

ĐIỀU KIỆN CẦN VÀ ĐỦ CHO SỰ CỘNG HƯỞNG ĐỒNG NHẤT TRONG MẠNG LƯỚI GỒM HAI HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN DẠNG HINDMARSH-ROSE 3D VỚI LIÊN KẾT TUYẾN TÍNH HAI CHIỀU

Phan Văn Long Em*, Đặng Trần Quốc Kỳ và Cao Hoàng Kiệt

Trường Đại học An Giang, Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam

**Tác giả liên hệ: Phan Văn Long Em, Email: pvlem@agu.edu.vn*

Lịch sử bài báo

Ngày nhận: 18/11/2024; Ngày nhận chỉnh sửa: 06/01/2025; Ngày duyệt đăng: 17/01/2025

Tóm tắt

Bài báo trình bày kết quả về điều kiện cần và đủ đối với độ mạnh liên kết để đạt được sự cộng hưởng đồng nhất trong một mạng lưới gồm hai hệ phương trình vi phân dạng Hindmarsh-Rose 3D (HR) với liên kết tuyến tính hai chiều. Bằng cách xây dựng hàm số Lyapunov thích hợp sẽ tìm được điều kiện đủ và bằng cách sử dụng số mũ Lyapunov xuyên ngang lớn nhất sẽ tìm được điều kiện cần. Kết quả đạt được cho thấy sự cộng hưởng đồng nhất xảy ra khi độ mạnh liên kết phải đủ lớn. Nghiên cứu này còn trình bày kết quả bằng phương pháp số được thực hiện trên phần mềm R để kiểm tra lại kết quả lý thuyết.

Từ khóa: Độ mạnh liên kết, hệ phương trình Hindmarsh-Rose 3D, số mũ Lyapunov xuyên ngang lớn nhất, sự cộng hưởng đồng nhất.

DOI: <https://doi.org/10.52714/dthu.14.2.2025.1469>

Trích dẫn: Phan, V. L. E., Đặng, T. Q. K., & Cao, H. K. (2025). Điều kiện cần và đủ cho sự cộng hưởng đồng nhất trong mạng lưới gồm hai hệ phương trình vi phân dạng Hindmarsh-Rose 3D với liên kết tuyến tính hai chiều. *Tạp chí Khoa học Đại học Đồng Tháp*, 14(2), 104-110. <https://doi.org/10.52714/dthu.14.2.2025.1469>

Copyright © 2025 The author(s). This work is licensed under a CC BY-NC 4.0 License.

NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITIONS FOR IDENTICAL SYNCHRONIZATION IN A NETWORK OF TWO ORDINARY DIFFERENTIAL SYSTEMS OF HINDMARSH-ROSE 3D TYPE WITH BIDIRECTIONALLY LINEAR COUPLING

Phan Van Long Em^{*}, Dang Tran Quoc Ky, and Cao Hoang Kiet

An Giang University, Vietnam National University Ho Chi Minh City, Vietnam

^{*}Corresponding author: Phan Van Long Em, Email: pvlem@agu.edu.vn

Article history

Received: 18/11/2024; Received in revised form: 06/01/2025; Accepted: 17/01/2025

Abstract

This study explores the sufficient and necessary conditions for achieving identical synchronization in a network of two ordinary differential systems of Hindmarsh-Rose 3D type (HR) with bidirectionally linear coupling. By constructing a suitable Lyapunov function, sufficient conditions are identified, while necessary conditions are derived using the largest transverse Lyapunov exponent. The findings indicate that identical synchronization occurs only when the coupling strength is sufficiently large. Additionally, this study employs numerical methods implemented in the R software to test the concerned theories.

Keywords: *Coupling strength, Hindmarsh-Rose 3D model, largest transverse Lyapunov exponent, identical synchronization.*

1. Giới thiệu

Sự cộng hưởng hay *sự đồng bộ hóa* là một hiện tượng tự nhiên vô cùng quan trọng trong thực tiễn và trong các ngành khoa học phi tuyến, đặc biệt là trong các mạng lưới gồm nhiều hệ phương trình động lực có sự liên kết với nhau (Aziz-Alaoui, 2006; Corson, 2009). Có rất nhiều loại cộng hưởng khác nhau như cộng hưởng đồng nhất, cộng hưởng tổng quát, cộng hưởng theo pha,... (xem Aziz, 2006). Trong nghiên cứu này, chúng tôi chỉ xét sự cộng hưởng đồng nhất. Nó có nghĩa là các hệ phương trình trong mạng lưới đang xét sẽ có cùng đặc tính, hình dạng kể từ một thời điểm nào đó. Nói một cách dễ hiểu, nếu một mạng lưới nào đó gồm có hai hệ phương trình động lực thì sự cộng hưởng có nghĩa là hệ phương trình này sẽ sao chép những đặc tính và hình dáng của hệ phương trình còn lại kể từ một thời điểm nào đó. Khi đó, mạng lưới đang xét được nói là có sự *cộng hưởng* hay *đồng bộ*.

Chúng ta đều biết rằng bộ não con người có chứa rất nhiều tế bào (neuron), ở đó chúng luôn có sự liên kết với nhau tạo thành một mạng lưới các tế bào. Nói cách khác, một mạng lưới các tế bào là một hệ thống gồm nhiều tế bào được liên kết với nhau về mặt sinh lý học. Nghĩa là sự liên kết trao đổi giữa chúng chủ yếu là dựa vào các quá trình điện hóa (Corson, 2009). Nghiên cứu này trình bày kết quả về sự cộng hưởng đồng nhất trong mạng lưới gồm hai tế bào liên kết với nhau theo kiểu tuyến tính hai chiều. Trong đó, mỗi tế bào trong mạng lưới đang xét được biểu diễn bằng một hệ phương trình vi phân dạng Hindmarsh-Rose 3D (HR) (Corson, 2009).

Năm 1952, Hodgkin và Huxley đã nghiên cứu thành công một mô hình toán học bốn chiều, tức là một hệ thống gồm bốn phương trình vi phân có thể giúp mô phỏng được các tính chất hoạt náo cần thiết của điện áp tế bào (Hodgkin & Huxley, 1952). Dựa trên sự thành công của mô hình này, đã có rất nhiều nhà nghiên cứu trên thế giới mong muốn đưa ra những mô hình đơn giản hơn nhưng cũng phải mô tả được sự hoạt náo hay tính chất cần thiết của điện áp tế bào. Nổi bật nhất phải kể đến công trình được công bố vào năm 1984 của Hindmarsh và Rose (Corson, 2009). Hai ông đã công bố một mô hình mới mang tên Mô hình Hindmarsh-Rose 3D (HR). Mô hình này là một hệ thống gồm ba phương trình vi phân đơn giản, được biết đến như là một mô hình ba chiều đơn giản hóa từ mô hình nổi

tiếng của Hodgkin-Huxley (Corson, 2009; Wang & cs., 2005). Tuy nó là mô hình đơn giản hơn mô hình gốc, nhưng nó có thể biểu diễn được nhiều kết quả giải tích đáng chú ý của điện áp tế bào, cũng như vẫn giữ được các tính chất cần thiết hay ý nghĩa về mặt sinh học của điện áp tế bào. Cụ thể như mô hình này có thể biểu diễn được trạng thái cân bằng, trạng thái hoạt náo và đặc biệt là tính bùng nổ (bursting) của điện áp tế bào, tính chất này được tìm thấy ở những động vật có vấn đề về tim mạch (Ermentrout & cs., 2009). Cụ thể, hệ phương trình vi phân dạng Hindmarsh-Rose 3D được biểu diễn như sau:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x^3 + ax^2 + y - z + I, \\ \frac{dy}{dt} = 1 - bx^2 - y, \\ \frac{dz}{dt} = r(s(x - c) - z), \end{cases} \quad (1)$$

trong đó :

biến thứ nhất $x = x(t)$ là biến thể hiện điện áp màng tế bào;

biến thứ hai $y = y(t)$ là biến thể hiện cho các dòng ion chuyển động nhanh xuyên qua màng tế bào;

biến thứ ba $z = z(t)$ là biến đại diện cho các dòng ion chuyển động chậm xuyên qua màng tế bào;

các tham số có trong hệ phương trình (1) như a, b, c, r, s là các hằng số được xác định bằng kinh nghiệm thực tiễn ($r, s > 0$);

I là cường độ dòng điện kích hoạt từ bên ngoài.

Trong nhiều năm gần đây, sự cộng hưởng đã được nghiên cứu rộng rãi trên nhiều lĩnh vực khoa học và đời sống, có rất nhiều hiện tượng tự nhiên mà chúng ta thường bắt gặp cũng phản ánh sự cộng hưởng như sự di chuyển của những đàn chim tạo thành những đám mây trên bầu trời, sự di chuyển nối đuôi nhau của đàn cá chép trong hồ, sự di chuyển đều đặn của đoàn điều hành, đặc biệt sự nhận và truyền thông tin của một nhóm các tế bào trong bộ não con người cũng cho thấy sự cộng hưởng,... (Braun & cs., 1994; Ermentrout, 2009; Khalil, 2002; Yanchuk & cs., 2000). Chính vì thế việc nghiên cứu về sự cộng hưởng trong tự nhiên nói chung, hay việc tìm hiểu về sự cộng hưởng trong mạng lưới các tế bào nói riêng là một việc làm có ý nghĩa và thực sự cần thiết. Để cho bài

nghiên cứu để hiểu hơn, trong bài báo này chúng tôi chỉ xét một mạng lưới gồm hai tế bào tức hai hệ phương trình vi phân dạng Hindmarsh-Rose 3D được liên kết với nhau theo kiểu tuyến tính hai chiều, kết quả chính của nghiên cứu này là tìm ra điều kiện cần và đủ để sự cộng hưởng đồng nhất có thể đạt được trên mạng lưới đang xét.

2. Điều kiện đủ và điều kiện cần cho sự cộng hưởng đồng nhất trong mạng lưới gồm hai hệ phương trình vi phân dạng Hindmarsh-Rose 3D với liên kết tuyến tính hai chiều

Từ hệ phương trình (1), được xem như mô hình của điện áp của một tế bào, chúng tôi xây dựng một mạng lưới gồm hai hệ phương trình vi phân dạng Hindmarsh-Rose 3D với liên kết tuyến tính hai chiều được như sau:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1^3 + ax_1^2 + y_1 - z_1 + I - g(x_1 - x_2), \\ \frac{dy_1}{dt} = 1 - bx_1^2 - y_1, \\ \frac{dz_1}{dt} = r(s(x_1 - c) - z_1), \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_2^3 + ax_2^2 + y_2 - z_2 + I - g(x_2 - x_1), \\ \frac{dy_2}{dt} = 1 - bx_2^2 - y_2, \\ \frac{dz_2}{dt} = r(s(x_2 - c) - z_2), \end{cases} \quad (2)$$

trong đó các biến:

$$x_i = x_i(t), y_i = y_i(t), z_i = z_i(t), i = 1, 2$$

là các biến trạng thái của tế bào thứ i và g là độ mạnh liên kết ($g > 0$) (xem Corson, 2009; Ermentrout & cs., 2009).

Định nghĩa 1. Mạng lưới được mô phỏng bởi hệ phương trình (2) được xem là đạt được cộng hưởng đồng nhất nếu với mọi điều kiện ban đầu $x_i(0), y_i(0), z_i(0), i = 1, 2$, ta đều có:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (|x_1(t) - x_2(t)| + |y_1(t) - y_2(t)| + |z_1(t) - z_2(t)|) = 0.$$

2.1. Điều kiện đủ cho sự cộng hưởng đồng nhất

Đặt $X = x_2 - x_1, Y = y_2 - y_1, Z = z_2 - z_1$ và $U = x_2 + x_1$. Khi đó, hệ phương trình vi phân đối với các biến X, Y, Z được cho bởi:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = Y - Z - \frac{1}{4}X^3 + X(aU - \frac{3}{4}U^2 - 2g), \\ \frac{dY}{dt} = -bXU - Y, \\ \frac{dZ}{dt} = rsX - rZ. \end{cases} \quad (3)$$

Định lí 1. Nếu độ mạnh liên kết g thỏa mãn điều kiện $g \geq \max \left\{ \frac{a^2}{6}, \frac{1}{8\gamma} + \frac{(b-2a)^2}{8(3-\gamma b^2)} \right\}$, với

$0 < \gamma < \frac{3}{b^2}$ thì với mọi điều kiện ban đầu $x_i(0), y_i(0), z_i(0), i = 1, 2$, hệ phương trình (3) sẽ cộng hưởng đồng nhất.

Chứng minh. Trong phần chứng minh này, dựa vào Lý thuyết ổn định Lyapunov và nguyên lí bất biến LaSalle (Aeyels, 1995), chúng tôi xây dựng một hàm Lyapunov thích hợp xác định âm, khi đó điểm $(0, 0, 0)$ là điểm ổn định toàn cục.

Chú ý rằng $(0, 0, 0)$ là điểm kì dị của hệ phương trình (3). Chúng tôi xây dựng hàm số Lyapunov như sau:

$$E(X, Y, Z) = \frac{1}{2}X^2 + \frac{\gamma}{2}Y^2 + \frac{1}{2rs}Z^2,$$

trong đó γ là hằng số dương. Lấy đạo hàm theo t của hàm số Lyapunov trên, ta được:

$$\frac{dE(X, Y, Z)}{dt} = \quad (4)$$

$$-\frac{X^4}{4} - \frac{Z^2}{s} - (AX^2 + BXY + \gamma Y^2),$$

trong đó $A = \frac{3}{4}U^2 - aU + 2g, B = \gamma bU - 1$.

Có thể thấy rằng: $AX^2 + BXY + \gamma Y^2 > 0$ nếu thỏa hai điều kiện sau đây:

(i) Vì $A = \frac{3}{4}U^2 - aU + 2g$ nên nghiệm của

phương trình $A = 0$ là $U_{1,2} = \frac{2(a \pm \sqrt{a^2 - 6g})}{3}$, nếu

$g \leq \frac{a^2}{6}$. Do đó, $A > 0$ nếu $g > \frac{a^2}{6}$;

(ii) Ta thấy:

$$\gamma A - \frac{B^2}{4} > 0$$

$$\Leftrightarrow (3 - \gamma b^2)U^2 - 2(a - 2b)U + 8g - \frac{1}{\gamma} > 0.$$

Điều kiện này được thỏa nếu $g > \frac{1}{8\gamma} + \frac{(b-2a)^2}{8(3-\gamma b^2)}$

và $0 < \gamma < \frac{3}{b^2}$.

Khi đó, nếu chọn

$$g \geq \max \left\{ \frac{a^2}{6}, \frac{1}{8\gamma} + \frac{(b-2a)^2}{8(3-\gamma b^2)} \right\},$$

với $0 < \gamma < \frac{3}{b^2}$ thì $AX^2 + BXY + \gamma Y^2 > 0$.

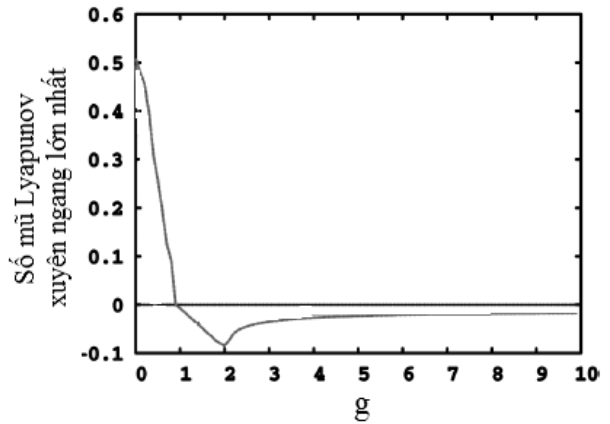
Điều đó dẫn đến $\frac{dE(X,Y,Z)}{dt} < 0$, với mọi

X, Y, Z . Do đó, $(0,0,0)$ là nghiệm duy nhất của (3). Dựa vào Lý thuyết ổn định Lyapunov và nguyên lý bất biến LaSalle (Aeyels, 1995), ta có $(0,0,0)$ là điểm ổn định tiệm cận toàn cục. Định lý đã được chứng minh. ■

Chú ý 1. Kết quả của Định lý 1 chính là điều kiện đủ cho sự cộng hưởng đồng nhất của hệ phương trình (2), nhưng chú ý rằng nó không phải là điều kiện cần. Nói cách khác, nếu độ mạnh liên kết trong mạng lưới đó không thỏa mãn Định lý 1 thì không có nghĩa là hệ phương trình (2) không có sự cộng hưởng. Thật vậy, bằng phương pháp số chúng ta có thể kiểm tra được rằng với giá trị của độ mạnh liên kết không thỏa mãn điều kiện đủ ở Định lý 1, nhưng mạng lưới ở hệ phương trình (2) vẫn đạt được sự cộng hưởng (xem Hình 2(c)).

2.2. Điều kiện cần cho sự cộng hưởng đồng nhất

Theo các nghiên cứu của Pecora & cs., 1998; Yanchuk & cs., 2000; Wolf & cs., 1985, thì điều kiện cần thiết cho mạng lưới các hệ phương trình vi phân đang xét đạt được sự cộng hưởng đồng nhất là số mũ Lyapunov xuyên ngang lớn nhất nhận giá trị âm (xem Corson, 2009). Bằng phương pháp số, chúng tôi có thể tính được số mũ Lyapunov xuyên ngang lớn nhất được biểu diễn như trong Hình 1. Theo Hình 1, số mũ Lyapunov xuyên ngang lớn nhất nhận giá trị âm khi giá trị độ mạnh liên kết $g \geq 0.95$. Nghĩa là, nếu giá trị của độ mạnh liên kết thỏa mãn điều kiện này thì hệ phương trình (2) sẽ đạt được sự cộng hưởng đồng nhất.



Hình 1. Mối tương quan giữa Số mũ Lyapunov xuyên ngang lớn nhất và độ mạnh liên kết. Sự cộng hưởng xảy ra nếu $g \geq 0.95$, với $a = 3, b = 5, c = -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$,

$$r = 0.008, s = 4, I = 3.25.$$

Chú ý rằng điều kiện cần tìm được ở trên không phải là điều kiện đủ cho sự cộng hưởng đang xét. Dựa theo kết quả nghiên cứu tìm được từ các bài báo của Pecora & cs., 1998; Yanchuk & cs., 2000; Wolf & cs., 1985, thì sự không cộng hưởng cũng có thể xảy ra ngay cả khi số mũ Lyapunov xuyên ngang lớn nhất nhận giá trị âm.

3. Mô phỏng số và thảo luận

Để kiểm tra lại tính hiệu quả của các điều kiện cần và đủ tìm được ở trên, chúng tôi đã sử dụng phần mềm R và dùng thuật toán Runge-Kutta để lấy tích phân mạng lưới được mô phỏng bởi hệ phương trình (2) với các giá trị tham số được chọn như sau (Corson, 2009; Ermentrout & cs., 2009):

$$a = 3, b = 5, c = -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}),$$

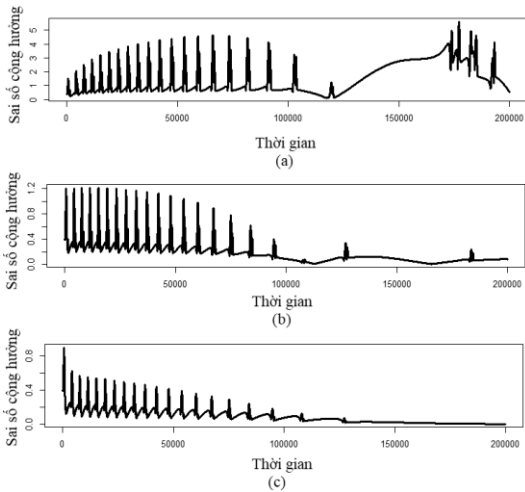
$$r = 0.008, s = 4, I = 3.25.$$

cùng với các điều kiện ban đầu:

$$(x_1(0), y_1(0), z_1(0), x_2(0), y_2(0), z_2(0)) = (0.1, 0, 0.1, -0.1, 0.1, 0).$$

Theo Định nghĩa 1, ta gọi:

$|x_1(t) - x_2(t)| + |y_1(t) - y_2(t)| + |z_1(t) - z_2(t)|$ là sai số cộng hưởng đồng nhất của hệ phương trình (2). Theo Định nghĩa 1, nếu sai số cộng hưởng này tiến về 0 khi t tiến đến vô cùng thì ta nói mạng lưới được mô phỏng bởi hệ phương trình (2) có sự cộng hưởng đồng nhất. Ngược lại, ta nói hệ phương trình (2) không có sự cộng hưởng đồng nhất xảy ra.



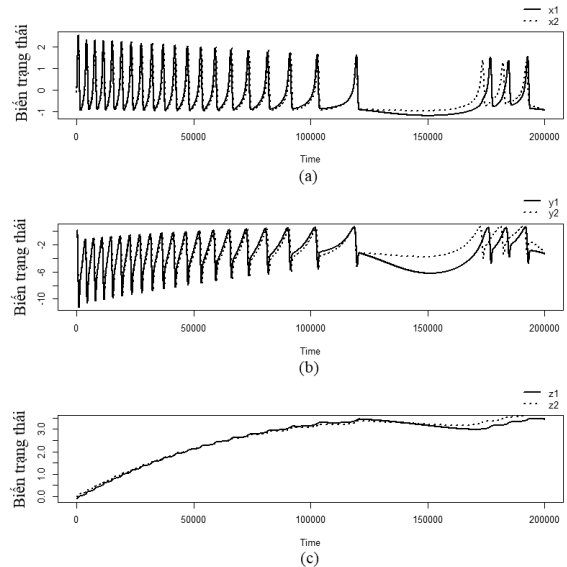
Hình 2. Sai số cộng hưởng giữa hai tế bào trong mạng lưới (2) theo thời gian tương ứng với các giá trị khác nhau của độ mạnh liên kết. Hình 2(a), tương ứng với $g = 0.2$, hiện tượng cộng hưởng chưa xảy ra vì sai số cộng hưởng chưa tiến về 0. Hình 2(b), với $g = 0.5$, sai số cộng hưởng vẫn chưa tiến về 0 nên sự cộng hưởng của mạng lưới (2) chưa vẫn xảy ra. Hình 2(c), với $g = 0.955$, sai số cộng hưởng đã tiến về 0 nên đã có sự cộng hưởng xảy ra

Hình 2 minh họa cho sai số cộng hưởng giữa hai tế bào trong mạng lưới (2) theo thời gian. Các hình được sắp xếp theo thứ tự từ trên xuống dưới tương ứng với các giá trị tăng dần của độ mạnh liên kết, cũng như giúp chúng ta thấy được khi nào có sự cộng hưởng xảy ra. Nói một cách khác, Hình 2(a), 2(b), 2(c) mô phỏng cho sai số cộng hưởng theo thời gian giữa hai tế bào trong mạng lưới (2) tương ứng với các giá trị khác nhau của độ mạnh liên kết, $t \in [0, 200000]$. Có thể thấy rằng, ở Hình 2(a), tương ứng với $g = 0.2$, hiện tượng cộng hưởng chưa xảy ra vì sai số cộng hưởng chưa tiến về 0. Tương tự, ở Hình 2(b), với $g = 0.5$, chúng ta thấy sai số cộng hưởng vẫn chưa tiến về 0. Nói một cách khác, sự cộng hưởng của mạng lưới (2) chưa xảy ra. Điều này dễ hiểu vì với $g = 0.2$ hoặc $g = 0.5$ thì cả hai điều kiện cần và đủ đều không thỏa mãn. Chú ý rằng điều kiện cần là $g \geq 0.95$, còn điều kiện đủ là:

$$g \geq \max \left\{ \frac{a^2}{6}, \frac{1}{8\gamma} + \frac{(b-2a)^2}{8(3-\gamma b^2)} \right\} \geq \frac{a^2}{6} = 1.5.$$

Để hình dung một cách dễ hiểu hơn, ở Hình 3, chúng tôi mô phỏng các biến trạng thái của hệ phương trình (2) theo thời gian tương ứng với độ

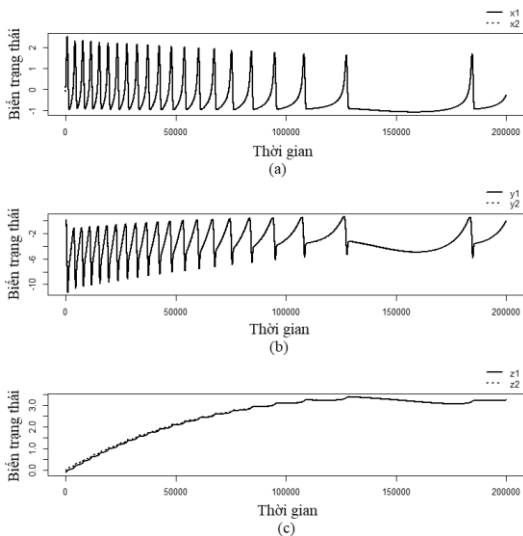
mạnh liên kết $g = 0.2$. Cụ thể, Hình 3(a) mô phỏng biến x_1 bằng đường đậm liền nét và biến x_2 bằng đường đứt nét (một cách tương ứng, y_1 và y_2 ở Hình 3(b); z_1 và z_2 ở Hình 3(c)). Chúng ta thấy rằng các đường liền nét và đứt nét không có hình dạng giống nhau khi thời gian tăng dần, nghĩa là không có sự cộng hưởng xảy ra ở mạng lưới (2).



Hình 3. Các biến trạng thái của hệ phương trình (2) theo thời gian tương ứng với độ mạnh liên kết $g = 0.2$. Hình 3(a) mô phỏng biến x_1 bằng đường đậm liền nét và biến x_2 bằng đường đứt nét (một cách tương ứng, y_1 và y_2 ở Hình 3(b); z_1 và z_2 ở Hình 3(c)). Các đường liền nét và đứt nét không có hình dạng giống nhau khi thời gian tăng dần, nghĩa là không có sự cộng hưởng xảy ra ở mạng lưới (2)

Tuy nhiên, với giá trị của độ mạnh liên kết đủ lớn, chẳng hạn khi $g = 0.955$, thì điều kiện đủ không thỏa mãn, nhưng điều kiện cần thì thỏa mãn. Xem Hình 2(c), ta thấy sai số cộng hưởng tiến về 0 nên có sự cộng hưởng xảy ra trong hệ phương trình (2).

Để hình dung một cách dễ hiểu hơn, ở Hình 4, chúng tôi mô phỏng các biến trạng thái của hệ phương trình (2) theo thời gian tương ứng với độ mạnh liên kết $g = 0.955$. Cụ thể, Hình 4(a) mô phỏng biến x_1 bằng đường đậm liền nét và biến x_2 bằng đường đứt nét (một cách tương ứng, y_1 và y_2 ở Hình 4(b); z_1 và z_2 ở Hình 4(c)). Chúng ta thấy rằng các đường liền nét và đứt nét đã có hình dạng giống nhau khi thời gian tăng dần, nghĩa là có sự cộng hưởng xảy ra ở mạng lưới (2).



Hình 4. Các biến của hệ phương trình (2) theo thời gian tương ứng với độ mạnh liên kết $g = 0.955$. Hình 4(a) mô phỏng biến x_1 bằng đường đậm liền nét và biến x_2 bằng đường đứt nét (một cách tương ứng, y_1 và y_2 ở Hình 4(b); z_1 và z_2 ở Hình 4(c)). Các đường liền nét và đứt nét đã có hình dạng giống nhau khi thời gian tăng dần, nghĩa là có sự cộng hưởng xảy ra ở mạng lưới (2)

Nhận xét 1. Theo kết quả mô phỏng được trình bày bằng phương pháp số ở trên, chúng ta thấy có thể thấy rằng để sự cộng hưởng đồng nhất được xảy ra trong mạng lưới gồm hai hệ phương trình vi phân dạng Hindmarsh-Rose 3D với liên kết tuyến tính hai chiều thì giá trị của độ mạnh liên kết phải đủ lớn.

4. Kết luận

Nghiên cứu này đã đưa ra được kết quả đáng chú ý về sự cộng hưởng đồng nhất trong một mạng lưới gồm hai hệ phương trình vi phân dạng Hindmarsh-Rose 3D với liên kết tuyến tính hai chiều. Kết quả cho thấy sự cộng hưởng xảy ra khi độ mạnh liên kết đủ lớn. Cụ thể, bài báo đã nêu được điều kiện cần và đủ đối với độ mạnh liên kết để mạng lưới đang xét có thể đạt được sự cộng hưởng đồng nhất. Chúng ta biết rằng sự cộng hưởng trong mạng lưới các tế bào là một hiện tượng tự nhiên rất quan trọng và thường xảy ra trong não bộ con người, nó cũng đóng vai trò quan trọng trong việc truyền và nhận thông tin. Nghiên cứu này cung cấp cho chúng ta một sự hiểu biết về hiện tượng cộng hưởng giữa hai tế bào với liên kết hai chiều theo kiểu điện học, đặc biệt kết quả nghiên cứu còn có thể phát triển lên bằng việc nghiên cứu sự cộng hưởng đồng nhất trong một

mạng lưới gồm rất nhiều tế bào liên kết với nhau với những cấu trúc phức tạp hơn.

Tài liệu tham khảo

- Aeyels, D. (1995). Asymptotic Stability of Nonautonomous Systems by Lyapunov's Direct Method. *Systems and Control Letters*, 25, 273-280.
[https://doi.org/10.1016/0167-6911\(94\)00088-D](https://doi.org/10.1016/0167-6911(94)00088-D)
- Aziz-Alaoui, M. A. (2006). Synchronization of Chaos. *Encyclopedia of Mathematical Physics, Elsevier*, Vol. 5, 213-226.
- Braun, H. A., Wissing, H., Schäfer, K., & Hirsch, M. C. (1994). Oscillation and noise determine signal transduction in shark multimodal sensory cells. *Nature*, 367(6460), 270-273.
<https://doi.org/10.1038/367270a0>
- Corson, N. (2009). *Dynamique d'un modèle neuronal, synchronisation et complexité*, Luận án Tiến sĩ, Trường Đại học Le Havre, Pháp.
- Ermentrout, G. B., & Terman, D. H. (2009). *Mathematical Foundations of Neurosciences*. Springer.
- Hodgkin, A. L., & Huxley, A. F. (1952). A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *J. Physiol.*, Vol. 117, p. 500-544.
<https://doi.org/10.1113/jphysiol.1952.sp004764>
- Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear Systems*, third ed., Prentice Hall, New York.
- Pecora, L. M., & Carroll, T. L. (1998). Master stability functions for synchronized coupled systems. *Physical Review Letters*, 80(10), 2109.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.80.2109>
- Wang H. X., Lu Q. S., & Wang Q. Y. (2005). Complete synchronization in coupled chaotic Hindmarsh-Rose neurons with symmetric coupling schemes. *Chinese Review Letter*, 22(9), p. 2173-2175.
<https://doi.org/10.1088/0256-307X/22/9/009>
- Wolf, A., Swift, J. B., Swinney, H. L., & Vastano, J. A. (1985). Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica D: nonlinear phenomena*, 16(3), 285-317.
[https://doi.org/10.1016/0167-2789\(85\)90011-9](https://doi.org/10.1016/0167-2789(85)90011-9)
- Yanchuk, S., Maistrenko, Y., Lading, B., & Mosekilde, E. (2000). Effects of a parameter mismatch on the synchronization of two coupled chaotic oscillators. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 10(11), 2629-2648.
<https://doi.org/10.1142/S0218127400001584>