_1^n v_n - J S_2^n v_n \| = 0. \quad (3.65)$$

Vì J^{-1} là liên tục đều trên mỗi tập bị chặn nên ta có

$$\lim_{n\to\infty} \| S_1^n v_n - S_2^n v_n \| = 0. \quad (3.66)$$

Do đó, từ (3.59) và (3.66), ta có

$$\lim_{n\to\infty} \| S_2^n v_n - u^* \| = 0. \quad (3.67)$$

Hơn nữa, ta lại có

$$\| S_2^n v_n - u^* \| \le \| S_2^{n+1} v_n - S_2^n v_n \|$$

$$+ \| S_2^n v_n - u^* \|. \quad (3.68)$$

Từ (3.67), (3.68) và tính chính quy tiệm cận đều của S_2 nên ta suy ra được $\lim_{n\to\infty} \| S_2^{n+1} v_n - u^* \| = 0.$ Mặt khác, vì S_2 có tính đóng nên ta có $S_2 u^* = u^*$. Do đó $u^* \in F(S_2)$.

Cuối cùng ta cần chứng minh $u^* \in \Omega$. Lấy $p \in \mathcal{F}$ từ (3.13) và Bổ đề 2.9(7), ta có

$$\phi(p, y_n) \le \phi(p, T_{r_n} J^{-1}((1 - a_n) J S_1^n v_n + a_n J S_2^n v_n))$$

$$\le \phi(p, J^{-1}((1 - a_n) J S_1^n v_n + a_n J S_2^n v_n))$$

$$\le \phi(p, z_n) + \xi_n. \quad (3.69)$$

Vì $y_n = T_{r_n} w_n$ nên với mọi $y \in \Omega$, ta có

$$\psi(y, y_n, y_n) + \frac{1}{r_n} \langle y - y_n, Jy - Jw_n \rangle$$

$$+ b(y_n, y) - b(y_n, y_n) \ge 0. \quad (3.70)$$

Từ (3.70) và tính α-đơn điệu yếu của ψ, ta có

$$\| y - y_n \| . \frac{\| J y_n - J w_n \|}{r_n}$$

$$\ge \frac{1}{r_n} \langle y - y_n, Jy - Jw_n \rangle (y_n, y_n)$$

$$- b(y_n, y) - \psi(y, y_n, y_n)$$

$$\ge \alpha(y_n, y) - \psi(y, y_n, y)$$

$$+ b(y_n, y_n) - b(y_n, y). \quad (3.71)$$

Vì ψ thỏa mãn các điều kiện của Bổ đề 2.8 và Bổ đề 2.9 nên α là liên tục. Khi đó sử dụng (3.43), kết hợp tính liên tục của ψ, b và lấy giới hạn đẳng thức (3.71) ta thu được

$$\alpha(u^*, y) - \psi(y, u^*, y)$$

$$+b(u^*,u^*)-b(u^*,y)\le 0\,,\forall y\in K \qquad (3.72)$$

Với $t\in(0,1)$ và $y\in K$, đặt $y_t=ty+(1-t)u^*$. Vì K là tập lồi nên $y_t\in K$. Khi đó, ta có

$$\alpha(u^*,y_t)-\psi(y_t,u^*,y_t)$$
$$+b(u^*,u^*)-b(u^*,y_t)\le 0 \qquad (3.73)$$

Khi đó từ (3.73) suy ra được

$$\alpha(u^*,y_t)\le\psi(y_t,u^*,y_t)-b(u^*,u^*)+b(u^*,y_t)$$
$$\le\psi(y,u^*,y_t)+(1-t)\psi(u^*,u^*,y_t)$$
$$-b(u^*,u^*)+tb(u^*,y)+(1-t)b(u^*,u^*)$$
$$\le[\psi(y,u^*,y_t)+b(u^*,y)-b(u^*,u^*)]. \qquad (3.74)$$

Từ (3.74) và tính liên tục của ánh xạ $\psi(y,u^*,.)$ nên ta có

$$\lim_{t\to 0}\{\psi(y,u^*,y_t)+b(u^*,y)-b(u^*,u^*)\}$$
$$\ge\lim_{t\to 0}\frac{\alpha(u^*,y_t)}{t}. \qquad (3.75)$$

Từ đó ta suy ra được

$$\psi(y,u^*,u^*)+b(u^*,y)-b(u^*,u^*)\ge 0. \qquad (3.76)$$

Do đó $u^*\in\Omega$. Vậy $u^*\in\mathcal{F}$.

Bước 6. Chứng minh $u^*=\Pi_{\mathcal{F}}u_1$. Thật vậy, vì $u_{n+1}=\Pi_{\Omega_{n+1}}u_1$ nên theo Bổ đề 2.5, với mọi $y\in\Omega_{n+1}$, ta có

$$\langle u_{n+1}-y,Ju_1-Ju_{n+1}\rangle\le 0, \qquad (3.77)$$

Lấy $p\in\mathcal{F}$, vì $\mathcal{F}\subset\Omega_{n+1}$ nên $p\in\Omega_{n+1}$. Khi đó, trong (3.77) chọn $y=p$, ta có

$$\langle u_{n+1}-p,Ju_1-Ju_{n+1}\rangle\le 0. \qquad (3.78)$$

Vì J liên tục trên mỗi tập con bị chặn và $\lim_{n\to\infty}u_n=u^*$ nên lấy giới hạn (3.78) ta được

$$\langle u^*-p,Ju_1-Ju^*\rangle\le 0. \qquad (3.79)$$

Vậy từ (3.79) và theo Bổ đề 2.5 ta suy ra được $u^*=\Pi_{\mathcal{F}}u_1$. □

Nhận xét 3.2 Mỗi ánh xạ tựa ϕ-không giãn là một ánh xạ tựa ϕ-không giãn tiệm cận với $t_n=1$ với mọi $n\in\mathbb{N}^*$. Do đó, từ Định lí 3.1 ta có hệ quả về sự hội tụ của dãy lặp cho ánh xạ tựa ϕ-không giãn như sau.

Hệ quả 3.3 Giả sử các giả thiết (H1) – (H3) được thỏa mãn. Hơn nữa, với mỗi $S:K\to K$ là đóng, chính quy tiệm cận trên K và là ánh xạ tựa ϕ-không giãn. Tập $F(S)$ bị chặn trong K, nghĩa là tồn tại $\zeta>0$ sao cho

$F(S)\subset\ x\in K:\|x\|\le\zeta$ và $\mathcal{F}=F(S)\cap\Omega\ne\varnothing$.

Xét dãy $\{u_n\}$ là dãy lặp được xác định bởi.

$$\begin{cases} u_1,u_2\in K,\Omega_1=\Omega_2=K\\ z_n=u_n+c_n(u_n-u_{n-1})\\ v_n=J^{-1}((1-b_n)Jz_n+b_nJSz_n)\\ w_n=J^{-1}((1-a_n)JSv_n+a_nJSv_n)\\ y_n=T_{r_n}w_n\\ \Omega_{n+1}=\{z\in\Omega_n:\phi(z,y_n)\le\phi(z,z_n)+\xi_n\}\\ u_{n+1}=\Pi_{\Omega_{n+1}}u_1\end{cases}$$

trong đó, $\xi_n=(t_n-1)(1+t_nb_n)(\zeta+\|z_n\|)^2$, $\{a_n\},\{b_n\}\subset[0,1]$ sao cho $\liminf_{n\to\infty}b_n(1-b_n)>0$, $\liminf_{n\to\infty}a_n(1-a_n)>0$, $r_n\in[\delta,\infty)$ với $\delta>0$ và $\{c_n\}\subset(0,1)$. Khi đó, dãy $\{u_n\}$ hội tụ đến $u^*=\Pi_{\mathcal{F}}u_1$.

Nhận xét 3.4 Ta nhận thấy mỗi không gian Hilbert là một không gian Banach. Do đó, từ Định lí 3.1 ta có hệ quả về sự hội tụ của dãy lặp trong không gian Hilbert như sau.

Hệ quả 3.5 Giả sử các giả thiết (H3) – (H4) được thỏa mãn. Hơn nữa, H là không gian Hilbert phản xạ, lồi ngặt và trơn đều, H^* là không gian đối ngẫu của H sao cho H và H^* có tính chất Kadec-Klee, K là tập con lồi, đóng, khác rỗng của H. Xét dãy $\{u_n\}$ là dãy lặp được xác định bởi

$$\begin{cases} u_1,u_2\in K,\Omega_1=\Omega_2=K\\ z_n=u_n+c_n(u_n-u_{n-1})\\ v_n=J^{-1}((1-b_n)Jz_n+b_nJS_1^nz_n)\\ w_n=J^{-1}((1-a_n)JS_1^nv_n+a_nJS_2^nv_n)\\ y_n=T_{r_n}w_n\\ \Omega_{n+1}=\{z\in\Omega_n:\phi(z,y_n)\le\phi(z,z_n)+\xi_n\}\\ u_{n+1}=\Pi_{\Omega_{n+1}}u_1\end{cases}$$

trong đó,

$\xi_n=(t_n-1)(1+t_nb_n)(\zeta+\|z_n\|)^2$, $\{a_n\}$, $\{b_n\}\subset[0,1]$ sao cho $\liminf_{n\to\infty}b_n(1-b_n)>0$, $\liminf_{n\to\infty}a_n(1-a_n)>0$, $r_n\in[\delta,\infty)$ với $\delta>0$ và $\{c_n\}\subset(0,1)$.

Khi đó, dãy $\{u_n\}$ hội tụ đến $u^* = \Pi_{\mathcal{F}} u_1$.

Ví dụ 3.6 Cho $E = \mathbb{R}$ là không gian Banach với chuẩn $\| x \| = | x |$, $\forall x \in E$. Khi đó, ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc J là ánh xạ đồng nhất và phiếm hàm $\phi(x,y) = (x-y)^2$, $\forall x,y \in E$.

Với $K = [-1;1]$ xét bài toán cân bằng tìm $x \in K$ sao cho $\psi(y,x,x) + b(x,y) - b(x,x) \le 0$

trong đó, hàm ba biến $\psi : K \times K \times K \to \mathbb{R}$ được xác định bởi $\psi(x,y,z) = (x-y)z$ với $x,y,z \in K$; hàm hai biến $b : K \times K \to \mathbb{R}$ được xác định bởi $b(x,y) = xy - x^2$. Với mỗi $i = 1,2$ xét hàm $S_i : K \to K$ được xác định bởi $Sx = \dfrac{x}{2^i}, \forall x \in K$.

Bằng cách kiểm tra trực tiếp ta thấy các điều kiện của Định lí 3.1 được thỏa mãn. Do đó, dãy (3.1) hội tụ về $0 = \Pi_{\mathcal{F}} u_1$. Tiếp theo, chúng tôi minh họa sự hội tụ của dãy lặp (3.1) trong một số trường hợp bằng tính toán trên phần mềm Sci-lab 6.0 như sau:

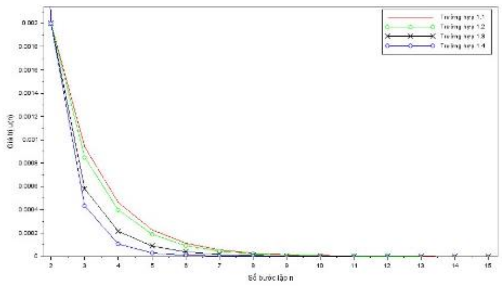
Trường hợp 1: $a_n = \dfrac{n}{10n+1}$ và một số trường hợp $b_n, c_n \in (0,1)$ như sau:

TH 1.1. $b_n = \dfrac{99n+1}{100n+2}, c_n = \dfrac{n}{100n+2}$.

TH 1.2. $b_n = \dfrac{n+1}{100n+7}, c_n = \dfrac{n}{50n+1}$.

TH 1.3. $b_n = \dfrac{n}{2n+3}, c_n = \dfrac{n}{10n+1}$.

TH 1.4. $b_n = \dfrac{n}{10n+1}, c_n = \dfrac{n}{6n+1}$.



Hình 1. Dáng điệu hội tụ của 4 dãy lặp trong trường hợp 1

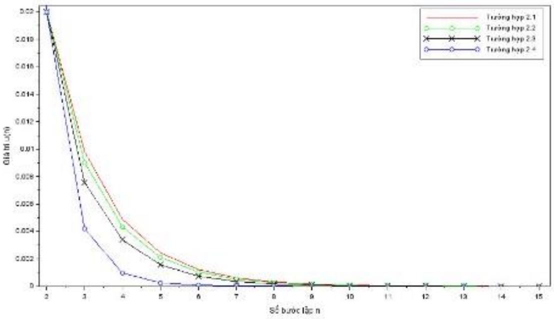
Trường hợp 2: $b_n = \dfrac{3n+1}{7n+6}$ và một số trường hợp $a_n, c_n \in (0,1)$ như sau:

TH 2.1. $a_n = \dfrac{99n}{100n+3}, c_n = \dfrac{7n}{2000n+3}$.

TH 2.1. $a_n = \dfrac{n+2}{100n+3}, c_n = \dfrac{n}{20n+1}$.

TH 2.3. $a_n = \dfrac{3n}{10n+5}, c_n = \dfrac{n}{20n+1}$.

TH 2.4. $a_n = \dfrac{n}{10n+2}, c_n = \dfrac{10n}{60n+4}$.



Hình 2. Dáng điệu hội tụ của 4 dãy lặp trong trường hợp 2

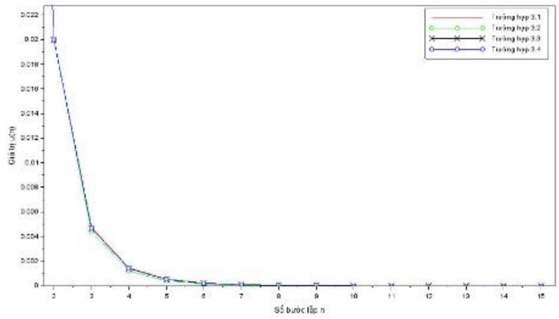
Trường hợp 3: $c_n = \dfrac{n+1}{10n+3}$ và một số trường hợp $a_n, b_n \in (0,1)$ như sau:

TH 3.1. $a_n = \dfrac{99n}{100n+7}, b_n = \dfrac{98n+1}{100n+2}$.

TH 3.2. $a_n = \dfrac{n}{100n+5}, b_n = \dfrac{3n+1}{100n+3}$.

TH 3.3. $a_n = \dfrac{999n+1}{100n+3}, b_n = \dfrac{n}{1000n+7}$.

TH 3.4. $a_n = \dfrac{n}{1000n+2}, b_n = \dfrac{999n}{1000n+3}$.



Hình 3. Dáng điệu hội tụ của 4 dãy lặp trong trường hợp 3

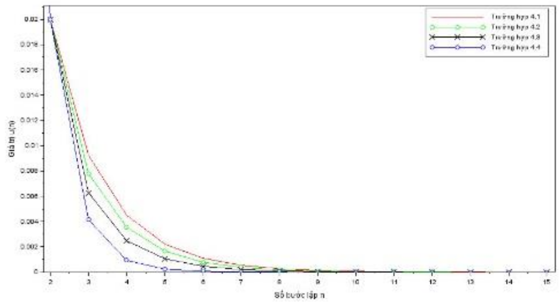
Trường hợp 4: $a_n = \dfrac{4n+1}{7n+3}, b_n = \dfrac{3n+1}{7n+6}$ và một số trường hợp $c_n \in (0,1)$ như sau:

TH 4.1. $c_n = \dfrac{n}{100n+1}$.

TH 4.2. $c_n = \dfrac{n}{20n+2}$.

TH 4.3. $c_n = \dfrac{n}{10n+3}$.

TH 4.4. $c_n = \dfrac{n}{6n+4}$.

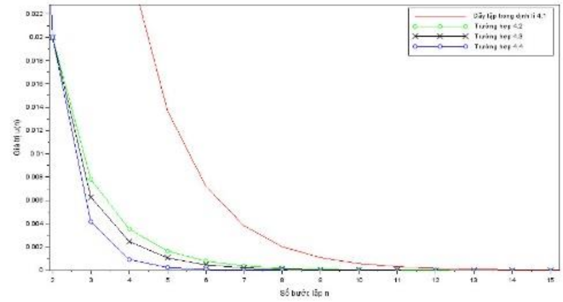


Hình 4. Dáng điệu hội tụ của 4 dãy lặp trong trường hợp 4

Nhận xét 3.7 Từ 4 trường hợp, ta nhận thấy sự hội tụ của dãy lặp (3.1) đến điểm bất động chung 0 không phụ thuộc nhiều vào việc chọn dãy $\{a_n\},\{b_n\}$ mà phụ thuộc chủ yếu vào việc chọn dãy $\{c_n\}$. Ngoài ra, khi ta chọn $\{c_n\}$ trong Trường hợp 4 thì hội tụ nhanh hơn các trường hợp còn lại.

Dãy lặp (3.1) là dãy lặp được chúng tôi phát triển dựa trên dãy lặp của Định lí 4.1 trong bài báo K. R. Kazmi and R. Ali (2019). Do đó, tiếp theo chúng tôi so sánh sự hội tụ của hai dãy lặp như sau:

Đối với dãy lặp của Định lí 4.1 ta chọn $a_1^n = \dfrac{5n}{10n+1}, a_2^n = \dfrac{4n}{10n+1}, a_3^n = \dfrac{n+1}{10n+1}$ và $\delta^n = \dfrac{n+1}{2n+3}$. Đối với dãy lặp (3.1) do không bị phụ thuộc vào cách chọn a_n, b_n nên ta dùng lại các trường hợp (4.2), (4.3), (4.4) trong trường hợp 4 để minh họa rõ nhất.



Hình 5. Dáng điệu hội tụ của dãy lặp trong Định lí 4.1 và 3 dãy lặp trong trường hợp 4

Lời cảm ơn: Bài báo này được hỗ trợ bởi Trường Đại học Đồng Tháp với Đề tài nghiên cứu khoa học của sinh viên mã số SPD2022.02.11.

Tài liệu tham khảo

Alber, Y.I. (1996). Metric and generalized projection operators in Banach spaces. Properties and applications. *Lect. Notes Pure Appl. Math.*, 15-50.https://doi.org/10.48550/arXiv.funct-an/9311001

Anh, P. K., & Hieu, D. V. (2015). Parallel and sequential hybrid methods for a finite family of asymptotically quasi-φ-nonexpansive mappings. *J. Appl. Math. Comput*, *48*(1), 241-263. *J. Appl. Math. Comput*, *48*(1), 241-263.

https://doi.org/10.1007/s12190-014-0801-6

Blum, E., & W. Oettli, W. (1994). From optimization and variational inequalities to equilibrium problems. *Math. Stud.,63*, 123-145.

Farid, M., Cholamjiak, W., Ali, R., & Kazmi, K. R. (2021). A new shrinking projection algorithm for a generalized mixed variational-like inequality problem and asymptotically quasi-ϕ-nonexpansive mapping in a Banach space. *R. Acad. Cienc. Exactas Fi's. Nat. Ser. A Mat.*, 115(3), 114. https://doi.org/10.1016/j.na.2009.04.023

Hao, Y. (2013). Some results on a modified Mann iterative scheme in a reflexive Banach spaces. J. *Fixed Point Theory Appl.*, *2013*(227), 1-14.

https://doi.org/10.1186/1687-1812-2013-227

Kazmi, K. R., & Ali, R. (2019). Hybrid projection method for a system of unrelated generalized mixed variational-like inequality problems, *Georgian Math. J.*, *26*(1), 63-78.

https://doi.org/10.1515/gmj-2017-0027

Kamimura, S., & Takahashi, W. (2002) Strong convergence of a proximal-type algorithm in a Banach space. *SIAM J. Optim. 13*, 938-945

https://doi.org/10.1137/S105262340139611X

Muu, L.D., & Oettli, W. (1992). Convergence of an adaptive penalty scheme for finding constrained equilibria. *Nonlinear Anal.*, *18*, 1159-1166 https://doi.org/10.1016/0362-546X(92)90159-C

Noor, M. A., & Oettli, W. (1994). On general nonlinear complementarity problems and quasi-equilibria. *Le Matematiche (Catania), 49,* 313-331.

Preda, V., Beldiman, M. & Bătătoresou, A. (2007). On Variational-like inequalities with generalized monotone mappings, in: Generalized Convexity and Related Topics, Lecture Notes in Econom. Math. Springer, Berlin, 415–431.

https://doi.org/10.1007/978-3-540-37007-9_25

Qin, X., Cho, Y.J., Kang, S.M., & Zhou, H. (2009). Convergence of a modified Halpern-type iteration algorithm for quasi-φ- nonexpansive mappings. *Appl. Math. Lett, 22,* 1051-1055.

https://doi.org/10.1016/j.aml.2009.01.015

Qin, X., Cho, S.Y. , & Kang, S.M. (2010). On hybrid projection methods for asymptotically quasi-φ-nonexpansive mappings. *Appl. Math. Comput, 215*, 3874-3883. https://doi.org/10.1016/j.amc.2009.11.031

Tada, A. & Takahashi, W. (2007). Weak and strong convergence theorems for a nonexpansive mapping and an equilibrium problem. *J. Optim. Theory Appl., 133*, 359-370.

https://doi.org/10.1007/s10957-007-9187-z

Takahashi, W. & Zembayashi, K. (2009). Strong and weak convergence theorems for equilibrium problems and relatively nonexpansive mappings in Banach spaces. *Nonlinear Anal., 70*, 45-57.

https://doi.org/10.1016/j.na.2007.11.031

Thianwan, T., & Yambangwai, D. (2019). Convergence analysis for a new two-step iteration process for G-nonexpansive mappings with directed graphs. *J. Fixed Point Theory Appl. 21*(44),1-16. https://doi.org/10.1007/s11784-019-0681-3

Yang, F., Zhao, L., & Kim., J. K. (2012). Hybrid projection method for generalized mixed equilibrium problem and fixed point problem of infinite family of asymptotically quasi-φ-nonexpansive mappings in Banach spaces. *Appl. Math. Comput*. 218(10), 6072-6082. https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.11.091