PHÉP CHIA SUY RỘNG CÁC KHOẢNG TRONG PHÉP TOÁN ĐẠI SỐ VÀ ỨNG DỤNG

Nguyễn Hữu Hải, Phạm Minh Tuấn, Trần Tuấn Anh, Trương Công Hưng và Trần Văn Sự*

Trường Đại học Sư Phạm - Đại học Đà Nẵng, Đà Nẵng, Việt Nam

**Tác giả liên hệ: Trần Văn Sự, Email: vansudhdntt@gmail.com*

Lịch sử bài báo

Ngày nhận: 07/11/2024; Ngày nhận chỉnh sửa: 27/12/2024; Ngày duyệt đăng: 31/12/2024

Tóm tắt

Trong bài báo, chúng tôi nghiên cứu phép chia suy rộng các khoảng đóng và bị chặn trong các phép toán đại số cùng với ứng dụng của chúng. Dựa trên khái niệm về phép tính sai phân suy rộng (gH-sai phân) và phép chia suy rộng (g-chia), một số tính chất cơ bản của phép g-chia và gH-sai phân được nghiên cứu chi tiết. Bên cạnh đó, một số ví dụ minh họa liên quan đến các tính chất của phép g-chia cũng được trình bày. Một số ứng dụng của những kết quả này vào ngành sản xuất cũng được thảo luận, trong đó bài toán pha trộn thép có thể được coi là bài toán quy hoạch toán học phân số nhận giá trị khoảng với các ràng buộc bất đẳng thức được xây dựng. Các kết quả đạt được của chúng tôi trong bài báo này chưa từng được nghiên cứu trước đây.

Từ khóa: *Khoảng thứ tự, phép tính g-chia, phép tính gH-sai phân, phép tính khoảng, ứng dụng.*

DOI: https://doi.org/10.52714/dthu.14.2.2025.1438

Trích dẫn: Nguyễn, H. H., Phạm, M. T., Trần, T. A., Trương, C. H., & Trần, V. S. (2025). Phép chia suy rộng các khoảng trong phép toán đại số và ứng dụng. *Tạp chí Khoa học Đại học Đồng Tháp, 14*(2), 74-83. https://doi.org/10.52714/dthu.14.2.2025.1438

THE GENERALIZED DIVISION OF INTERVALS IN ALGEBRAIC OPERATIONS AND THEIR APPLICATIONS

Nguyen Huu Hai, Pham Minh Tuan, Tran Tuan Anh, Truong Cong Hung, and Tran Van Su*

The University of Danang - University of Science and Education, Da Nang 550000, Vietnam

Corresponding author: Tran Van Su, Email: vansudhdntt@gmail.com

Article history

Received: 07/11/2024; Received in revised form: 27/12/2024; Accepted: 31/12/2024

Abstract

This paper investigates the generalized division of closed and bounded intervals in algebraic operations and its applications. On generalized difference (gH-difference) and generalized division (g-division), some basic properties of g-division and gH-difference are detailed. Besides, some illustrative examples related to the properties of g-division are presented. These results used in manufacturing industry are discussed, where the steel blending problem can be regarded as an interval fractional programming problem with inequality constraints are formulated. These results have not been reported in previous studies.

Keywords: *Applications, g-division, gH-difference, interval calculus, ordering in intervals.*

1. Giới thiệu

Một khoảng bị chặn trên tập số thực $\boldsymbol{R}$ ký hiệu $a = [a^L,\ a^U]$ trong đó các biên trên và biên dưới của khoảng a là các số thực thỏa mãn $a^U \geq a^L$. Tập các khoảng bị chặn trên **R** ký hiệu **J(R).** Tích n lần các khoảng **J(R)** là một không gian tích $[\mathbf{J}(\mathbf{R})]^n$ được mô tả bởi

$$[\mathbf{J}(\mathbf{R})]^n = \underbrace{\mathbf{J}(\mathbf{R}) \times \mathbf{J}(\mathbf{R}) \times \cdots \times \mathbf{J}(\mathbf{R})}_{n-lần}.$$

Khái niệm phép chia suy rộng (hay g-chia) là một ý tưởng tương tự như phép toán gH-sai phân được giới thiệu bởi Stefanini và Bede (2009). Trong đó, ký hiệu gH-sai phân của hai khoảng đóng và bị chặn luôn tồn tại và được xác định duy nhất. Nối tiếp công trình trên, các phép toán đại số trên các khoảng được giới thiệu và nghiên cứu đầu tiên bởi Moore và cs (2009), tuy nhiên phép chia hai khoảng của Moore và Kearfott (2009) chỉ tồn tại khi biên trái và biên phải của một khoảng luôn luôn dương và phép chia một khoảng cho chính nó phải khác 1. Để vượt qua các trở ngại này, chúng tôi dựa theo ý tưởng của Stefanini (2010), xét phép chia suy rộng đối với hai khoảng $a = [a^L,\ a^U], b = [b^L,\ b^U]$, trong đó $a^U \geq a^L$, $b^U \geq b^L$, $0 \notin b$, được định nghĩa là:

$$\frac{a}{b} = \frac{[a^L,\ a^U]}{[b^L,\ b^U]} = \left[\frac{a^L}{b^U}, \frac{a^U}{b^L}\right].$$

Phép tính g-chia (hay còn gọi là phép chia suy rộng) luôn tồn tại với $a \div_g a = 1$ và các phép toán trên **J(R)** luôn thỏa mãn các tính chất sau:

(1) $a = [a^L,\ a^U] = b = [b^L,\ b^U]$ khi và chỉ khi $a^U = b^U$ và $a^L = b^L$.

(2) $a = [a^L,\ a^U]$ suy ra $-a = [-a^U,\ -a^L]$.

(3) $a = [a^L,\ a^U]$ suy ra $a^{-1} = \left[\frac{1}{a^U}, \frac{1}{a^L}\right]$.

Phép tính g-chia xuất hiện ở các bài toán tối ưu phân số giá trị khoảng trong đó hàm mục tiêu chính là phép chia suy rộng của hai khoảng. Lý thuyết giá trị khoảng gắn liền với nghiên cứu điều kiện tối ưu và ổn định nghiệm cho lớp các bài toán tối ưu trên, trong đó công trình nghiên cứu đầu tiên gắn liền với sự kiện này thuộc về Wu (2007); Hu và Duan (2018) nghiên cứu bài toán tối ưu với các khoảng không chắc chắn; Rahman (2022) nghiên cứu bài toán tối ưu tự do nhận giá trị khoảng dạng tham số. Các kết quả đạt được này đều được áp dụng trong các mô hình tự động hóa, kinh doanh, điều khiển sản xuất trong một nhà máy, v.v…

Ghosh (2017) xây dựng phương pháp lặp Newton giải tìm nghiệm tối ưu cho bài toán cực trị với hàm mục tiêu nhận giá trị khoảng và sau đó Chalco-Cano và cs (2019) nghiên cứu cấu trúc của ánh xạ suy rộng nhận giá trị khoảng thuộc. Gần đây hơn, Roy và cs (2024) sử dụng phương pháp giảm thiểu Gradient để giải bài toán tối ưu giá trị khoảng trong lĩnh vực tài chính. Để nghiên cứu đặc trưng cơ bản cho lớp bài toán tối ưu giá trị khoảng, các công thức tính toán trên phép tính g-chia cần được nghiên cứu cẩn thận và đầy đủ. Do đó việc nghiên cứu các phép tính đại số của phép chia suy rộng hai khoảng là công việc cấp bách và nên làm trong bài báo này.

Mục đích chính của bài báo này tập trung vào xây dựng cấu trúc cho khoảng đại số liên quan đến thứ tự khoảng và nghiên cứu mối liên hệ giữa gH-sai phân và g-chia, từ đó tập trung vào nghiên cứu các đặc trưng của phép chia suy rộng. Cuối cùng chúng tôi đề xuất xây dựng mô hình toán học cho bài toán quy hoạch phân số nhận giá trị khoảng với các ràng buộc bất đẳng thức liên quan đến phép chia suy rộng.

2. Đặc trưng của phép toán g-chia

2.1. Ký hiệu

Cho hai khoảng $a = [a^L,\ a^U]$ và $b = [b^L,\ b^U]$ đóng và bị chặn bất kỳ. Ta luôn có:

(4) $a - b = [a^L - b^U,\ a^U - b^L]$.

(5) $\theta + a = [\theta + a^L,\ \theta + a^U]$ với mọi số thực θ.

(6) $\theta \times a = [\theta a^L,\ \theta a^U]$ với mọi số thực không âm θ và $\theta \times a = [\theta a^U,\ \theta a^L]$ nếu trái lại.

Ishibuchi và Tanaka (1990) đã giới thiệu các quan hệ thứ tự sau:

(A) $a \leq_{LU} b$ nếu và chỉ nếu $a = [a^L,\ a^U]$, $b = [b^L,\ b^U]$ thỏa mãn $a^U \leq b^U$ và $a^L \leq b^L$.

(B) $a <_{LU} b$ nếu và chỉ nếu $a \leq_{LU} b$ và $a \neq b$.

2.2. Định nghĩa

Định nghĩa 1 **(toán tử đại số)** Xét các toán tử đại số trên $a, b \in \mathbf{J}(\mathbf{R})$ với $a = [a^L,\ a^U]$ và $b = [b^L,\ b^U]$ được định nghĩa như sau:

$$a + b = [a^L + b^L,\ a^U + b^U],$$

$$ab = \begin{bmatrix} \min\{a^L b^L,\ a^L b^U, a^U b^L, a^U b^U\}, \\ \max\{a^L b^L,\ a^L b^U, a^U b^L, a^U b^U\} \end{bmatrix}.$$

Định nghĩa 2 **(**phép toán gH-sai phân**)** Xét các khoảng tùy ý $a, b \in \mathbf{J}(\mathbf{R})$ với $a = [a^L,\ a^U]$ và $b = [b^L,\ b^U]$, khi đó phép toán gH-sai phân định định nghĩa là:

$$a -_g b = \begin{bmatrix} \min\{a^L - b^L,\ a^U - b^U\}, \\ \max\{a^L - b^L,\ a^U - b^U\} \end{bmatrix}.$$

Định nghĩa 3 **(**phép toán g-chia**)** Xét các khoảng $a, b, c \in \mathbf{J}(\mathbf{R})$ với $a = [a^L,\ a^U]$ và $0 \notin b = [b^L,\ b^U]$, khi đó phép toán g-chia định định nghĩa như sau:

$a \div_g b = c$ khi và chỉ khi $a = bc$ hoặc $b = ac^{-1}$.

2.3. Đặc trưng của phép toán g-chia

Mệnh đề 4 (đặc trưng phép toán gH-sai phân**)** Cho các khoảng tùy ý $a, b \in \mathbf{J}(\mathbf{R})$ trong đó $a = [a^L,\ a^U]$ và $b = [b^L,\ b^U]$. Khi đó, với khoảng $c \in \mathbf{J}(\mathbf{R})$ ta có $a -_g b = c$ khi và chỉ khi $a = b + c$ hoặc $b = a + (-1)c$.

Chứng minh: Đặt $c = [c^L,\ c^U]$. Theo định nghĩa 2, ta có $a -_g b = c$ tương đương với hệ sau đúng:

$$\begin{cases} c^L = \min\{a^L - b^L,\ a^U - b^U\} \\ c^U = \max\{a^L - b^L,\ a^U - b^U\} \end{cases}.$$

Nếu $c^L = a^L - b^L$, thì $c^U = a^U - b^U$. Do đó, $a^L = b^L + c^L$ và $a^U = b^U + c^U$. Theo định nghĩa 1, $a = b + c$.

Nếu trái lại, ta có $c^U = a^L - b^L$ và $c^L = a^U - b^U$. Do đó, $b^L = a^L - c^U$ và $b^U = a^U - c^L$. Theo (2) và định nghĩa 1, $b = a + (-1)c$. □

Định lý 5 (đặc trưng phép toán g-chia**)** Cho các khoảng $a = [a^L,\ a^U]$, $b = [b^L,\ b^U] \in \mathbf{J}(\mathbf{R})$ trong đó $a^U \geq a^L > 0 > b^U \geq b^L$. Khi đó với khoảng $c \in \mathbf{J}(\mathbf{R})$ thỏa mãn $a \div_g b = c$ ta có:

(i) Nếu $a^L b^L \geq a^U b^U$, thì $a = b\left[\frac{a^U}{b^L}, \frac{a^L}{b^U}\right]$.

(ii) Nếu $a^L b^L \leq a^U b^U$, thì $b = a\left[\frac{a^L}{b^U}, \frac{a^U}{b^L}\right]^{-1}$.

Chứng minh:

Đặt $c := [c^L,\ c^U]$ và theo định nghĩa 1, ta có

$$ac = \begin{bmatrix} \min\{a^L c^L,\ a^L c^U, a^U c^L, a^U c^U\}, \\ \max\{a^L c^L,\ a^L c^U, a^U c^L, a^U c^U\} \end{bmatrix}$$ và

$$bc = \begin{bmatrix} \min\{b^L c^L,\ b^L c^U, b^U c^L, b^U c^U\}, \\ \max\{b^L c^L,\ b^L c^U, b^U c^L, b^U c^U\} \end{bmatrix}.$$

(i) Giả sử $c = \left[\frac{a^U}{b^L}, \frac{a^L}{b^U}\right]$ và $a^L b^L \geq a^U b^U$. Khi đó:

$$b^L c^L = b^L \frac{a^U}{b^L} = a^U,$$

$$b^U c^U = b^U \frac{a^L}{b^U} = a^L,$$

$$a^U \geq b^L c^U = b^L \frac{a^L}{b^U} \geq a^L,$$

$$a^L \leq b^U c^L = b^U \frac{a^U}{b^L} \leq a^U,$$

Do đó:

$$\min\{b^L c^L,\ b^L c^U, b^U c^L, b^U c^U\} = a^L,$$

$$\max\{b^L c^L,\ b^L c^U, b^U c^L, b^U c^U\} = a^U.$$

Vậy $a = b\left[\frac{a^U}{b^L}, \frac{a^L}{b^U}\right]$.

(ii) Đặt $c = [c^L,\ c^U] = \left[\frac{a^L}{b^U}, \frac{a^U}{b^L}\right]^{-1}$. Ta có từ (3):

$$\left[\frac{a^L}{b^U}, \frac{a^U}{b^L}\right]^{-1} = \left[\frac{b^L}{a^U}, \frac{b^U}{a^L}\right].$$

Do đó:

$$c = [c^L,\ c^U] := \left[\frac{b^L}{a^U}, \frac{b^U}{a^L}\right].$$

Giả sử $a^L b^L \leq a^U b^U$. Ta có

$$b^U \geq a^L c^L = a^L \frac{b^L}{a^U} \geq b^L,$$

$$a^L c^U = a^L \frac{b^U}{a^L} = b^U,$$

$$a^U c^L = a^U \frac{b^L}{a^U} = b^L,$$

$$b^L \leq a^U c^U = a^U \frac{b^U}{a^L} \leq b^U.$$

Do đó:

$$\min\{a^L c^L,\ a^L c^U, a^U c^L, a^U c^U\} = b^L,$$

$$\max\{a^L c^L,\ a^L c^U, a^U c^L, a^U c^U\} = b^U.$$

Hệ quả trực tiếp là $b = a\left[\frac{a^L}{b^U}, \frac{a^U}{b^L}\right]^{-1}$. □

Định lý 6 (đặc trưng phép toán g-chia**)** Cho các khoảng $a = [a^L,\ a^U]$, $b = [b^L,\ b^U] \in \mathbf{J}(\mathbf{R})$ trong đó $a^U \geq a^L > 0$, $b^U \geq b^L > 0$. Khi đó với khoảng $c \in \mathbf{J}(\mathbf{R})$ thỏa mãn $a \div_g b = c$ ta có:

(i) Nếu $a^L b^U \leq a^U b^L$, thì $a = b\left[\frac{a^L}{b^L}, \frac{a^U}{b^U}\right]$.

(ii) Nếu $a^L b^U \geq a^U b^L$, thì $b = a\left[\frac{a^U}{b^U}, \frac{a^L}{b^L}\right]^{-1}$.

Chứng minh:

(i) Giả sử $c = [c^L,\ c^U] = \left[\frac{a^L}{b^L}, \frac{a^U}{b^U}\right]$ thỏa mãn

$$a^L b^U \leq a^U b^L.$$

Ta có: $b^L c^L = b^L \frac{a^L}{b^L} = a^L,\ b^U c^U = b^U \frac{a^U}{b^U} = a^U,$

$$a^U \geq b^L c^U = b^L \frac{a^U}{b^U} \geq a^L,$$

$$a^L \leq b^U c^L = b^U \frac{a^L}{b^L} \leq a^U.$$

Suy ra

$$\min\{b^L c^L,\ b^L c^U, b^U c^L, b^U c^U\} = a^L,$$
$$\max\{b^L c^L,\ b^L c^U, b^U c^L, b^U c^U\} = a^U.$$

Vậy $a =$b$\left[\frac{a^L}{b^L}, \frac{a^U}{b^U}\right]$.

(ii) Đặt $c = [c^L,\ c^U] = \left[\frac{a^U}{b^U}, \frac{a^L}{b^L}\right]^{-1}$ và giả sử thêm rằng $a^L b^U \geq a^U b^L$. Từ tính chất (3) suy ra $\left[\frac{a^U}{b^U}, \frac{a^L}{b^L}\right]^{-1} = \left[\frac{b^L}{a^L}, \frac{b^U}{a^U}\right]$ và $c = [c^L,\ c^U] = \left[\frac{b^L}{a^L}, \frac{b^U}{a^U}\right]$.

Ta có: $a^L c^L = a^L \frac{b^L}{a^L} = b^L,\ a^U c^U = a^U \frac{b^U}{a^U} = b^U,$

$$b^U \geq a^L c^U = a^L \frac{b^U}{a^U} \geq b^L,$$

$$b^U \geq a^U c^L = a^U \frac{b^L}{a^L} \geq b^L.$$

Do đó:

$$\min\{a^L c^L,\ a^L c^U, a^U c^L, a^U c^U\} = b^L,$$
$$\max\{a^L c^L,\ a^L c^U, a^U c^L, a^U c^U\} = b^U.$$

Áp dụng định nghĩa 3, $b = a\left[\frac{a^U}{b^U}, \frac{a^L}{b^L}\right]^{-1}$. □

Định lý 7 (đặc trưng phép toán g-chia**)** Cho các khoảng $a = [a^L,\ a^U]$, $b = [b^L,\ b^U] \in \mathbf{J}(\mathbf{R})$ trong đó $0 > a^U \geq a^L$, $0 > b^U \geq b^L$. Khi đó với khoảng $c \in \mathbf{J}(\mathbf{R})$ thỏa mãn $a \div_g b = c$ ta có:

(i) Nếu $a^U b^L \leq a^L b^U$, thì $a =$b$\left[\frac{a^U}{b^U}, \frac{a^L}{b^L}\right]$.

(ii) Nếu $a^U b^L \geq a^L b^U$, thì $b = a\left[\frac{a^L}{b^L}, \frac{a^U}{b^U}\right]^{-1}$.

Chứng minh:

(i) Giả sử $c = [c^L,\ c^U] = \left[\frac{a^U}{b^U}, \frac{a^L}{b^L}\right]$, $a^U b^L \leq a^L b^U$. Ta có: $b^L c^U = b^L \frac{a^L}{b^L} = a^L$, $b^U c^L = b^U \frac{a^U}{b^U} = a^U$, $a^U \geq b^L c^L = b^L \frac{a^U}{b^U} \geq a^L$,

$$a^L \leq b^U c^U = b^U \frac{a^L}{b^L} \leq a^U.$$

Suy ra

$$\min\{b^L c^L,\ b^L c^U, b^U c^L, b^U c^U\} = a^L,$$
$$\max\{b^L c^L,\ b^L c^U, b^U c^L, b^U c^U\} = a^U.$$

Vậy $a =$b$\left[\frac{a^U}{b^U}, \frac{a^L}{b^L}\right]$.

(ii) Đặt $c = [c^L,\ c^U] = \left[\frac{a^L}{b^L}, \frac{a^U}{b^U}\right]^{-1}$ và giả sử thêm rằng $a^U b^L \geq a^L b^U$. Từ tính chất (3) suy ra $\left[\frac{a^L}{b^L}, \frac{a^U}{b^U}\right]^{-1} = \left[\frac{b^U}{a^U}, \frac{b^L}{a^L}\right]$ và $c = [c^L,\ c^U] = \left[\frac{b^U}{a^U}, \frac{b^L}{a^L}\right]$.

Ta có: $a^L c^U = a^L \frac{b^L}{a^L} = b^L,\ a^U c^L = a^U \frac{b^U}{a^U} = b^U,$

$$b^U \geq a^L c^L = a^L \frac{b^U}{a^U} \geq b^L,$$

$$b^U \geq a^U c^U = a^U \frac{b^L}{a^L} \geq b^L.$$

Do đó:

$$\min\{a^L c^L,\ a^L c^U, a^U c^L, a^U c^U\} = b^L,$$
$$\max\{a^L c^L,\ a^L c^U, a^U c^L, a^U c^U\} = b^U.$$

Áp dụng định nghĩa 3, $b = a\left[\frac{a^L}{b^L}, \frac{a^U}{b^U}\right]^{-1}$. □

Định lý 8 (đặc trưng phép toán g-chia**)** Cho các khoảng $a = [a^L,\ a^U]$, $b = [b^L,\ b^U] \in \mathbf{J}(\mathbf{R})$ trong đó $b^U \geq b^L > 0 > a^U \geq a^L$. Khi đó với khoảng $c \in \mathbf{J}(\mathbf{R})$ thỏa mãn $a \div_g b = c$ ta có:

(i) Nếu $a^L b^L \leq a^U b^U$, thì $a =$b$\left[\frac{a^L}{b^U}, \frac{a^U}{b^L}\right]$.

(ii) Nếu $a^L b^L \geq a^U b^U$, thì $b = a\left[\frac{a^U}{b^L}, \frac{a^L}{b^U}\right]^{-1}$.

Chứng minh:

(i) Giả sử $c = [c^L,\ c^U] = \left[\frac{a^L}{b^U}, \frac{a^U}{b^L}\right]$, $a^L b^L \leq a^U b^U$. Ta có: $b^L c^U = b^L \frac{a^U}{b^L} = a^U$, $b^U c^L = b^U \frac{a^L}{b^U} = a^L$,

$$a^U \geq b^L c^L = b^L \frac{a^L}{b^U} \geq a^L,$$

$$a^L \le b^U c^U = b^U \frac{a^U}{b^L} \le a^U.$$

Suy ra

$$\min\{b^L c^L,\ b^L c^U, b^U c^L, b^U c^U\} = a^L,$$
$$\max\{b^L c^L,\ b^L c^U, b^U c^L, b^U c^U\} = a^U.$$

Vậy $a =$b$\left[\frac{a^L}{b^U}, \frac{a^U}{b^L}\right]$.

(ii) Đặt $c = [c^L,\ c^U] = \left[\frac{a^U}{b^L}, \frac{a^L}{b^U}\right]^{-1}$ và giả sử thêm rằng $a^L b^L \ge a^U b^U$. Từ tính chất (3) suy ra $\left[\frac{a^U}{b^L}, \frac{a^L}{b^U}\right]^{-1} = \left[\frac{b^U}{a^L},\ \frac{b^L}{a^U}\right]$ và $c = [c^L,\ c^U] = \left[\frac{b^U}{a^L},\ \frac{b^L}{a^U}\right]$.

Ta có: $a^L c^L = a^L \frac{b^U}{a^L} = b^U,\ a^U c^U = a^U \frac{b^L}{a^U} = b^L,$

$$b^U \ge a^L c^U = a^L \frac{b^L}{a^U} \ge b^L,$$
$$b^U \ge a^U c^L = a^U \frac{b^U}{a^L} \ge b^L.$$

Do đó:

$$\min\{a^L c^L,\ a^L c^U, a^U c^L, a^U c^U\} = b^L,$$
$$\max\{a^L c^L,\ a^L c^U, a^U c^L, a^U c^U\} = b^U.$$

Áp dụng định nghĩa 3, $b = a\left[\frac{a^U}{b^L}, \frac{a^L}{b^U}\right]^{-1}$. □

Định lý 9 Cho các khoảng $b = [b^L,\ b^U] \in \mathbf{J}(\mathbf{R})$ và $0 \notin b$. Khi đó, ta có

$$b \mathrel{\vdots_g} b^{-1} = [b^L b^U,\ b^L b^U],\quad b \mathrel{\vdots_g} b^{-1} = 1,$$
$$1 \mathrel{\vdots_g} b = b^{-1},\quad 1 \mathrel{\vdots_g} b^{-1} = b.$$

Chứng minh:

Ta có từ (3): $b^{-1} = [b^L,\ b^U]^{-1} = \left[\frac{1}{b^U}, \frac{1}{b^L}\right]$.

Đặt $c = [c^L,\ c^U] \coloneqq [b^L b^U,\ b^L b^U]$. Ta có

$$b^{-1}c = \begin{bmatrix}\min\{b^{-U}c^L,\ b^{-U}c^U, b^{-L}c^L, b^{-L}c^U\}, \\ \max\{b^{-U}c^L,\ b^{-U}c^U, b^{-L}c^L, b^{-L}c^U\}\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}\min\{\frac{1}{b^U}b^L b^U, \frac{1}{b^U}\ b^L b^U, \frac{1}{b^L}b^L b^U, \frac{1}{b^L}b^L b^U\}, \\ \max\{\frac{1}{b^U}b^L b^U, \frac{1}{b^U}b^L b^U, \frac{1}{b^L}b^L b^U, \frac{1}{b^L}b^L b^U\}\end{bmatrix}$$
$$= [\min\{b^L,\ b^U\},\ \max\{b^L,\ b^U\}] = b.$$

Mặt khác, ta xét

$$bc^{-1} = [b^L,\ b^U][b^L b^U,\ b^L b^U]^{-1}$$
$$= [b^L,\ b^U]\left[\frac{1}{b^L b^U}, \frac{1}{b^L b^U}\right]$$
$$= \left[\min\left\{\frac{1}{b^U},\ \frac{1}{b^L}\right\},\ \max\left\{\frac{1}{b^U},\ \frac{1}{b^L}\right\}\right]$$
$$= [\min\{b^L,\ b^U\},\ \max\{b^L,\ b^U\}]^{-1}$$
$$= [b^L,\ b^U]^{-1} = b^{-1}.$$

Áp dụng định nghĩa 3 ta được

$$b \mathrel{\vdots_g} b^{-1} = [b^L b^U,\ b^L b^U].$$

Các đẳng thức tiếp theo được suy ra trực tiếp từ định nghĩa 3 và hơn nữa,

$$1.\, b = b = (b^{-1})^{-1}$$

với mọi khoảng b không chứa 0.

Điều này kết thúc chứng minh. □

Ví dụ 1. Cho khoảng đóng $b = [-3,\ -2] \in \mathbf{J}(\mathbf{R})$ và hiển nhiên $0 \notin b$. Khi đó áp dụng định nghĩa 3, ta nhận được $b \mathrel{\vdots_g} b$ bằng $\left[\frac{-3}{-3},\ \frac{-2}{-2}\right]$ hoặc $\left[\frac{-2}{-2},\ \frac{-3}{-3}\right]$.

Vậy $b \mathrel{\vdots_g} b = 1$. Ta có $b^{-1} = \left[\frac{1}{-2},\ \frac{1}{-3}\right]$. Do đó,

$b \mathrel{\vdots_g} b^{-1} = \left[\frac{-3}{-\frac{1}{2}},\ \frac{-2}{-\frac{1}{3}}\right]$ hoặc $b \mathrel{\vdots_g} b^{-1} = \left[\frac{-2}{-\frac{1}{3}},\ \frac{-3}{-\frac{1}{2}}\right]$.

Hệ quả $b \mathrel{\vdots_g} b^{-1} = [6,\ 6], 1 \mathrel{\vdots_g} b = \left[\frac{1}{-2}, \frac{1}{-3}\right] = b^{-1}$ và $1 \mathrel{\vdots_g} b^{-1} = \left[\frac{1}{-\frac{1}{3}},\ \frac{1}{-\frac{1}{2}}\right] = [-3,\ -2] =$ b. Tiếp theo ta xét khoảng đóng $a = -b = [2,\ 3]$. Tương tự ta có $a \mathrel{\vdots_g} a$ bằng $\left[\frac{2}{2},\ \frac{3}{3}\right]$ hoặc $\left[\frac{3}{3},\ \frac{2}{2}\right]$. Suy ra $a \mathrel{\vdots_g} a = 1$. Ta có $a^{-1} = \left[\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right]$. Vì vậy, $a \mathrel{\vdots_g} a^{-1}$ bằng $\left[\frac{2}{\frac{1}{3}},\ \frac{3}{\frac{1}{2}}\right]$ hoặc $\left[\frac{3}{\frac{1}{2}},\ \frac{2}{\frac{1}{3}}\right]$. Do đó, $a \mathrel{\vdots_g} a^{-1} = [6,\ 6]$, $1 \mathrel{\vdots_g} a = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right] = a^{-1}$ và $1 \mathrel{\vdots_g} a^{-1} = \left[\frac{1}{\frac{1}{2}},\ \frac{1}{\frac{1}{3}}\right] = [2,\ 3] = -$b $= $ a.

Định lý 10 Cho các khoảng đóng bị chặn $a = [a^L,\ a^U]$, $b = [b^L,\ b^U] \in \mathbf{J}(\mathbf{R})$ và $0 \notin b$. Khi đó:

(i) $(ab) \mathrel{\vdots_g} b = a$.

(ii) ít nhất một trong các đẳng thức $b(a \mathrel{\vdots_g} b) = a$ hoặc $a(a \mathrel{\vdots_g} b)^{-1} = b$ đúng.

(iii) $a \mathrel{\vdots_g} b = \{e\}$ khi và chỉ khi $b(a \mathrel{\vdots_g} b) = a$ và $a(a \mathrel{\vdots_g} b)^{-1} = b$.

Chứng minh:

(i) Theo định nghĩa 3, $(ab) \mathrel{\vdots_g} b = a$ là hiển nhiên.

(ii) Đặt $a \div_g b = c$. Theo định nghĩa 3, luôn xảy ra $a = bc$ hoặc $b = ac^{-1}$.

Nếu xảy ra đẳng thức $a = bc$, thì, theo (i) ta suy ra $a \div_g b = (bc) \div_g b = (cb) \div_g b = c$.

Do đó: $b(a \div_g b) = bc = a$. Nếu xảy ra đẳng thức $b = ac^{-1}$, hay tương đương $b = a(a \div_g b)^{-1}$.

Chú ý (iii) là kết quả tầm thường.

Điều này kết thúc chứng minh. □

Ví dụ 2. Cho các khoảng đóng đóng $a = [1,\ 4]$, $b = [-3,\ -2] \in \mathbf{J}(\mathbf{R})$ và hiển nhiên $0 \notin a, b$. Khi đó $ab = [-12, -2]$ và áp dụng định nghĩa 3, ta nhận được $(ab) \div_g b = \left[\frac{-2}{-2},\ \frac{-12}{-3}\right] = [1,\ 4] = a$. Nếu ta chọn các khoảng đóng $a = [1,\ 4]$ và $0 \notin b = [2, 3] \in \mathbf{J}(\mathbf{R})$. Khi đó $ab = [2, 12]$ và áp dụng định nghĩa 3 ta có $(ab) \div_g b = \left[\frac{2}{2}, \frac{12}{3}\right] = [1, 4] = a$.

Nếu ta chọn các khoảng đóng đóng $a = [-4, -1]$, $b = [-3,\ -2] \in \mathbf{J}(\mathbf{R})$ và hiển nhiên $0 \notin a, b$. Khi đó $ab = [2, 12]$ và áp dụng định nghĩa 3, ta nhận được $(ab) \div_g b = \left[\frac{12}{-3},\ \frac{2}{-2}\right] = [-4, -1] = a$.

Nếu ta chọn các khoảng đóng đóng $a = [-4, -1]$, $b = [2,\ 3] \in \mathbf{J}(\mathbf{R})$ và hiển nhiên $0 \notin a, b$. Khi đó $ab = [-12, -2]$ và áp dụng định nghĩa 3, ta nhận được $(ab) \div_g b = \left[\frac{-12}{3},\ \frac{-2}{2}\right] = [-4, -1] = a$.

Ví dụ 3. Cho các khoảng đóng đóng $a = [2,\ 9]$, $b = [-3,\ -2] \in \mathbf{J}(\mathbf{R})$ và hiển nhiên $0 \notin a, b$. Khi đó $a \div_g b = [-3, -1]$ và theo định nghĩa 3, ta được $b(a \div_g b) = [-3,\ -2][-3, -1] = [2,\ 9] = a$. Mặt khác $(a \div_g b)^{-1} = \left[-1, -\frac{1}{3}\right]$. Suy ra

$$a(a \div_g b)^{-1} = [2, 9]\left[-1, -\frac{1}{3}\right] = \left[-9, -\frac{2}{3}\right] \neq b.$$

Nếu ta chọn các khoảng đóng đóng $a = [2,\ 9]$, $b = [2,\ 3] \in \mathbf{J}(\mathbf{R})$ và hiển nhiên $0 \notin a, b$. Khi đó $a \div_g b = [1, 3]$ và theo định nghĩa 3, ta được $b(a \div_g b) = [2,\ 3][1, 3] = [2,\ 9] = a$. Mặt khác $(a \div_g b)^{-1} = \left[\frac{1}{3},\ 1\right]$. Suy ra

$$a(a \div_g b)^{-1} = [2, 9]\left[\frac{1}{3}, 1\right] = \left[\frac{2}{3}, 9\right] \neq b.$$

Nếu ta chọn các khoảng đóng đóng $a = [-9, -2]$, $b = [-3, -2] \in \mathbf{J}(\mathbf{R})$ và hiển nhiên $0 \notin a, b$. Khi đó $a \div_g b = [1, 3]$ và theo định nghĩa 3, ta được $b(a \div_g b) = [-3, -2][1, 3] = [-9, -2] = a$. Mặt khác $(a \div_g b)^{-1} = \left[\frac{1}{3},\ 1\right]$. Suy ra

$$a(a \div_g b)^{-1} = [-9, -2]\left[\frac{1}{3}, 1\right] = \left[-3, -\frac{2}{3}\right] \neq b.$$

3. Áp dụng trong xây dựng mô hình toán học của một nhà máy sản xuất

Để giảm chi phí sản xuất đến mức thấp nhất có thể trong ngành công nghiệp chế tạo thép hiện nay, các nhà sản xuất sử dụng kỹ thuật pha trộn thép nhằm giúp họ tối ưu hóa thành phần thép để đáp ứng các yêu cầu hiệu suất chính xác của nhiều ngành công nghiệp, bao gồm ô tô, xây dựng, hàng không vũ trụ, vận tải, y tế và chăm sóc sức khỏe, đồ nội thất và đồ trang trí nhà cửa, cùng nhiều ngành khác.

Trong tiểu mục này, chúng tôi xây dựng mô hình toán học cho bài toán pha trộn thép được xem như một bài toán quy hoạch phân số giá trị khoảng với các ràng buộc bất đẳng thức. Chúng tôi giả thiết rằng một loại thép có chất lượng cụ thể nặng 907kg được tạo ra bằng cách pha trộn 11 loại thép cơ bản khác nhau. Thép pha trộn được làm từ thép cơ bản phải đáp ứng một số yêu cầu về chất lượng. Ví dụ, thành phần cacbon phải đạt ít nhất 3% và 3,5% tương ứng ở giới hạn dưới và giới hạn trên của thép pha trộn. Vì tổng trọng lượng hỗn hợp là 907kg, thành phần cacbon được đưa ra là 3% của 907kg và 3,5% của 907kg. Các yêu cầu về chất lượng của thép hỗn hợp được liệt kê trong Bảng 1:

Bảng 1. Yêu cầu chất lượng của thép pha trộn

Thành phần	$min_{q_j^L}$ %	$min_{q_j^U}$ %	q_j^L (kg)	q_j^U (kg)
Carbon	3.00	3.50	27	32
Chrome	0.30	0.45	3	4
Mangan	1.35	1.65	12	15
Silicon	2.70	3.00	24	27

Trong bài toán này, mười một loại thép cơ bản riêng biệt được sử dụng để sản xuất thép hỗn hợp. Các loại thép cơ bản (u_i) và phạm vi phần trăm của các thành phần Carbon $[q_{i1}^L, q_{i1}^U]$. Crom $[q_{i2}^L, q_{i2}^U]$, Mangan $[q_{i3}^L, q_{i3}^U]$ và Silicon $[q_{i4}^L, q_{i4}^U]$ được liệt kê trong Bảng 2:

Bảng 2. Yêu cầu chất lượng của thép cơ bản

(q_{ij})	Carbon		Crom		Mangan		Silicon	
(u_i)	q_{i1}^L	q_{i1}^U	q_{i2}^L	q_{i2}^U	q_{i3}^L	q_{i3}^U	q_{i4}^L	q_{i4}^U
Pig Iron 1	0.016	0.020	0.000	0.000	0.002	0.006	0.008	0.012
Pig Iron 2	0.000	0.000	0.043	0.048	0.020	0.025	0.066	0.070
Ferro Silicon 1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.202	0.206
Ferro Silicon 2	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.188	0.193
Alloy 1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.270	0.274	0.079	0.084
Alloy 2	0.000	0.000	0.088	0.093	0.039	0.043	0.134	0.138
Alloy 3	0.000	0.000	0.034	0.039	0.147	0.152	0.111	0.117
Carbide	0.066	0.070	0.000	0.000	0.000	0.000	0.134	0.138
Steel 1	0.159	0.204	0.000	0.000	0.181	0.204	0.000	0.000
Steel 2	0.000	0.001	0.000	0.000	0.001	0.002	0.000	0.000
Steel 3	0.000	0.001	0.000	0.000	0.001	0.002	0.000	0.000

Vì chi phí phụ thuộc vào điều kiện thị trường và nhà cung ứng, chúng tôi đã lấy chi phí của thép cơ bản làm một khoảng. Chi phí cho mỗi kg thép cơ bản (VNĐ) và tính khả dụng của từng loại thép cơ bản được cung cấp trong Bảng 3:

Bảng 3. Chi phí và vốn có sẵn của thép cơ bản

Thép cơ bản	c_i^L (VNĐ)	c_i^U (VNĐ)	Vốn có sẵn (a_i)
Pig Iron 1	1250	1750	68 kg
Pig Iron 2	3075	3475	317 kg
Ferro Silicon 1	3000	3250	54 kg
Ferro Silicon 2	2800	3300	80 kg
Alloy 1	4750	5250	36 kg
Alloy 2	6250	6750	14 kg
Alloy 3	5700	6200	113 kg
Carbide	3750	4250	816 kg
Steel 1	900	1300	82 kg
Steel 2	750	1250	272 kg
Steel 3	725	1225	104 kg

Tổng chi phí của thép pha trộn được đưa ra như sau:

$\sum_{i=1}^{11} c_i u_i = [1250u_1 + 3075u_2 + \cdots + 750u_{10} + 725u_{11},\ 175u_1 + 3475u_2 + \cdots + 1250u_{10} + 1225u_{11}]$

Yêu cầu về chất lượng cacbon đối với thép cơ bản:

$\sum_{i=1}^{11} q_{i1} u_i = [0.016u_1 + 0.066u_8 + 0.159u_9,\ 0.02u_1 + 0.07u_8 + 0.204u_9 + 0.001u_{10} + 0.001u_{11}]$

Yêu cầu về chất lượng Crom đối với thép cơ bản:

$\sum_{i=1}^{11} q_{i2} u_i = [0.043u_2 + 0.088u_6 + 0.034u_7,\ 0.048u_2 + 0.093u_6 + 0.039u_7]$

Yêu cầu về chất lượng Mangan đối với thép cơ bản:

$\sum_{i=1}^{11} q_{i3} u_i = [0.002u_1 + 0.02u_2 + 0.270u_5 + 0.039u_6 + 0.147u_7 + 0.181u_9 + 0.001u_{10} + 0.002u_{11},\ 0.006u_1 + 0.025u_2 + 0.274u_5 + 0.043u_6 + 0.152u_7 + 0.204u_9 + 0.001u_{10} + 0.002u_{11}]$

Yêu cầu về chất lượng Silicon đối với thép cơ bản:

$\sum_{i=1}^{11} q_{i4} u_i = [0.008u_1 + 0.066u_2 + 0.202u_3 + 0.188u_4 + 0.079u_5 + 0.134u_6 + 0.111u_7 + 0.134u_8,\ 0.012u_1 + 0.07u_2 + 0.206u_3 + 0.193u_4 + 0.084u_5 + 0.138u_6 + 0.117u_7 + 0.138u_8]$

Yêu cầu về chất lượng Cacbon, Crom, Mangan và Silicon trong thép cơ bản được đưa ra bởi biểu thức:

$\sum_{i=1}^{11}\sum_{j=1}^{4} q_{ij}u_i =$
$[0.026u_1 + 0.129u_2 + 0.202u_3 + 0.188u_4 + 0.349u_5 + 0.261u_6 + 0.292u_7 + 0.2u_8 + 0.34u_9 + 0.001u_{10} + 0.001u_{11},\ 0.038u_1 + 0.143u_2 + 0.206u_3 + 0.193u_4 + 0.358u_5 + 0.274u_6 + 0.308u_7 + 0.208u_8 + 0.408u_9 + 0.003u_{10} + 0.003u_{11}]$

Mô hình toán học của bài toán sản xuất thép được xây dựng dưới dạng:

$\min\left(\sum_{i=1}^{11} c_i u_i\right) \vdots_g \left(\sum_{i=1}^{11}\sum_{j=1}^{4} q_{ij}u_i\right) := M$

thỏa mãn hệ ràng buộc sau:

$$\left[q_j^L - \sum_{i=1}^{11} q_{ij}^L u_i, q_j^U - \sum_{i=1}^{11} q_{ij}^U u_i\right] \leq_{LU} [0,0],$$
$$j = 1,2,3,4;$$

$\sum_{i=1}^{11} u_i = 907;$

$0 \leq u_i \leq a_i, \qquad i = 1,2,3,\dots,10,11.$

Để ý rằng

$M := \left(\sum_{i=1}^{11} c_i u_i\right) \vdots_g \left(\sum_{i=1}^{11}\sum_{j=1}^{4} q_{ij}u_i\right)$ và không khó để suy ra $M = \left[\frac{\sum_{i=1}^{11} c_i^L u_i}{\sum_{i=1}^{11}\sum_{j=1}^{4} q_{ij}^L u_i}, \frac{\sum_{i=1}^{11} c_i^U u_i}{\sum_{i=1}^{11}\sum_{j=1}^{4} q_{ij}^U u_i}\right]$.

Từ đây ta có mô hình toán học của bài toán sản xuất thép giá trị khoảng như sau:

$$\min\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{11} c_i^L u_i - \beta^L(\breve{u})\sum_{i=1}^{11}\sum_{j=1}^{4} q_{ij}^L u_i, \\ \sum_{i=1}^{11} c_i^U u_i - \beta^U(\breve{u})\sum_{i=1}^{11}\sum_{j=1}^{4} q_{ij}^U u_i\end{bmatrix}$$

thỏa mãn hệ ràng buộc sau:

$$\left[27 - \sum_{i=1}^{11} q_{i1}^L u_i, 32 - \sum_{i=1}^{11} q_{i1}^U u_i\right] \leq_{LU} [0,0],$$
$$\left[3 - \sum_{i=1}^{11} q_{i2}^L u_i, 4 - \sum_{i=1}^{11} q_{i2}^U u_i\right] \leq_{LU} [0,0],$$
$$\left[12 - \sum_{i=1}^{11} q_{i3}^L u_i, 15 - \sum_{i=1}^{11} q_{i3}^U u_i\right] \leq_{LU} [0,0],$$
$$\left[24 - \sum_{i=1}^{11} q_{i4}^L u_i, 27 - \sum_{i=1}^{11} q_{i4}^U u_i\right] \leq_{LU} [0,0],$$

$\sum_{i=1}^{11} u_i = 907;\quad 0 \leq u_1 \leq 68;\quad 0 \leq u_2 \leq 317;$
$0 \leq u_3 \leq 54;\quad 0 \leq u_4 \leq 80;\quad 0 \leq u_5 \leq 36;$
$0 \leq u_6 \leq 14;\quad 0 \leq u_7 \leq 113;\quad 0 \leq u_8 \leq 816;$
$0 \leq u_9 \leq 82;\quad 0 \leq u_{10} \leq 272;\quad 0 \leq u_{11} \leq 104.$

Chú ý rằng trong mô hình này ta chọn

$\breve{u} = (0, 85.71, 120, 80, 170, 0, 0, 1364.29, 180, 0, 0)$

và do đó:

$\beta(\breve{u}) = \left[\frac{\sum_{i=1}^{11} c_i^L u_i}{\sum_{i=1}^{11}\sum_{j=1}^{4} q_{ij}^L u_i}, \frac{\sum_{i=1}^{11} c_i^U u_i}{\sum_{i=1}^{11}\sum_{j=1}^{4} q_{ij}^U u_i}\right]$, hay là

$\beta(\breve{u}) = [0.1644, 0.1786].$

Nhận xét: Tính đến thời điểm hiện tại bài toán quy hoạch toán học nhận giá trị khoảng được thiết lập trên vẫn chưa có phương pháp giải cụ thể và điều kiện tối ưu cho nghiệm cũng chưa được thiết lập. Vấn đề này sẽ được nhóm chúng tôi tiếp tục nghiên cứu trong thời gian tới.

4. Kết luận

Trong bài báo chúng tôi đã thiết lập được một số đặc trưng của phép toán g-chia bao gồm đặc trưng phép toán gH-sai phân cùng với một vài ví dụ minh họa cho kết quả đạt được. Kết quả này được áp dụng trong nghiên cứu xây dựng mô hình toán học cho bài toán sản xuất thép có ràng buộc bất đẳng thức trong đó hàm mục tiêu nhận giá trị khoảng. Các kết quả đạt được của bài báo nghiên cứu là mới và chưa từng thảo luận trước đây.

Lời cảm ơn: Nghiên cứu khoa học của nhóm sinh viên lớp 23ST2 hiện tại được tài trợ bởi Trường Đại học Sư Phạm - Đại học Đà Nẵng.

Tài liệu tham khảo

Chalco-Cano, Y., Maqui-Huaman, G. G., Silva, G. N., & Jiménez-Gamero, M.-D. (2019). Algebra of generalized hukuhara differentiable interval-valued functions: review and new properties, *Fuzzy Sets and Systems*, vol 375, pp. 53-69. https://doi.org/10.1016/j.fss.2019.04.006

Ghosh, D. (2017). Newton method to obtain efficient solutions of the optimization problems with interval-valued objective functions, *Journal of Applied Mathematics and Computing*, vol 53. pp. 709-731. https://doi.org/10.1007/s12190-016-0990-2

Hu, N., & Duan, B. (2018). An efficient robust optimization method with random and interval uncertainties, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 58, pp. 229-243. https://doi.org/10.1007/s00158-017-1892-0

Ishibuchi, H., H., & Tanaka, H. (1990). Multiobjective programming in optimization of the interval objective function, *European journal of operational research*, vol 48 (2), pp. 219-225.

https://doi.org/10.1016/0377-2217(90)90375-L

Moore, R. E., Kearfott, R. B., & Cloud, M. J. (2009). Introduction to interval analysis, *SIAM*. https://doi.org/10.2307/40590421

Rahman, M. S. (2022). Optimality theory of an unconstrained interval optimization problem in parametric form: its application in inventory control, *Results in Control and Optimization*, vol 7, article 100111. https://doi.org/10.1016/j.rico.2022.100111

Roy, P., Panda, G., Qiu, D. (2024). Gradient-based descent linesearch to solve interval-valued optimization problems under gh-differentiability with application to finance, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol 436, article 115402. https://doi.org/10.1016/j.cam.2023.115402

Stefanini, L., & Bede, B. (2009). Generalized hukuhara differentiability of interval-valued functions and interval differential equations, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, vol 71 (3-4), pp. 1311-1328. https://doi.org/10.1016/j.na.2008.12.005

Stefanini, L. (2010). A generalization of hukuhara difference and division for interval and fuzzy arithmetic, *Fuzzy sets and systems*. vol 161 (11), pp. 1564-1584. https://doi.org/10.1016/j.fss.2009.06.009

Wu, H.-C. (2007). The karush-kuhn-tucker optimality conditions in an optimization problem with interval-valued objective function, *European Journal of operational research*, *vol. 176* (1), pp. 46-59. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2005.09.007.