QUY TRÌNH XÂY DỰNG MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC TỪ CÁC HÀM LỒI

Phạm Thị Trân Châu[1*], Võ Đức Thịnh[2], Ngô Thị Kim Yến[1] và Trần Thuỵ Hoàng Yến[2]

[1] *Sinh viên, Khoa Sư phạm Toán - Tin, Trường Đại học Đồng Tháp, Việt Nam*

[2] *Khoa Sư phạm Toán - Tin, Trường Đại học Đồng Tháp, Việt Nam*

[*] *Tác giả liên hệ: phamthitranchau2000@gmail.com*

Lịch sử bài báo

Ngày nhận: 15/12/2021; Ngày nhận chỉnh sửa: 19/01/2022; Ngày duyệt đăng: 07/3/2022.

Tóm tắt

Trong bài báo này, chúng tôi đề xuất hai quy trình sử dụng hàm lồi để xây dựng một số bất đẳng thức quen thuộc ở bậc trung học phổ thông. Trong đó, quy trình thứ nhất là kỹ thuật xây dựng các bất đẳng thức từ hàm hồi và quy trình thứ hai là kỹ thuật xây dựng các bất đẳng thức với các điều kiện phương trình, với hai kỹ thuật này chúng ta có thể tự sáng tạo ra một hệ thống bài tập phong phú và đa dạng về chủ đề này. Hơn nữa, thông qua việc hiểu được hai quy trình sáng tạo các dạng toán bất đẳng thức sẽ giúp cho người giáo viên định hướng phương pháp giải cho học sinh hiệu quả hơn, từ đó có được phương pháp dạy học tốt hơn về chủ đề này nhằm nâng cao chất lượng đào tạo..

Từ khóa: *Bất đẳng thức, hàm lồi, quy trình.*

PROCEDURES TO BUILD SOME INEQUALITY PROBLEMS FROM BASIC CONVEX FUNCTIONS

Pham Thi Tran Chau[1*], Vo Đuc Thinh[2], Ngo Thi Kim Yen[1], and Tran Thuy Hoang Yen[2]

[1] *Student, Faculty of Mathematics - Informatics Teacher Education, Dong Thap University, Vietnam*

[2] *Faculty of Mathematics - Informatics Teacher Education, Dong Thap University, Vietnam*

[*] *Corresponding author: phamthitranchau2000@gmail.com*

Article history

Received: 15/12/2021; Received in revised form: 19/01/2022; Accepted: 07/3/2022.

Abstract

In this paper, we propose two processes using convex functions to build some familiar inequalities in high schools. The first process is the technique of building inequalities from the convex function, while the second one is building inequalities with equation conditions. There can possibly be plenty and diverse system of exercises created on this topic with these two techniques. Moreover, adequate understanding these two creative mathematical processes will help teachers orient the solution method for students more effectively, thereby helping them to have a better teaching method about this topic, and improve training quality.

Keywords: *Inequality, convex function, process.*

DOI: https://doi.org/10.52714/dthu.11.4.2022.964

Trích dẫn: Phạm, T. T. C., Võ, Đức T., Ngô, T. K. Y., & Trần, T. H. Y. (2022). Quy trình xây dựng một số bất đẳng thức từ các hàm lồi. *Tạp chí Khoa học Đại học Đồng Tháp, 11*(4), 33-40. https://doi.org/10.52714/dthu.11.4.2022.964.

1. Giới thiệu

Bất đẳng thức và bài toán cực trị của biểu thức là một trong những nội dung quan trọng và cũng thuộc vào các chủ đề khó thường xuất hiện trong các đề thi học sinh giỏi các cấp, mà thông qua việc dạy học chủ đề này có thể giúp học sinh hình thành và phát triển năng lực toán học, nhằm thực hiện mục tiêu của Chương trình Giáo dục phổ thông môn Toán năm 2018. Để giải các dạng toán này, người học thường phải dùng nhiều phương pháp và kĩ thuật phức tạp để phân tích tìm lời giải bài toán, nhưng các phương pháp và kĩ thuật giải này thường đòi hỏi sự tư duy cao. Vì tính quan trọng của bất đẳng thức trong chương trình môn Toán ở bậc phổ thông, nhiều tác giả đã đề xuất, nghiên cứu nhiều phương pháp, kỹ thuật chứng minh cũng như xây dựng (sáng tạo) các bất đẳng thức (Đặng 2018; Nguyễn & Nguyễn 2015; Nguyễn 2009; Nguyễn & Nguyễn 2018; Phạm 2006; Trần 2009; Võ & Trần 2018). Trong các bất đẳng thức thì bất đẳng thức Jensen là một loại bất đẳng thức đặc trưng cho tính lồi của hàm số dùng để chứng minh một số bất đẳng cơ bản và một số bài toán về bất đẳng thức trong các kỳ thi Toán học Quốc gia và Quốc tế. Xuất phát từ bất đẳng thức Jensen, chúng tôi đề xuất hai quy trình sử dụng một số hàm lồi để xây dựng các bất đẳng thức quen thuộc. Từ đó, chúng ta có thể tự sáng tạo ra các bất đẳng thức theo mong muốn của mình từ các hàm lồi khác nhau tạo ra một hệ thống bài tập phong phú và đa dạng.

2. Xây dựng một số bất đẳng thức từ hàm lồi

Trong mục này, chúng tôi nhắc lại khái niệm và một số tính chất cơ bản của hàm lồi trên $\mathbb{R}$ cũng như giới thiệu một số hàm lồi quen thuộc. Sau đó, chúng tôi sử dụng bất đẳng thức Jensen cho các hàm lồi này để xây dựng một số bất đẳng thức quen thuộc. Từ đó, chúng tôi đề xuất một quy trình xây dựng bài toán bất đẳng thức quen thuộc và một quy trình xây dựng bất đẳng thức chứa điều kiện là các phương trình.

2.1. Hàm lồi và tính chất cơ bản của hàm lồi

Định nghĩa 1 (Lê & Nguyễn 2009, Định nghĩa 8.1). Giả sử I là một khoảng trong $\mathbb{R}$. Hàm số $f: I \to \mathbb{R}$ được gọi là hàm lồi trên khoảng I nếu với mọi $x_1, x_2 \in I$, với mọi $\lambda \in [0,1]$, ta có

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2).$$

Bằng quy nạp toán học, ta có thể chứng minh được rằng $f(x)$ là hàm lồi trên I khi và chỉ khi với mọi số tự nhiên n, mọi $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$ và các số $\lambda_i \geq 0$ với $i = 1, \dots, n$ sao cho $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, ta có:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_n f(x_n). \quad (1.1)$$

Bất đẳng thức (1.1) được sử dụng để định nghĩa hàm lồi được gọi là bất đẳng thức Jensen, bất đẳng thức này được xem là một công cụ hiệu quả trong việc chứng minh bất đẳng thức. Tuy nhiên, để kiểm tra một hàm số cho trước có phải hàm lồi hay không thông qua bất đẳng thức Jensen đôi khi khá khó khăn. Định lý sau (Lê & Nguyễn 2009) cho ta điều kiện đủ để một hàm số là hàm lồi thông qua đạo hàm cấp hai của hàm số đó.

Định lý 1 (Đặc trưng của hàm lồi thông qua đạo hàm cấp 2). Cho f là hàm số xác định trên (a,b) và có đạo hàm cấp hai tại mọi $x \in (a,b)$. Nếu $f''(x) > 0$ với mọi $x \in (a,b)$ thì f là hàm lồi trên (a,b).

Ví dụ 1. Các hàm số sau là hàm lồi trên các tập tương ứng:

i. $f(x) = e^x$ là hàm lồi trên $(-\infty, +\infty)$.

ii. $f(x) = x^2$ là hàm lồi trên $(-\infty, +\infty)$.

iii. $f(x) = \frac{1}{x}$ là hàm lồi trên $(0, +\infty)$.

Trong phần tiếp theo, chúng tôi sử dụng bất đẳng thức Jensen của các hàm lồi trên đưa ra một quy trình xây dựng một số bất đẳng thức quen thuộc chẳng hạn như bất đẳng thức Cauchy, bất đẳng thức Bunhiacopxki, bất đẳng thức Sacnơ, bất đẳng thức Young, bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình điều hòa.

2.2. Xây dựng một số bất đẳng thức thường gặp

2.2.1. Quy trình xây dựng các bất đẳng thức từ các hàm lồi

Chúng tôi đề xuất quy trình xây dựng các bất đẳng thức từ các hàm lồi như sau:

Bước 1: Lấy trước một hàm lồi trên tập I nào đó và viết dạng bất đẳng thức Jensen cho hàm số $f(x)$.

Bước 2: Chọn một bộ λ_i và các giá trị x_i tương ứng. Thay các bộ này vào bất đẳng thức Jensen tương ứng với $f(x)$.

Bước 3: Thực hiện các phép biến đổi tương đương các bất đẳng thức để thu được một bất đẳng thức đơn giản hơn.

Chúng tôi bắt đầu bằng việc xây dựng bất đẳng thức Cauchy, đây là bất đẳng thức cơ bản và quen thuộc với hầu hết học sinh. Trong các kì thi tuyển sinh vào lớp 10, kì thi Trung học phổ thông Quốc gia và một số kì thi học sinh giỏi các cấp có những bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số, chứng minh bất đẳng thức... bằng cách áp dụng bất đẳng thức Cauchy.

2.2.2. Xây dựng bất đẳng thức Cauchy và một số dạng áp dụng của bất đẳng thức Cauchy thông qua hàm lồi $f(x) = e^x$

Xét hàm số lồi $f(x) = e^x$ trên $x \in (-\infty, +\infty)$. Bất đẳng thức Jensen của $f(x)$ trong trường hợp $n = 2$ được viết như sau:

$$e^{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2} \le \lambda_1 e^{x_1} + \lambda_2 e^{x_2}.$$

Lấy $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$, ta được:

$$e^{\frac{x_1+x_2}{2}} \le \frac{e^{x_1} + e^{x_2}}{2}.$$

Điều này tương đương với

$$(e^{x_1+x_2})^{\frac{1}{2}} \le \frac{e^{x_1}+e^{x_2}}{2}. \tag{1.2}$$

Đặt $a_1 = e^{x_1}, a_2 = e^{x_2}$. Khi đó, bởi tính dương của hàm e^x, ta có $a_1, a_2 > 0$. Hơn nữa, bất đẳng thức (1.2) trở thành

$$(a_1 a_2)^{\frac{1}{2}} \le \frac{a_1 + a_2}{2}.$$

Điều này có nghĩa là

$$\sqrt{a_1 a_2} \le \frac{a_1+a_2}{2}. \tag{1.3}$$

Bất đẳng thức (1.3) được gọi là bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương. Với trường hợp $a_1 = a_2 = 0$ thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Bằng cách tương tự cho trường hợp n và các bộ λ khác nhau, ta sẽ có các dạng bất đẳng thức Cauchy cho bộ n số cũng như các dạng tương tự bất đẳng thức Cauchy và có thể được suy ra từ bất đẳng thức Cauchy như sau:

- Với $n = 3, \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{3}$ và $a_1 = e^{x_1}, a_2 = e^{x_2}, a_3 = e^{x_3}$, ta có:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3) \le \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \lambda_3 f(x_3)$$
$$\Leftrightarrow e^{\frac{x_1+x_2+x_3}{3}} \le \frac{e^{x_1} + e^{x_2} + e^{x_3}}{3}$$
$$\Leftrightarrow (e^{x_1+x_2+x_3})^{\frac{1}{3}} \le \frac{e^{x_1} + e^{x_2} + e^{x_3}}{3}$$
$$\Leftrightarrow (a_1 a_2 a_3)^{\frac{1}{3}} \le \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3} \le \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}.$$

- Với n bất kỳ, $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \frac{1}{n}$ và $a_1 = e^{x_1}, a_2 = e^{x_2}, \dots, a_n = e^{x_n}$ ta có:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n) \le \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_n f(x_n)$$
$$\Leftrightarrow e^{\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}} \le \frac{e^{x_1} + e^{x_2} + \cdots + e^{x_n}}{n}$$
$$\Leftrightarrow (e^{x_1+x_2+\cdots+x_n})^{\frac{1}{n}} \le \frac{e^{x_1} + e^{x_2} + \cdots + e^{x_n}}{n}$$
$$\Leftrightarrow (a_1 a_2 \dots a_n)^{\frac{1}{n}} \le \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

- Với $n = 2020, \lambda_1 = \frac{1}{1010.2021}, \lambda_2 = \frac{2}{1010.2021}, \dots, \lambda_{2021} = \frac{2020}{1010.2021}$ và $a_i = e^{x_i} > 0 \forall i = 1 \dots 2020$, ta có:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_{2020} x_{2020}) \le \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_{2020} f(x_{2020})$$
$$\Leftrightarrow e^{\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{2020}}{1010.2021}} \le \frac{e^{x_1}+e^{x_2}+\cdots+e^{x_{2020}}}{1010.2021}$$
$$\Leftrightarrow e^{(x_1+x_2+\cdots+x_{2020})^{\frac{1}{1010.2021}}} \le \frac{e^{x_1} + e^{x_2} + \cdots + e^{x_{2020}}}{1010.2021}$$
$$\Leftrightarrow (a_1 a_2 \dots a_{2020})^{\frac{1}{1010.2021}} \le \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2020}}{1010.2021}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt[1010.2021]{a_1 a_2 \dots a_{2020}} \le \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2020}}{1010.2021}.$$

Như vậy, với việc thay đổi các bộ số λ_i và các cách đặt a_i, chúng tôi đã xây dựng được một số trường hợp khác của bất đẳng thức Cauchy. Tổng quát, bằng cách tiếp cận này nhưng thay hàm $f(x) = e^x$ bởi các hàm lồi khác, chúng tôi sẽ thu được nhiều dạng bất đẳng thức quen thuộc. Sau đây, chúng tôi trình bày cách xây dựng một số bất đẳng thức thông qua hàm lồi $f(x) = \frac{1}{x}$.

2.2.3. Xây dựng được một số bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình điều hòa thông qua hàm lồi $f(x) = \frac{1}{x}$

Xét hàm số lồi $f(x) = \frac{1}{x}$ trên $x \in (0, +\infty)$. Bất đẳng thức Jensen của $f(x)$ trong trường hợp $n = 2$ được viết như sau:

$$\frac{1}{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2} \le \lambda_1 \frac{1}{x_1} + \lambda_2 \frac{1}{x_2}.$$

Lấy $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$, ta được:

$$\frac{2}{x_1 + x_2} \le \frac{1}{2x_1} + \frac{1}{2x_2}.$$

Hay $\frac{2}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}} \le \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$.

Đây là bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình điều hòa.

Điều này tương đương với

$$4 \le (x_1 + x_2)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right).$$

◆ Với $n = 2, \lambda_1 = \frac{1}{3}, \lambda_2 = \frac{2}{3}$, ta có:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \le \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$
$$\Leftrightarrow f\left(\frac{x_1 + 2x_2}{3}\right) \le \frac{1}{3} f(x_1) + \frac{2}{3} f(x_2)$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{x_1 + 2x_2} \le \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{2}{x_2}\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{\frac{1}{x_1} + \frac{2}{x_2}} \le \frac{1}{3}(x_1 + 2x_2)$$
$$\Leftrightarrow 9 \le (x_1 + 2x_2)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{2}{x_2}\right).$$

◆ Với $n = 2, \lambda_1 = \frac{1}{k+1}, \lambda_2 = \frac{k}{k+1}$, ta có:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \le \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$
$$\Leftrightarrow f\left(\frac{x_1 + kx_2}{k+1}\right) \le \frac{1}{k+1} f(x_1) + \frac{k}{k+1} f(x_2)$$
$$\Leftrightarrow \frac{k+1}{x_1 + kx_2} \le \frac{1}{k+1}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{k}{x_2}\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{k+1}{\frac{1}{x_1} + \frac{k}{x_2}} \le \frac{1}{k+1}(x_1 + kx_2)$$
$$\Leftrightarrow (k+1)^2 \le (x_1 + kx_2)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{k}{x_2}\right).$$

◆ Với $n = 3, \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{3}$, ta có:

$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3) \le \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \lambda_3 f(x_3) \Leftrightarrow f\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right) \le \frac{1}{3} f(x_1) + \frac{1}{3} f(x_2) + \frac{1}{3} f(x_3)$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x_1 + x_2 + x_3} \le \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}} \le \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$$
$$\Leftrightarrow 9 \le (x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right).$$

◆ Với $n = 3, \lambda_1 = \frac{1}{6}, \lambda_2 = \frac{2}{6}, \lambda_3 = \frac{3}{6}$, ta có:

$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3) \le \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \lambda_3 f(x_3)$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{x_1 + 2x_2 + 3x_3}{6}\right) \le \frac{1}{6} f(x_1) + \frac{2}{6} f(x_2) + \frac{3}{6} f(x_3)$$
$$\Leftrightarrow \frac{6}{x_1 + 2x_2 + 3x_3} \le \frac{1}{6}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{2}{x_2} + \frac{3}{x_3}\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{6}{\frac{1}{x_1} + \frac{2}{x_2} + \frac{3}{x_3}} \le \frac{1}{6}(x_1 + 2x_2 + 3x_3)$$
$$\Leftrightarrow 36 \le (x_1 + 2x_2 + 3x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{2}{x_2} + \frac{3}{x_3}\right).$$

◆ Với $n = 3$ và $\lambda_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}, \lambda_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}, \lambda_3 = \frac{\alpha_3}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}$, ta có:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3) \le \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \lambda_3 f(x_3)$$
$$\Leftrightarrow f\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} x_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} x_2 + \frac{\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} x_3\right)$$
$$\le \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}\left(\alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \alpha_f(x_3)\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3} \le \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}\left(\frac{\alpha_1}{x_1} + \frac{\alpha_2}{x_2} + \frac{\alpha_3}{x_3}\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{\frac{\alpha_1}{x_1} + \frac{\alpha_2}{x_2} + \frac{\alpha_3}{x_3}} \le \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)$$
$$\Leftrightarrow (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^2 \le (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)\left(\frac{\alpha_1}{x_1} + \frac{\alpha_2}{x_2} + \frac{\alpha_3}{x_3}\right).$$

Với việc thay đổi các bộ số λ_i và các cách đặt α_i, chúng tôi đã xây dựng được một số bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình điều hòa.

2.2.4. Xây dựng bất đẳng thức Bunhiacopxki và bất đẳng thức Sacnơ thông qua hàm lồi

Xét hàm số $f(x) = x^2$ trên $\mathbb{R}$. Bất đẳng thức Jensen của $f(x)$ với n bất kì được viết như sau:

$$(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n)^2 \le \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2.$$

Lấy $\lambda_1 = \frac{b_1^2}{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}, \lambda_2 = \frac{b_2^2}{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}, \ldots,$

$$\lambda_n = \frac{b_n^2}{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}$$

ta được:

$$\left[\frac{b_1^2}{\sum_{j=1}^n b_j^2}x_1 + \frac{b_2^2}{\sum_{j=1}^n b_j^2}x_2 + \cdots + \frac{b_n^2}{\sum_{j=1}^n b_j^2}x_n\right]^2$$
$$\le \frac{b_1^2}{\sum_{j=1}^n b_j^2}x_1^2 + \cdots + \frac{b_n^2}{\sum_{j=1}^n b_j^2}x_n^2.$$

Điều này tương đương với

$$\left(\frac{1}{\sum_{j=1}^n b_j^2}\sum_{j=1}^n b_j^2 x_j\right)^2 \le \frac{1}{\sum_{j=1}^n b_j^2}\sum_{j=1}^n b_j^2 x_j^2. \quad (1.4)$$

Đặt $x_j = \frac{a_j}{b_j}$ với $j = 1 \dots n$. Khi đó, bởi tính dương của hàm x^2, ta có $a_i, b_i > 0$ trong đó $i = 1 \dots n$. Hơn nữa, bất đẳng thức (1.4) trở thành

$$\left(\frac{1}{\sum_{j=1}^n b_j^2}\sum_{j=1}^n b_j^2\frac{a_j}{b_j}\right)^2 \le \frac{1}{\sum_{j=1}^n b_j^2}\sum_{j=1}^n b_j^2\frac{a_j^2}{b_j^2}.$$

Bất đẳng thức tương đương với

$$\left(\frac{1}{\sum_{j=1}^n b_j^2}\sum_{j=1}^n a_j b_j\right)^2 \le \frac{1}{\sum_{j=1}^n b_j^2}\sum_{j=1}^n a_j^2.$$

hay $\left(\sum_{j=1}^n a_j b_j\right)^2 \le \sum_{j=1}^n b_j^2 \sum_{j=1}^n a_j^2$.

Điều này có nghĩa là

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2$$
$$\le (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^n). \ (1.5)$$

Bất đẳng thức (1.5) được gọi là bất đẳng thức Bunhiacopxki trong chương trình toán học phổ thông. Bằng cách tương tự, nhưng cho trường hợp các bộ λ khác nhau, ta sẽ có các dạng bất đẳng thức Sacno và có thể được suy ra từ bất đẳng thức Bunhiacopxki như sau:

- Với $x_1 = \frac{a_1}{b_1}, x_2 = \frac{a_2}{b_2}, \dots, x_n = \frac{a_n}{b_n}$ và $\lambda_1 = \frac{b_i}{\sum_{j=1}^n b_j}, \lambda_2 = \frac{b_2}{\sum_{j=1}^n b_j}, \dots, \lambda_n = \frac{b_n}{\sum_{j=1}^n b_j}$,

ta có:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n)$$
$$\le \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_n f(x_n)$$
$$\Leftrightarrow (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \dots \lambda_n x_n)^2$$
$$\le \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{a_1b_1}{b_1\sum_{j=1}^n b_j} + \frac{a_2b_2}{b_2\sum_{j=1}^n b_j} + \cdots + \frac{a_nb_n}{b_n\sum_{j=1}^n b_j}\right)^2$$
$$\le \frac{a_1^2b_1}{b_1^2\sum_{j=1}^n b_j} + \frac{a_2^2b_2}{b_2^2\sum_{j=1}^n b_j} + \cdots + \frac{a_n^2b_n}{b_n^2\sum_{j=1}^n b_j}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sum_{j=1}^n b_j}\sum_{j=1}^n a_j\right)^2 \le \frac{1}{\sum_{j=1}^n b_j}\sum_{j=1}^n \frac{a_j^2}{b_j}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\left(\sum_{j=1}^n a_j\right)^2}{\sum_{j=1}^n b_j} \le \sum_{j=1}^n \frac{a_j^2}{b_j}.$$

hay

$$\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{b_1+b_2+\cdots+b_n} \le \frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n}. \quad (1.6)$$

2.3. Xây dựng bài toán bất đẳng thức có điều kiện

Trong nhiều trường hợp, các bài toán bất đẳng thức có thể xuất hiện thêm các điều kiện của các biến như $ab + ac + bc = abc, a + b = ab, a + b + c + d = 1 \dots$ Trong mục này, chúng tôi đề xuất quy trình xây dựng các bất đẳng thức với các điều kiện này từ các hàm lồi ở trên và một số ví dụ minh họa.

2.3.1. Quy trình xây dựng các bài toán bất đẳng thức từ các điều kiện phương trình

Bước 1: Biến đổi điều kiện về dạng cần thiết.

Bước 2: Lấy một hàm lồi và viết bất đẳng thức Jensen của nó với λ_i hoặc các bộ x_i tương ứng với điều kiện bài toán.

Bước 3: Biến đổi tương đương để thu được bài toán bất đẳng thức đơn giản.

2.3.2. Xây dựng bất đẳng thức với điều kiện $a + b = ab$ đối với hàm lồi $f(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = x^2$ và $f(x) = e^x$

Xét điều kiện $a + b = ab$ trong đó a, b là hai số thực dương. Điều kiện này tương đương với

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1.$$

Ta thấy, bộ $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$ thỏa mãn có điều kiện của bộ λ_i trong các bất đẳng thức Jensen. Do đó, ta có thể áp dụng bất đẳng thức Jensen của các hàm lồi cho bộ λ có dạng này để được những bất đẳng thức khác nhau. Chẳng hạn như:

- Đối với hàm số lồi $f(x) = \frac{1}{x}$ trên $(0, +\infty)$, bất đẳng thức Jensen của $f(x)$ với bộ $\lambda_1 = \frac{1}{a}, \lambda_2 = \frac{1}{b}$ ta có:

$$\frac{1}{\frac{a}{x_1} + \frac{b}{x_2}} \le \frac{1}{a}\frac{1}{x_1} + \frac{1}{b}\frac{1}{x_2}. \quad (1.7)$$

(i) Ta chọn bộ $x_1 = b, x_2 = a$. Khi đó, bất đẳng thức (1.7) trở thành

$$\frac{1}{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}} \le \frac{2}{ab}.$$

Điều này tương đương với

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \ge \frac{ab}{2}. \quad (1.8)$$

Vậy ta có bài toán bất đẳng thức sau:

Bài toán 1. Cho a, b là hai số dương thỏa mãn $a + b = ab$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \ge \frac{ab}{2}$.

Bài toán (1) là một bất đẳng thức quen thuộc trong chương trình Toán học phổ thông. Bây giờ, nếu ta chọn bộ x_1, x_2 khác đi, thì ta thu được một bất đẳng thức khác như sau:

(ii) Lấy $x_1 = a, x_2 = b$, từ (1.7) ta có:

$$\frac{1}{2} \le \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}. \quad (1.9)$$

Vậy ta có bài toán bất đẳng thức sau:

Bài toán 2. Cho a, b là hai số dương thỏa mãn $a + b = ab$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2} \ge \frac{1}{2}$.

Như vậy, với việc thay đổi cách đặt x_i và cách làm tương tự, chúng tôi có thể xây dựng thêm nhiều dạng bất đẳng thức khác. Tổng quát, bằng cách tiếp cận này nhưng thay hàm $f(x) = \frac{1}{x}$ bởi các hàm lồi khác, chúng tôi sẽ thu được nhiều dạng bất đẳng thức khác nhau. Ví dụ sau đây trình bày cách xây dựng một số bất đẳng thức thông qua hàm lồi $f(x) = x^2$ và với điều kiện $a + b = ab$.

Xét hàm số $f(x) = x^2$ trên $\mathbb{R}$. Bất đẳng thức Jensen của $f(x)$ với bộ λ_i là $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$ được viết như sau:

$$\left(\frac{1}{a}x_1 + \frac{1}{b}x_2\right)^2 \le \frac{1}{a}x_1^2 + \frac{1}{b}x_2^2.$$

Điều này tương đương với

$$(bx_1 + ax_2)^2 \le (ab)^2\left(\frac{1}{a}x_1^2 + \frac{1}{b}x_2^2\right). \quad (1.10)$$

Đặt $x_1 = \frac{1}{b}, x_2 = \frac{1}{a}$. Khi đó, bởi tính dương của hàm $f(x) = x^2$, ta có $a, b > 0$. Hơn nữa, bất đẳng thức (1.10) trở thành

$$4 \le a + b.$$

Vậy ta có bài toán bất đẳng thức sau:

Bài toán 3. Cho a, b là hai số dương thỏa mãn $a + b = ab$. Chứng minh rằng: $a + b \ge 4$.

Với hàm số $f(x) = e^x$ trên $(-\infty, +\infty)$, bất đẳng thức Jensen của $f(x)$ cho bộ $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$ được viết như sau:

$$e^{\frac{1}{a}x_1+\frac{1}{b}x_2} \le \frac{1}{a}e^{x_1} + \frac{1}{b}e^{x_2}. \quad (1.11)$$

Đặt $x_1 = \ln x^a, x_2 = \ln y^b$. Khi đó, bất đẳng thức (1.11) trở thành

$$e^{\frac{1}{a}\ln x^a + \frac{1}{b}\ln y^b} \le \frac{1}{a}e^{\ln x^a} + \frac{1}{b}e^{\ln y^b}.$$

Điều này tương đương với

$$e^{\ln(xy)} \le \frac{1}{a}e^{a\ln x} + \frac{1}{b}e^{b\ln y}.$$

Điều này có nghĩa là

$$xy \le \frac{x^a}{a} + \frac{y^b}{b}.$$

Vậy ta có bài toán sau:

Bài toán 4. Cho $a > 1, b > 1$ là các số thực và x, y là các số thực không âm thỏa mãn $a + b = ab$.

Chứng minh rằng: $xy \le \frac{x^a}{a} + \frac{y^b}{b}$.

Bài toán (4) là bất đẳng thức Young.

Với cách tiếp cận này nhưng thay điều kiện $a + b = ab$ bởi điều kiện khác, chúng tôi sẽ thu được nhiều dạng bất đẳng thức khác. Chẳng hạn với điều kiện $ab + ac + bc = abc$ với a, b, c là ba số dương, ta có:

$$ab + ac + bc = abc \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1.$$

Như vậy bộ $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ cũng thoả mãn các điều kiện của bộ λ_i trong bất đẳng thức Jensen. Do đó, ta có thể xây dựng các bất đẳng thức thông qua các hàm lồi từ bộ λ_i này. Sau đây trình bày cách xây dựng một số bất đẳng thức thông qua hàm lồi $f(x) = \frac{1}{x}$ và với điều kiện $ab + ac + bc = abc$.

2.3.3. Xây dựng bất đẳng thức với điều kiện $ab + ac + bc = abc$ đối với hàm lồi $f(x) = \frac{1}{x}$

Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$ trên $(0, +\infty)$. Bất đẳng thức Jensen của $f(x)$ với bộ $\lambda_1 = \frac{1}{a}, \lambda_2 = \frac{1}{b}, \lambda_3 = \frac{1}{c}$ được viết như sau:

$$\frac{1}{\frac{x_1}{a}+\frac{x_2}{b}+\frac{x_3}{c}} \le \frac{1}{ax_1}+\frac{1}{bx_2}+\frac{1}{cx_3}. \qquad (1.12)$$

Đặt $x_1 = b, x_2 = c, x_3 = a$. Khi đó, bất đẳng thức (1.12) trở thành

$$\frac{1}{\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}} \le \frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}.$$

Điều này có nghĩa là

$$\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}\right)\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right) \ge 1.$$

Vậy ta có bài toán bất đẳng thức sau:

Bài toán 5. Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $ab + ac + bc = abc$. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}\right)\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right) \ge 1.$$

Với việc thay đổi cách đặt x_i và cách làm tương tự, chúng tôi có thể xây dựng thêm nhiều dạng bất đẳng thức khác. Đặc biệt, bằng cách tiếp cận này nhưng thay hàm $f(x) = \frac{1}{x}$ bởi các hàm lồi khác, chúng tôi sẽ thu được nhiều dạng bất đẳng thức khác nhau. Sau đây trình bày cách xây dựng một số bất đẳng thức thông qua hàm lồi $f(x) = x^2$ và với điều kiện $ab + ac + bc = abc$.

2.3.4. Xây dựng bất đẳng thức với điều kiện $ab + ac + bc = abc$ đối với hàm lồi $f(x) = x^2$

Xét hàm số $f(x) = x^2$ trên $\mathbb{R}$. Bất đẳng thức Jensen của f(x) với bộ $\lambda_1 = \frac{1}{a}, \lambda_2 = \frac{1}{b}, \lambda_3 = \frac{1}{c}$ được viết như sau:

$$\left(\frac{1}{a}x_1+\frac{1}{b}x_2+\frac{1}{c}x_3\right)^2 \le \frac{1}{a}x_1^2+\frac{1}{b}x_2^2+\frac{1}{c}x_3^2.$$

Điều này tương đương với

$$(bcx_1 + acx_2 + abx_3)^2 \le (abc)^2\left(\frac{1}{a}x_1^2+\frac{1}{b}x_2^2+\frac{1}{c}x_3^2\right). \qquad (1.13)$$

Đặt $x_1 = \frac{1}{bc}, x_2 = \frac{1}{ac}, x_3 = \frac{1}{ab}\cdot$ Khi đó, bất đẳng thức (1.13) trở thành

$$3^2 \le abc\left(\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{ab}\right).$$

Điều này có nghĩa là

$$9 \le a + b + c.$$

Vậy ta có bài toán bất đẳng thức sau:

Bài toán 6. Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $ab + ac + bc = abc$. Chứng minh rằng:

$$9 \le a + b + c.$$

Tất nhiên, chúng tôi hoàn toàn có thể xét các hàm lồi khác như $f(x) = e^x$ để có được các bất đẳng thức tương ứng. Bây giờ, chúng tôi xét một cách khai thác các điều kiện khác, thay vì cho bộ λ_i, các điều kiện được biến đổi tương ứng với các bộ x_i để đạt được các bất đẳng thức có độ phức tạp lớn hơn. Ví dụ sau, trình bày việc xây dựng bất đẳng thức với cách tiếp cận này.

Ví dụ 2. Cho a, b, c, d là bốn số thực dương thỏa mãn $a + b + c + d = 1$.

Xét hàm lồi $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}}$ trên $(0,1)$. Bất đẳng thức Jensen của f(x) được viết như sau:

$$f(\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2 + \lambda_3x_3 + \lambda_4x_4) \le \lambda_1f(x_1) + \lambda_2f(x_2) + \lambda_3f(x_3) + \lambda_4f(x_4).$$

Bây giờ, thay vì chọn λ_i tương ứng với a, b, c, d như trong các ví dụ trên, chúng tôi có thể thay đổi cách tiếp cận bằng việc đặt $x_1 = a, x_2 = b, x_3 = c, x_4 = d$ và $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \frac{1}{4}$. Khi đó ta có:

$$f(a) + f(b) + f(c) + f(d) \ge 4f\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{1-a}}+\frac{b}{\sqrt{1-b}}+\frac{c}{\sqrt{1-c}}+\frac{d}{\sqrt{1-d}} \ge 4f\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{1-a}}+\frac{b}{\sqrt{1-b}}+\frac{c}{\sqrt{1-c}}+\frac{d}{\sqrt{1-d}} \ge \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy ta có bài toán sau:

Bài toán 7. Cho a, b, c, d là bốn số thực dương thỏa mãn $a + b + c + d = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{1-a}}+\frac{b}{\sqrt{1-b}}+\frac{c}{\sqrt{1-c}}+\frac{d}{\sqrt{1-d}} \ge \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Ví dụ sau trình bày việc xây dựng bất đẳng thức với điều kiện $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = 4$ với x, y, z là các số dương.

Ví dụ 3. Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = 4.$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$ trên $(0, +\infty)$. Bất đẳng thức Jensen của $f(x)$ với điều kiện $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = 4$ trong trường hợp $n = 3$ được viết như sau:

$$\frac{1}{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3} \le \lambda_1 \frac{1}{a_1} + \lambda_2 \frac{1}{a_2} + \lambda_3 \frac{1}{a_3}.$$

Ta có

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{4x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{4z} = 1.$$

Thay (a_1, a_2, a_3) lần lượt bằng bộ ba (x, y, z); (y, x, z); (z, x, y). Lấy $\lambda_1 = \frac{2}{4}$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{4}$, ta được ba bất đẳng thức

$$\frac{1}{2x+y+z} \le \frac{1}{16}\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \quad (1.14)$$

$$\frac{1}{x+2y+z} \le \frac{1}{16}\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{z}\right) \quad (1.15)$$

$$\frac{1}{x+y+2z} \le \frac{1}{16}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{z}\right). \quad (1.16)$$

Cộng ba bất đẳng thức (1.14), (1.15) và (1.16) vế theo vế, ta được

$$\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \le \frac{1}{16}\left(\frac{4}{x} + \frac{4}{y} + \frac{4}{z}\right).$$

Điều này có nghĩa là

$$\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \le 1.$$

Vậy ta có bài toán sau:

Bài toán 8. Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \le 1.$$

Đây là bài toán bất đẳng thức trong đề thi Tuyển sinh Đại học năm học 2004-2005, Khối A.

3. Kết luận

Việc sử dụng hàm lồi có thể xây dựng được các bất đẳng thức quen thuộc và vô số bất đẳng thức khác có trong các đề thi học sinh giỏi các cấp, việc xây dựng nên 2 quy trình này sẽ hỗ trợ cho người dạy trong việc sáng tạo ra các bất đẳng thức mới, đồng thời định hướng được phương pháp giải thông qua việc xây dựng đó. Ngoài ra, chúng tôi nhận thấy cũng có thể xây dựng các bất đẳng thức theo một kỹ thuật khác từ các cặp hàm lồi liên hợp, đây là một ý tưởng mà cần tiếp tục nghiên cứu về việc sáng tạo bất đẳng thức.

Tài liệu tham khảo

Bộ Giáo dục và Đào tạo. (2018). *Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán*. Hà Nội.

Đặng, T. N. (2018). *Khám phá kỹ thuật giải bất đẳng thức, bài toán Min-Max*. Hà Nội: NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.

Lê, D. M., & Nguyễn, V. H. (2009). *Nhập môn giải tích lồi ứng dụng*. Hà Nội: NXB Khoa học Tự nhiên và Công nghệ.

Nguyễn, N. Đ., & Nguyễn, T. M. H. (2015). Dùng bất đẳng thức cosi để tìm cực trị trong đại số và hình học. *Tạp chí Giáo dục*, (số đặc biệt tháng 4), 73-75.

Nguyễn, T. H. (2009). *Các bài toán về giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất*. Hà Nội: NXB Giáo dục.

Nguyễn, V. L., & Nguyễn, N. T. (2018). *Các bài giảng về bất đẳng thức Bunhiacopxki*. Hà Nội: NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.

Phạm, K. H. (2006). *Sáng tạo bất đẳng thức*. Hà Nội: NXB Hà Nội.

Trần, P. (2009). *Những viên kim cương trong chứng minh bất đẳng thức*. Hà Nội: NXB Tri thức.

Võ, Q. B. C., & Trần, Q. A. (2018). *Sử dụng phương pháp Cauchy-Schwarz để chứng minh bất đẳng thức*. Hà Nội: NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.