



DOI: <https://doi.org/10.52714/dthu.14.8.2025.1553>

CHỈ SỐ CHÍNH QUY CỦA MỘT 0-LƯỢC ĐỒ CỦA TẬP ĐIỂM BÉO TRONG KHÔNG GIAN XẠ ẢNH P^3

Trần Nam Sinh

Khoa Toán học, Trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng, Việt Nam

Tác giả liên hệ, Email: tnsinh@ued.udn.vn

Lịch sử bài báo

Ngày nhận: 02/3/2025; Ngày nhận chỉnh sửa: 24/3/2025; Ngày duyệt đăng: 01/4/2025

Tóm tắt

Trong bài báo này, chúng tôi tính chỉ số chính quy của một lược đồ gồm 6 điểm béo $Z = 3P_1 + 2P_2 + \dots + 2P_6$ trong không gian xạ ảnh P^3 . Với phương pháp đánh giá chặn trên và chặn dưới chúng tôi chỉ ra được giá trị của chỉ số chính quy cần tính. Kết quả của bài báo được trình bày qua Định lý 3.4.

Từ khóa: *Chỉ số chính quy, hàm Hilbert, không gian xạ ảnh, lược đồ, tập điểm béo.*

Trích dẫn: Trần, N. S. (2025). Chỉ số chính quy của một 0-lược đồ của tập điểm béo trong không gian xạ ảnh P^3 . *Tạp chí Khoa học Đại học Đồng Tháp*, 14(8), 78-87. <https://doi.org/10.52714/dthu.14.8.2025.1553>

Copyright © 2025 The author(s). This work is licensed under a CC BY-NC 4.0 License.

**THE REGULARITY INDEX OF ZERO-SCHEME FAT POINTS
PROJECTIVE SPACE P^3**

Tran Nam Sinh

Faculty of Math, The University of Da Nang, University of Science and Education, Viet Nam

Corresponding author, Email: tnsinh@ued.udn.vn

Article history

Received: 02/3/2025; Received in revised form: 24/3/2025; Accepted: 01/4/2025

Abstract

This paper computes the regularity index of a scheme $Z = 3P_1 + 2P_2 + \cdots + 2P_6$ the set of six fat points in projective space P^3 . With the method of evaluating the upper and lower bounds, it shows the value of the regularization index to be calculated. This result is presented in Theorem 3.4.

Keywords: *Fat points, Hilbert function, projective space, scheme, the regularity index.*

1. Giới thiệu

Cho $\mathbb{P}^n := \mathbb{P}_k^n$ là một không gian xạ ảnh n -chiều trên trường đóng đại số k và $R = k[x_0, x_1, \dots, x_n]$ là vành đa thức $n+1$ biến $x_0, x_1, \dots, x_n$ với hệ số trên k . Cho $P_1, \dots, P_s$ là các điểm phân biệt trong $\mathbb{P}^n$, ký hiệu $\mathfrak{p}_i$ là ideal nguyên tố thuần nhất xác định bởi P_i , $i = 1, \dots, s$. Cho $m_1, \dots, m_s$ là các số nguyên dương, ideal $I = \mathfrak{p}_1^{m_1} \cap \dots \cap \mathfrak{p}_s^{m_s}$ gồm các đa thức $f \in R$ triệt tiêu tại P_i với số bội $\geq m_i, i = 1, \dots, s$; ta ký hiệu Z là lược đồ chiều không xác định bởi I và gọi

$$Z = m_1 P_1 + \dots + m_s P_s$$

là tập điểm béo trong $\mathbb{P}^n$.

Vành tọa độ thuần nhất của Z là $A := R/I$. Đây là vành phân bậc $A = \bigoplus_{t \geq 0} A_t$ có số bội $e(A) := \sum_{i=1}^s \binom{m_i + n - 1}{n}$. Với mọi $t \in \mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ là tập các số tự nhiên), phần phân bậc A_t là một k -không gian véc tơ hữu hạn chiều. Hàm số

$$H_Z(t) = \dim_k A_t$$

được gọi là hàm Hilbert của Z .

Hàm Hilbert tăng chặt cho đến khi đạt được số bội $e(A)$, tại đó nó dừng. Chỉ số chính quy của Z là số nguyên dương bé nhất sao cho $H_Z(t) = e(A)$ và nó được ký hiệu là $\text{reg}(Z)$. Chỉ số chính quy $\text{reg}(Z)$ bằng với chỉ số chính quy Castelnuovo – Mumford $\text{reg}(A)$ của vành tọa độ A .

Việc tính đúng giá trị của $\text{reg}(Z)$ là khó, thay vì vậy người ta tìm chặn trên của nó. Đã có nhiều kết quả về chặn trên của $\text{reg}(Z)$ có thể tìm thấy trong Ballico (2016), Catalisano (1993), Fatabi (2001), Nagel (2018), Phan (2000), Segre (1961).

Cho tập điểm béo $Z = m_1 P_1 + \dots + m_s P_s$ trong $\mathbb{P}^n$, đặt

$$T_j = \max \left\{ \left\lfloor \frac{\sum_{i=1}^s m_i + j - 2}{j} \right\rfloor \mid P_1, \dots, P_s \text{ nằm trên một } j\text{-phẳng} \right\},$$

$$T = \max \{ T_j \mid j = 1, \dots, n \}.$$

Một tập điểm $X = \{P_1, \dots, P_s\}$ được gọi là không suy biến nếu X không nằm trên một siêu phẳng. Một tập điểm béo $Z = m_1 P_1 + \dots + m_s P_s$ được gọi là không suy biến nếu X không suy biến. Năm 2016, Ballico & cs. (2016) đã chứng minh được

$$\text{reg}(Z) \leq T.$$

cho tập $Z = m_1 P_1 + \dots + m_{n+3} P_{n+3}$ không suy biến trong $\mathbb{P}^n$. Gần đây Nagel & cs. (2018) đã chứng minh được chặn trên đúng cho tập điểm béo tùy ý trong $\mathbb{P}^n$

Nhắc lại rằng việc tính đúng giá trị của $reg(Z)$ là rất khó. Vì vậy chỉ có vài kết quả được đăng trên các tạp chí uy tín như sau.

Năm 1984, Davis & Geramita (1984) đã tính được giá trị của $reg(Z)$ khi tập điểm nằm trên một đường thẳng với

$$reg(Z) = m_1 + \dots + m_s - 1.$$

Một đường cong hữu tỷ chuẩn trong $\mathbb{P}^n$ là đường cong có phương trình tham số

$$x_0 = t^n, x_1 = t^{n-1}u, \dots, x_{n-1} = tu^{n-1}, x_n = u^n.$$

Cho một tập điểm béo $Z = m_1P_1 + \dots + m_sP_s$ trong $\mathbb{P}^n$, với $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_s$. Năm 1993, Catalisano & cs. (1993) đã chỉ ra công thức tính $reg(Z)$ trong hai trường hợp sau:

Nếu $s \geq 2$ và $P_1, \dots, P_s$ nằm trên đường cong hữu tỷ chuẩn trong $\mathbb{P}^n$ thì

$$reg(Z) = \max \left\{ m_1 + m_2 - 1, \left\lceil \left(\sum_{i=1}^s m_i + n - 2 \right) / n \right\rceil \right\}.$$

Nếu $n \geq 3, 2 \leq s \leq n+2, 2 \leq m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_s$ và $P_1, \dots, P_s$ nằm ở vị trí tổng quát trong $\mathbb{P}^n$ thì $reg(Z) = m_1 + m_2 - 1$.

Năm 2012, Phan (2012) cũng đã tính được chỉ số chính quy $reg(Z) = T$ cho tập $s+2$ điểm béo sao cho chúng không nằm trên một $(s-1)$ -phẳng trong $\mathbb{P}^n$ với $s \leq n$. Trong năm 2017, Phan & Tran (2017) đã tính được chỉ số chính quy $reg(Z) = T$ cho tập $s+3$ điểm béo đồng bội, không nằm trên $(r-1)$ -phẳng, $s \leq r+3$, trong $\mathbb{P}^n$.

Một tập điểm béo $Z = m_1P_1 + \dots + m_sP_s$ được gọi là hầu đồng bội nếu $m_i \in \{m-1, m\}$, với mọi $i = 1, \dots, s$.

Trong bài báo này, chúng tôi đi tính chỉ số chính quy $reg(Z)$ cho một lược đồ gồm 6 điểm hầu đồng bội $3P_1 + 2P_2 + \dots + 2P_6$ trong $\mathbb{P}^3$. Kết quả này là hoàn toàn mới và được nêu trong Định lý 3.4.

2. Các bổ đề cần dùng

Trong quá trình chứng minh các kết quả chính, chúng tôi sử dụng các bổ đề sau. Bổ đề sau đây dùng để tính giá trị $reg(Z)$ khi tập điểm nằm trên một đường thẳng.

Bổ đề 2.1. (Davis & Geramita, 1984). Nếu $Z = m_1P_1 + \dots + m_sP_s$ là một tập điểm béo tùy ý trong $\mathbb{P}^n$, thì

$$reg(Z) = m_1 + \dots + m_s - 1$$

khi và chỉ khi các điểm $P_1, \dots, P_s$ nằm trên một đường thẳng.

Cho tập các chỉ số $\{I, \dots, s\}$ và $\{i_1, \dots, i_r\} \subseteq \{1, \dots, s\}$ là tập chỉ số con của $\{I, \dots, s\}$.

Ta gọi $Y = m_{i_1}P_{i_1} + \dots + m_{i_r}P_{i_r}$ là tập điểm béo con của tập $Z = m_1P_1 + \dots + m_sP_s$. Bổ đề sau giúp ta so sánh chỉ số chính quy của một tập điểm béo con của tập điểm béo cho trước.

Bổ đề 2.2. (Phan, 2012). Cho $X = \{P_1, \dots, P_s\}$ là các điểm phân biệt trong $\mathbb{P}^n$ và $m_1, \dots, m_s$ là các số nguyên dương. Đặt $I = \wp_1^{m_1} \cap \dots \cap \wp_s^{m_s}$. Nếu $Y = \{P_{i_1}, \dots, P_{i_r}\}$ là một tập con của X và $J = \wp_{i_1}^{m_{i_1}} \cap \dots \cap \wp_{i_r}^{m_{i_r}}$ khi đó $\text{reg}(R/J) \leq \text{reg}(R/I)$.

Từ đây suy ra, nếu $Z = m_1P_1 + \dots + m_sP_s$ là tập điểm béo xác định bởi ideal I và $U = m_{i_1}P_{i_1} + \dots + m_{i_r}P_{i_r}$ là tập điểm béo xác định bởi ideal J , thì ta có $\text{reg}(U) \leq \text{reg}(Z)$.

Hai bổ đề tiếp theo cho phép ta tính chỉ số chính quy cho một tập điểm cho trước.

Bổ đề 2.3. (Phan, 2017). Cho $P_1, \dots, P_{s+2}$ là các điểm phân biệt không nằm trên $(s-1)$ -phẳng trong $\mathbb{P}^n$, $s \leq n$ và $m_1, \dots, m_s$ là các số nguyên dương. Đặt $I = \wp_1^{m_1} \cap \dots \cap \wp_{s+2}^{m_{s+2}}$, $A = R/I$. Thì, $\text{reg}(A) = \max\{T_j | j=1, \dots, n\}$,

Trong đó $T_j = \max \left\{ \left[\frac{\sum_{l=1}^q m_{i_l} + j - 2}{j} \right] \mid P_{i_1}, \dots, P_{i_q} \text{ nằm trên một } j\text{-phẳng} \right\}, j=1, \dots, n$.

Bổ đề 2.4. (Phan & Tran, 2017). Cho $X = \{P_1, \dots, P_{s+3}\}$ là một tập các điểm phân biệt ở vị trí tổng quát trên s -phẳng, không nằm trên $(s-1)$ -phẳng trong $\mathbb{P}^n$, $s \leq n$, và m_i là các số nguyên dương. Đặt $Z = m_1P_1 + \dots + m_{s+3}P_{s+3}$ là tập điểm béo. Khi đó,

$$\text{reg}(Z) = \max\{T_j \mid j=1, \dots, n\}$$

trong đó $T_j = \max \left\{ \left[\frac{\sum_{l=1}^q m_{i_l} + j - 2}{j} \right] \mid P_{i_1}, \dots, P_{i_q} \text{ nằm trên một } j\text{-phẳng} \right\}, j=1, \dots, n$.

Bổ đề sau đây cho ta chặn trên cho tập $n+3$ điểm béo không suy biến trong $\mathbb{P}^n$.

Bổ đề 2.5. (Ballico & cs., 2016). Cho $Z = m_1P_1 + \dots + m_{n+3}P_{n+3}$ là một tập $n+3$ điểm béo không suy biến trong $\mathbb{P}^n$. Khi đó, $\text{reg}(Z) \leq \max\{T_j \mid j=1, \dots, n\}$

trong đó $T_j = \max \left\{ \left[\frac{\sum_{l=1}^q m_{i_l} + j - 2}{j} \right] \mid P_{i_1}, \dots, P_{i_q} \text{ nằm trên một } j\text{-phẳng} \right\}, j=1, \dots, n$.

3. Chỉ số chính quy của lược đồ $3P_1 + 2P_2 + \dots + 2P_6$ trong $\mathbb{P}^3$

Để chứng minh các kết quả của bài báo này, chúng tôi bắt đầu từ nhận xét sau:

Bổ đề 3.1. Cho $X = \{P_1, \dots, P_6\}$ là tập sáu điểm phân biệt không suy biến trong $\mathbb{P}^3$. sao cho không có năm điểm nào của X nằm trên 2-phẳng. Cho $m_1, \dots, m_6$ là số nguyên dương và tập điểm béo $Z = m_1P_1 + \dots + m_6P_6$.

Đặt $T_j = \max \left\{ \left\lceil \frac{\sum_{l=1}^q m_{i_l} + j - 2}{j} \right\rceil \mid P_{i_1}, \dots, P_{i_q} \text{ nằm trên một } j\text{-phẳng} \right\}$, và

$$T = \max \{T_j \mid j = 1, 2, 3\}$$

Khi đó, nếu $T=T_1$ hoặc $T=T_2$ thì $\text{reg}(Z) = T$.

Chứng minh. Xét hai trường hợp của T .

• $T=T_1$: Gọi d là đường thẳng đi qua các điểm $P_{i_1}, \dots, P_{i_r}$ sao cho

$T_1 = m_{i_1} + \dots + m_{i_r} - 1$. Xét tập điểm béo $Y = m_{i_1} P_{i_1} + \dots + m_{i_r} P_{i_r}$, theo Bổ đề 2.2, ta có

$$\text{reg}(Z) \geq \text{reg}(Y) = T_1 = T.$$

Hơn nữa, theo Bổ đề 2.5, ta có $\text{reg}(Z) \leq T$. Do đó $\text{reg}(Z) = T$.

• $T=T_2$: Gọi α là 2-phẳng đi qua các điểm $P_{i_1}, \dots, P_{i_s}$ sao cho $T_2 = \left\lceil \frac{m_{i_1} + \dots + m_{i_s}}{2} \right\rceil$,

do không có năm điểm của X nằm trên 2-phẳng, nên $s \leq 4$. Xét tập điểm béo $U = m_{i_1} P_{i_1} + \dots + m_{i_s} P_{i_s}$, theo Bổ đề 2.3 ta có $\text{reg}(U) = T_2 = T$.

Mặt khác theo Bổ đề 2.5, ta có $\text{reg}(U) \leq T$. Do đó $\text{reg}(Z) = T$.

Từ đó ta nhận được $\text{reg}(Z) = T$.

Bổ đề 3.1 đã được chứng minh.

Mệnh đề 3.2. Cho $X = \{P_1, \dots, P_6\}$ là một tập 6 điểm phân biệt không suy biến, không ở vị trí tổng quát sao cho không có năm điểm nằm trên 2-phẳng trong không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^3$. Cho lược đồ sau $Z = 3P_1 + 2P_2 + 2P_3 + \dots + 2P_6$.

Đặt $T_j = \max \left\{ \left\lceil \frac{\sum_{l=1}^q m_{i_l} + j - 2}{j} \right\rceil \mid P_{i_1}, \dots, P_{i_q} \text{ nằm trên một } j\text{-phẳng} \right\}$,

với $m_{i_1} = 3$ hoặc $m_{i_1} = 2$ và $T = \max \{T_j \mid j = 1, 2, 3\}$

Khi đó $\text{reg}(Z) = T$.

Chứng minh. Với sáu điểm nằm trong không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^3$, ta luôn có

$$T_3 = \left\lceil \frac{3 + 5 \cdot 2 + 3 - 2}{3} \right\rceil = 4.$$

Do không có năm điểm nào của X nằm trên 2-phẳng nên không có bốn điểm của X nằm trên một đường thẳng. Ta có các khả năng sau:

• **Trường hợp 1:** X có ba điểm nằm trên một đường thẳng. Gọi d là đường thẳng đi qua ba điểm của X . Khi đó ta có các khả năng sau:

- d đi qua P_1 và P_i , P_j ($i, j = 2, \dots, 6$) thì $T_1 = 6$,

- d đi qua P_i, P_j, P_k ($i, j, k=3, \dots, 6$) thì $T_1 = 5$.

Do không có năm điểm của X nằm trên 2-phẳng nên $T_2 \leq \left\lfloor \frac{3+3.2+2-2}{2} \right\rfloor = 4$.

Do đó $T = T_1$.

Theo Bổ đề 3.1 ta có $\text{reg}(Z) = T$.

• *Trường hợp 2:* X không có ba điểm nằm trên một đường thẳng nên $T_1 \leq 4$.

Do X không nằm ở vị trí tổng quát nên có bốn điểm nằm trên 2-phẳng. Khi đó

$$4 = \left\lfloor \frac{4.2+2-2}{2} \right\rfloor \leq T_2 \leq \left\lfloor \frac{3+3.2+2-2}{2} \right\rfloor = 4.$$

Suy ra $T = T_2 = 4$.

Theo Bổ đề 3.1 ta có $\text{reg}(Z) = T$.

Mệnh đề 3.2 đã được chứng minh. $\square$

Từ Bổ đề 2.1 và Bổ đề 2.2 ta có nhận xét sau đây.

Nhận xét. Cho $X = \{P_1, \dots, P_{n+3}\}$ là tập $n+3$ điểm phân biệt không suy biến $\mathbb{P}^n$.

Cho $m_1, \dots, m_{n+3}$ là số nguyên dương và tập điểm béo $Z = m_1 P_1 + \dots + m_{n+3} P_{n+3}$.

$$\text{Đặt } T_j = \max \left\{ \left\lfloor \frac{\sum_{i=1}^q m_{i_j} + j - 2}{j} \right\rfloor \mid P_{i_1}, \dots, P_{i_q} \text{ nằm trên một } j\text{-phẳng} \right\},$$

$$\text{và } T = \max \{T_j \mid j = 1, 2, 3\}$$

Khi đó, nếu $T = T_1$ thì $\text{reg}(Z) = T$.

Thật vậy, giả sử $P_{i_1}, \dots, P_{i_r}$ là r điểm nằm trên đường thẳng sao cho

$$T = T_1 = m_{i_1} + \dots + m_{i_r} - 1.$$

Khi đó, xét lược đồ $U = m_{i_1} P_{i_1} + \dots + m_{i_r} P_{i_r}$.

Theo Bổ đề 2.1 ta có $\text{reg}(U) = T_1 = T$.

Mặt khác, $P_{i_1}, \dots, P_{i_r}$ là một tập con của X nên U là một lược độ con của Z . Theo Bổ đề 2.2 và ta có $T = \text{reg}(U) \leq \text{reg}(Z) \leq T$. Vậy $\text{reg}(Z) = T$.

Mệnh đề 3.3. Cho $X = \{P_1, \dots, P_6\}$ là tập 6 điểm phân biệt không suy biến, không ở vị trí tổng quát trong $\mathbb{P}^3$. Cho lược đồ sau $Z = 3P_1 + 2P_2 + 2P_3 + \dots + 2P_6$.

$$\text{Đặt } T_j = \max \left\{ \left\lfloor \frac{\sum_{i=1}^q m_{i_j} + j - 2}{j} \right\rfloor \mid P_{i_1}, \dots, P_{i_q} \text{ nằm trên một } j\text{-phẳng} \right\},$$

với $m_{i_l} = 3$ hoặc $m_{i_l} = 2$ và $T = \max\{T_j \mid j=1,2,3\}$

Khi đó $\text{reg}(Z) = T$.

Chứng minh: Với sáu điểm nằm trong không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^3$, ta luôn có

$$T_3 = \left\lfloor \frac{3+5 \cdot 2+3-2}{3} \right\rfloor = 4.$$

Nếu X không có 5 điểm nằm trên 2-phẳng α , theo Mệnh đề 3.2, ta có

$$\text{reg}(Z) = T.$$

Nếu X có 5 điểm nằm trên 2-phẳng α . Khi đó

$$5 = \left\lfloor \frac{5 \cdot 2+2-2}{2} \right\rfloor \leq T_2 \leq \left\lfloor \frac{3+4 \cdot 2+2-2}{2} \right\rfloor = 5, \text{ suy ra } T_2 = 5.$$

Trường hợp 1: X có 4 điểm nằm trên một đường thẳng d . Khi đó ta có

$$7 \leq T_1 \leq 8,$$

Do đó $T = \max\{T_1, T_2, T_3\} = T_1$.

Theo Bổ đề 3.1 ta có $\text{reg}(Z) = T$.

Trường hợp 2: X có ba điểm nằm trên một đường thẳng d . Ta có 2-phẳng α luôn chứa d . Khi đó

- Nếu d đi qua P_l thì $T_l = 6$.
- Nếu d không đi qua P_l thì $T_l = 5$.

Suy ra $T = \max\{T_1, T_2, T_3\} = T_l$.

Theo Bổ đề 3.1 ta có $\text{reg}(Z) = T$.

Trường hợp 3: X không có ba điểm nằm trên một đường thẳng d . Khi đó

$$T_1 \leq 4.$$

Suy ra $T = \max\{T_1, T_2, T_3\} = T_2$.

Gọi $Y = \{P_{i_1}, P_{i_2}, P_{i_3}, P_{i_4}, P_{i_5}\}$ là tập gồm 5 điểm nằm trên 2-phẳng α . Xét lược đồ con của Z sau $U = m_{i_1}P_{i_1} + \dots + m_{i_5}P_{i_5}$ với $m_{i_l} \in \{2, 3\}$, $l=1, \dots, 5$.

Đặt $t_j = \max \left\{ \left\lfloor \frac{\sum_{l=1}^q m_{i_l} + j - 2}{j} \right\rfloor \mid P_{i_1}, \dots, P_{i_q} \text{ nằm trên một } j\text{-phẳng} \right\}$,
 $j=1, 2$ với $m_{i_l} = 3$ hoặc $m_{i_l} = 2$

Do không có ba điểm nào của X nằm trên một đường thẳng nên trên α cũng không có ba điểm nằm trên một đường thẳng. Khi đó $t_1 \leq 4$, $t_2 = T_2 = 5$.

Vì thế tập điểm Y nằm ở vị trí tổng quát trong $\alpha \cong \mathbb{P}^2$.

Theo Bổ đề 2.4 ta có $\text{reg}(U) = t_2 = T_2 = T$.

Mặt khác, $P_{i_1}, \dots, P_{i_r}$ là một tập con của X nên Y là một lược độ con của Z . Theo Bổ đề 2.2 và ta có $T \leq \text{reg}(U) \leq \text{reg}(Z) \leq T$.

Vậy $\text{reg}(Z) = T$.

Mệnh đề 3.3 được chứng minh. $\square$

Định lý 3.4. Cho $X = \{P_1, \dots, P_6\}$ là tập 6 điểm phân biệt không suy biến, không trong $\mathbb{P}^3$. Cho lược đồ sau $Z = 3P_1 + 2P_2 + 2P_3 + \dots + 2P_6$.

$$\text{Đặt } T_j = \max \left\{ \left\lceil \frac{\sum_{i=1}^q m_{i_j} + j - 2}{j} \right\rceil \mid P_{i_1}, \dots, P_{i_q} \text{ nằm trên một } j\text{-phẳng} \right\},$$

với $m_{i_j} = 3$ hoặc $m_{i_j} = 2$ và $T = \max \{T_j \mid j = 1, 2, 3\}$

Khi đó $\text{reg}(Z) = T$.

Chứng minh.

Trường hợp 1: Nếu X ở vị trí tổng quát trong P^3 , theo Bổ đề 2.4 ta có $\text{reg}(Z) = T$.

Trường hợp 2: Nếu X không nằm ở vị trí tổng quát.

- X không có 5 điểm nằm trên 2-phẳng. Theo Mệnh đề 3.2 ta có $\text{reg}(Z) = T$.
- X có 5 điểm nằm trên 2-phẳng. Theo Mệnh đề 3.3 ta có $\text{reg}(Z) = T$.

Định lý 3.4 đã được chứng minh. $\square$

Tài liệu tham khảo

- Ballico, E., Dumitrescu, O., & Postighel E. (2016). "On Segre's bound for fat points in P^n ", *J. Pure and Appl. Algebra* 220, Issue, 2307-2323. <https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2015.11.008>.
- Catalisano, M. V., Trung, N. V., & Valla, G. (1993). "A sharp bound for the regularity index of fat points in general position", *Proc. Amer. Math. Soc.* 118, 717-724. <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1993-1146859-0>.
- Davis, E. D., & Geramita, A. V. (1984). The Hilbert function of a special class of 1-dimensional Cohen – Macaulay graded algebras, *The Curves Seminar at Queen's, Queen's Paper in pure and Appl. Math.* 67, 1-29.
- Fatabbi, G., & Lorenzini, A. (2001). On the sharp bound for the regularity index for any set of fat points, *J. Pure Appl. Algebra.* 161, 91-111. [https://doi.org/10.1016/S0022-4049\(00\)00083-9](https://doi.org/10.1016/S0022-4049(00)00083-9).
- Nagel, U., & Trok, B. (2018). Segre's regularity bound for fat points scheme, (accepted 30/3/2018 at *Annali della Scuole Normale Superiore*). <https://doi.org/10.48550/arXiv.1611.06279>.

- Phan, V. T. (2000). Segre bound for the regularity index of fat points in P^3 , *J. Pure and Appl. Algebra*, 151, 197 – 214. [https://doi.org/10.1016/S0022-4049\(99\)00055-9](https://doi.org/10.1016/S0022-4049(99)00055-9).
- Phan, V. T. (2012). Regularity index of $s+2$ fat points not on a linear $(s-1)$ -space, *Comm. Algebra*, 40, 3704 – 3715. <https://doi.org/10.1080/00927872.2011.593385>.
- Phan, V. T., & Tran, N. S. (2017). On the regularity index of fat points not on a linear $(r-1)$ -space, $s \leq r+3$, *Comm. Algebra*, 45, 4123-4138. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1604.06347>.
- Phan, V. T. & Tran, T. T. V. (2019). An estimate of the regularity index of fat points in some, *Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp.* 49, 399 – 410.
- Segre, B. (1961). Alcune question su insiemi finiti di punti geometria algebrica, *Atti. Convegno. Intern. di Torino*, 15-33.