TẠP CHÍ KHOA HỌC ĐẠI HỌC ĐỒNG THÁP
Dong Thap University Journal of Science
Số Đặc biệt Hội nghị Khoa học tự nhiên
Đồng bằng sông Cửu Long lần IV
ISSN 0866-7675 | e-ISSN 2815-567X

DOI: https://doi.org/10.52714/dthu.14.02S.2025.1504

ĐỊNH LÍ GIỚI HẠN TRUNG TÂM CHO MÔ HÌNH LÃI ĐÔI

Lâm Hoàng Chương[1] và Trịnh Hữu Nghiệm[2*]

[1]*Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Cần Thơ, Việt Nam*

[2]*Khoa Cơ bản, Trường Đại học Nam Cần Thơ, Việt Nam*

[*]*Tác giả liên hệ, Email: thnghiem27@gmail.com*

Lịch sử bài báo

Ngày nhận: 22/02/2025; Ngày nhận chỉnh sửa: 20/3/2025; Ngày duyệt đăng: 24/3/2025

Tóm tắt

Bài báo nhằm mục đích xây dựng mô hình lãi đôi cho thị trường tài chính (thị trường chứng khoán, phái sinh, trái phiếu,...) được thể hiện bởi bước đi ngẫu nhiên trong không gian một chiều và tìm qui luật xác suất cho mô hình đó bằng phương pháp moment như trong các bài báo của Depauw và Derrien (2009) và Lam (2014). Cụ thể, bài báo đã chứng minh được mô hình đang xét hội tụ theo phân phối chuẩn. Bài báo này có thể được xem là một cải tiến đáng kể từ các mô hình đã xét trong Lâm Hoàng Chương và Dương Thi Bé Ba (Lâm & Dương, 2017) hay Lâm Hoàng Chương và cộng sự (Lâm & cs., 2021)..

Từ khóa: *Bước đi ngẫu nhiên, công thức Jacob-Bernoulli, phân phối chuẩn, toán tử Markov.*

Trích dẫn: Lâm, H. C., & Trịnh, H. N. (2025). Định lí giới hạn trung tâm cho mô hình lãi đôi. *Tạp chí Khoa học Đại học Đồng Tháp, 14*(5), 1-12. https://doi.org/10.52714/dthu.14.02S.2025.1504

CENTRAL LIMIT THEOREM IN THE DOUBLE PROFIT MODEL

Lam Hoang Chuong[1] and Trinh Huu Nghiem[2*]

[1]College of Natural Sciences, Can Tho University, Vietnam

[2]Faculty of Basic Sciences, Nam Can Tho University, Vietnam

[*]Corresponding author, Email: thnghiem27@gmail.com

Article history

Received: 24/02/2025; Received in revised form: 20/3/2025; Accepted: 24/3/2025

Abstract

The article aims to develop a double profit model for financial markets (including the stock market, derivatives, bonds, etc.) represented by a random walk in one-dimensional space. It seeks to determine the probability law of this model using the moment method, as previously reported by Depauw and Derrien (2009) and Lam (2014). Specifically, the article proves that the examined model converges to a normal distribution. This study can be considered a significant improvement over the models analyzed in Lam Hoang Chuong and Duong Thi Be Ba (Lam & Duong, 2017), and Lam Hoang Chuong et al. (Lam et al., 2021).

Keywords: *Jacob-Bernoulli's formula, Markov operator, normal distribution, Random walk.*

1. Giới thiệu

Trong thị trường tài chính, các nhà giao dịch quan tâm nhất là làm sinh sôi đồng tiền (vốn) mà họ đã bỏ ra ban đầu. Hiển nhiên khi thực hiện nhiều giao dịch sẽ có lúc thắng hoặc thua. Nhà đầu tư có thể kiếm được nhiều tiền mặt dù có thể số lần thua nhiều hơn số lần thắng. Trong giao dịch, thắng hay thua không quan trọng bằng tỉ lệ lợi nhuận/rủi ro khi thực hiện mỗi giao dịch. Do đó họ thường chọn các giao dịch sao cho có tỉ lệ lợi nhuận/rủi ro cao nhất có thể (2/1 hoặc 3/1 hoặc 5/1). Ở đây, chúng ta giả sử tỉ lệ lợi nhuận/rủi ro sau mỗi lần giao dịch là con số không đổi 2/1 với xác suất tương ứng như sau:

+ Thua sẽ mất đi 1 đồng với xác suất 2/3.

+ Thắng sẽ nhận thêm 2 đồng với xác suất 1/3.

Mô hình này có thể tạm gọi là mô hình lãi đôi. Khi đó, với n ($n \in \mathbb{N}^*$) lần thực hiện giao dịch, ta cần nghiên cứu xem lợi nhuận thu được trung bình là bao nhiêu? Nó có tuân theo quy luật xác suất nào không? Từ giả định trên ta đặt $X_0 = 0$ là lợi nhuận ban đầu và X_n là lợi nhuận có được sau lần thực hiện giao dịch thứ n. Khi đó $(X_n)_{n\geq 0}$ là quá trình ngẫu nhiên với tập giá trị nguyên $\mathbb{Z}$ hay còn gọi là bước đi ngẫu nhiên trên không gian trạng thái rời rạc một nhiều. Giả sử sau lần giao dịch thứ n, lợi nhuận có được là $X_n = k$ ($k \in \mathbb{Z}$), xác suất chuyển tương ứng là:

$$\mathbb{p}(X_{n+1} = k - 1 \,|\, X_n = k) = \frac{2}{3},$$

$$\mathbb{p}(X_{n+1} = k + 2 | X_n = k) = \frac{1}{3}.$$

Đặt $\mathcal{P}f(X_n) = \mathbb{E}[(f(X_{n+1})|X_n)]$ với f là hàm đo được và bị chặn trên $\mathbb{Z}$. Toán tử $\mathcal{P}$ còn được gọi là Toán tử Markov tương ứng với bước đi ngẫu nhiên ở trên. Bằng cách tính kỳ vọng của biến ngẫu nhiên phụ thuộc, công thức dưới đây hoàn toàn được xác định

$$\mathcal{P}f(k) = \frac{1}{3}f(k+2) + \frac{2}{3}f(k-1).$$

Từ đẳng thức này chúng ta sẽ giải đáp được vấn đề đặt ra ở trên. Cụ thể, chúng ta sẽ chứng minh được quá trình đang xét hội tụ theo phân phối chuẩn được thể hiện dưới dạng định lý sau

Định lý 1.1 Cho $(X_n)_{n\geq 0}$ là bước đi ngẫu nhiên đã giới thiệu ở trên. Khi đó,

$$\frac{X_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}\,(0,2) \text{ khi } n \to \infty.$$

Trong đó, $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ là ký hiệu cho sự hội tụ theo phân phối của các biến ngẫu nhiên và $\mathcal{N}\,(0,2)$ là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với trung bình bằng 0 và phương sai bằng 2.

Phần tiếp theo Mục 2 giới thiệu phương pháp nghiên cứu cũng như kỹ thuật dẫn đến việc chứng minh Định lý 1.1 ở Mục 3. Cuối cùng phần kết luận ở Mục 4.

2. Phương pháp nghiên cứu

Có nhiều phương pháp khác nhau để nghiên cứu phân phối giới hạn của các biến ngẫu nhiên chẳng hạn như: phương pháp hàm đặc trưng (Brown, 1971), phương pháp toán tử (Trotter, 1959), phương pháp xấp xỉ martingale (Alili, 1999; Kozlov, 1985; Mathieu, 2008). Ở đây, chúng tôi sử dụng phương pháp moment như trong Lâm Hoàng Chương & cs (2021). Phương pháp này có thể được phát biểu dưới dạng bổ đề dưới đây được suy ra trực tiếp từ định lý 30.2 trong Billingsley (1995).

Bổ đề 2.1 *Cho $(Z_n)_{n\geq 1}$ là dãy các biến ngẫu nhiên có moment tại mọi bậc. Nếu với mọi $k = 1,2,3,\dots$ ta có*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(Z_n^{2k-1}\right) = 0, \tag{1}$$

và

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(Z_n^{2k}\right) = \frac{(2k)!}{k!2^k}\sigma^{2k}, \tag{2}$$

thì $(Z_n)_{n\geq 1}$ hội tụ theo phân phối đến $Z\sim\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ khi $n\to\infty$.

Chúng ta cần một số bổ đề dưới đây để hỗ trợ cho việc chứng minh ở phần 3.

Bổ đề 2.2 *Cho $f(m), Q(m)$ là các đa thức được xác định trên $\mathbb{Z}$ và thỏa mãn*

$$f(m+2) - 2f(m+1) + f(m) = Q(m), \tag{3}$$

với $f(0) = 0$ và $f(1) = 1$. Khi đó, ta có hai đẳng thức sau

$$f(m+2) - 3f(m) + 2f(m-1) = Q(m) + 2Q(m-1), \tag{4}$$

và

$$f(m) = \begin{cases} m + \displaystyle\sum_{\ell=0}^{m-2}\sum_{i=0}^{\ell} Q(i) & \text{nếu} \quad m \geq 2, \\ 0 & \text{nếu} \quad m = 0, \\ 1 & \text{nếu} \quad m = 1, \\ m + \displaystyle\sum_{\ell=1}^{-m}\sum_{i=1}^{\ell} Q(-i) & \text{nếu} \quad m \leq -1. \end{cases}$$

Chứng minh

Bằng cách thay m thành $m-1$ vào (3) ta được đẳng thức mới. Lấy (3) cộng với hai lần đẳng thức vừa có ta được (4). Bây giờ ta sẽ tìm nghiệm của (3) theo đa thức $Q(m)$ bằng cách xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: $m \geq 2$.

Sử dụng phương pháp đệ quy theo $m-1, m-2, \dots, 1, 0$ từ (3) như đã làm trong Lâm Hoàng Chương và cộng sự (Lâm & cs., 2021) và rút gọn ta được

$$f(m+1)-f(m)=f(1)-f(0)+\sum_{i=0}^{m-1}Q(i).$$

Thay điều kiện ban đầu $f(0)=0$ và $f(1)=1$ vào đẳng thức trên, ta được

$$f(m+1)-f(m)=1+\sum_{i=0}^{m-1}Q(i).$$

Tiếp tục đệ quy theo theo $m-1, m-2, \dots, 1$ và thu gọn cùng với điều kiện $f(1)=1$, ta được

$$f(m)=m+\sum_{\ell=0}^{m-2}\sum_{i=0}^{\ell}Q(i).$$

Trường hợp 2: $m \leq -1$.

Lập luận tương tự trường hợp 1 cùng với phương pháp đệ quy (3) theo $-1, -2, \dots, m$ ta được

$$f(m)=m+\sum_{\ell=1}^{-m}\sum_{i=1}^{\ell}Q(-i).$$

Như vậy, Bổ đề 2.2 đã được chứng minh. ■

Bổ đề 2.3 *Cho $Q(m), \varphi(m)$ là các đa thức được xác định trên $\mathbb{Z}$ và thỏa mãn phương trình*

$$Q(m)+2Q(m-1)=\varphi(m). \tag{5}$$

Khi đó, phương trình (5) có nghiệm $Q(m)=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{i}\varphi(m+1+i)$. (6)

Chứng minh

Bằng phép biến đổi tương đương từ (5), phương trình dưới đây được thành lập

$$Q(m-1)=\left(-\frac{1}{2}\right)Q(m)+\frac{1}{2}\varphi(m).$$

Đệ quy phương trình này theo $m+1, m+2, \dots$ và kết hợp với điều kiện $Q(m)$ là hàm đa thức, nghiệm của (5) được xác định bởi đẳng thức dưới đây

$$Q(m)=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{i}\varphi(m+1+i).$$

Bổ đề 2.3 đã được chứng minh. ■

Bổ đề ngay dưới đây được chứng minh trong tài liệu Graham & cs. (1994).

Bổ đề 2.4 (Jacob-Bernoulli) *Cho m, k là các số nguyên dương. Khi đó, ta có tổng sau*

$$\sum_{i=1}^{m}i^{k}=\frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}C_{k+1}^{j}B_{j}.m^{k+1-j},$$

ở đó B_j là hệ số Bernoulli với $B_0 = 1$ và $B_j = \sum_{v=0}^{j} \frac{1}{v+1} \sum_{r=0}^{v} (-1)^r C_j^r r^j, j = 1; 2; \ldots$.

Định nghĩa 2.1 (Hàm đa thức logarit) Chuỗi lũy thừa có dạng

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^s} = z + \frac{z^2}{2^s} + \frac{z^3}{3^s} + \cdots,$$

được gọi là hàm đa thức logarit hay chuỗi Dirichlet. Hàm đa thức này được ký hiệu là $Li_s(z)$. Ta thấy rằng hàm đa thức logarit luôn xác định với $|z| < 1$.

Bổ đề 2.5 *Chuỗi số sau luôn hội tụ*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \rho^k (k+1)^j = \frac{1}{\rho} Li_{-j}(\rho),$$

với mọi số thực $\rho \in (-1;\ 1)$.

Tiếp theo dưới đây có thể được gọi là phần chính của bài báo này.

4. Chứng minh Định lí 1.1

Nhằm mục đích giúp bạn đọc dễ theo dõi, chúng tôi chia phần chứng minh Định lý 1.1 thành các phần nhỏ hơn được gọi là các mệnh đề. Toán tử Markov cùng với kỳ vọng có điều kiện là hai công cụ hiệu quả trong việc nghiên cứu các moment của biến ngẫu nhiên. Để tìm được các moment của bước đi ngẫu nhiên đã xây dựng ở trên, một số phương trình dạng Poisson từ toán tử Markov $\mathcal{P}$ cần được giải.

Mệnh đề 3.1 *Cho $f_0(m)$ là hàm đa thức được xác định trên $\mathbb{Z}$. Xét phương trình*

$$\mathcal{P} f_0(m) - f_0(m) = 0 \tag{7}$$

với $f_0(0) = 0, f_0(1) = 1$. Khi đó, phương trình (7) có nghiệm $f_0(m) = m$.

Chứng minh

Khai triển (7) và rút gọn, ta được $f_0(m+2) - 3f_0(m) + 2f_0(m-1) = 0$.

Áp dụng các kết quả có được từ Bổ đề 2.2 và Bổ đề 2.3 vào phương trình trên, ta xác định được nghiệm của phương trình (7) dưới đây

$$f_0(m) = \begin{cases} m + \sum_{\ell=0}^{m-2} \sum_{i=0}^{\ell} Q(i) & \text{nếu} \quad m \geq 2, \\ 0 & \text{nếu} \quad m = 0, \\ 1 & \text{nếu} \quad m = 1, \\ m + \sum_{\ell=1}^{-m} \sum_{i=1}^{\ell} Q(-i) & \text{nếu} \quad m \leq -1. \end{cases}$$

ở đó $Q_0(m) = 0, \forall m \in \mathbb{Z}$. Vậy, $f_0(m) = m, \forall m \in \mathbb{Z}$. Mệnh đề 3.1 đã được chứng minh. ■

Mệnh đề 3.2 *Cho k là số nguyên dương và $f_k(m)$ là hàm đa thức được xác định trên $\mathbb{Z}$. Khi đó, với $f_k(0) = 0, f_k(1) = 1$, phương trình*

$$\mathcal{P}f_k(m) - f_k(m) = m^{2k-1} \tag{8}$$

có nghiệm

$$f_k(m) = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad m = 0, \\ 1 & \text{nếu} \quad m = 1, \\ \dfrac{1}{2k(2k+1)} m^{2k+1} + O\left(m^{2k}\right) & \text{nếu} \quad m \in \mathbb{Z} \backslash \{0; 1\}. \end{cases}$$

ở đây, $O\left(m^{2k}\right)$ là ký hiệu cho đa thức bất kỳ có bậc $2k$.

Chứng minh

Khai triển (8), ta được $f_k(m+2) - 3f_k(m) + 2f_k(m-1) = 3m^{2k-1}$.

Áp dụng Bổ đề 2.2 phương trình trên trở thành $Q_k(m) + 2Q_k(m-1) = 3m^{2k-1}$, (9)

và

$$f_k(m) = \begin{cases} m + \displaystyle\sum_{\ell=0}^{m-2} \sum_{i=0}^{\ell} Q_k(i) & \text{nếu} \quad m \geq 2, \\ 0 & \text{nếu} \quad m = 0, \\ 1 & \text{nếu} \quad m = 1, \\ m + \displaystyle\sum_{\ell=1}^{-m} \sum_{i=1}^{\ell} Q_k(-i) & \text{nếu} \quad m \leq -1. \end{cases}$$

Tiếp tục áp dụng Bổ đề 2.3, phương trình (9) có nghiệm

$$Q_k(m) = \frac{3}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^i (m+1+i)^{2k-1}.$$

Khai triển nhị thức Newton bậc $2k-1$ và rút gọn đẳng thức trên, ta được

$$Q_k(m) = \frac{3}{2} \sum_{j=0}^{2k-1} C_{2k-1}^j m^{2k-1-j} \sum_{i=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^i (i+1)^j,$$

hay

$$Q_k(m) = -3 \sum_{j=0}^{2k-1} C_{2k-1}^j Li_{-j}\left(-\frac{1}{2}\right) m^{2k-1-j},$$

trong đó

$$Li_{-j}\left(-\frac{1}{2}\right) = (-\frac{1}{2}) \sum_{i=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^i (i+1)^j$$

được tìm thấy trong bổ đề 2.5. Ta thấy rằng $Q_k(m)$ là đa thức có bậc $(2\mathrm{k}-1)$ với hệ số cao nhất là 1 vì $Li_0\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{3}$. Do đó, ta có thể viết đa thức này về dạng sau

$$Q_k(m)=m^{2k-1}+O\left(m^{2k-2}\right).$$

Tiếp theo các tổng $\sum_{\ell=0}^{m-2}\sum_{i=0}^{\ell}Q_k(i)$ và $\sum_{\ell=1}^{-m}\sum_{i=1}^{\ell}Q_k(-i)$ cần được tính. Áp dụng kết quả có được từ Bổ đề 2.4, các tổng này có thể được viết gọn thành

$$\sum_{\ell=0}^{m-2}\sum_{i=0}^{\ell}Q_k(i)=\frac{1}{2k(2k+1)}m^{2k+1}+O\left(m^{2k}\right), với\ m\geq 2,$$

$$\sum_{\ell=1}^{-m}\sum_{i=1}^{\ell}Q_k(-i)=\frac{1}{2k(2k+1)}m^{2k+1}+O\left(m^{2k}\right), với\ m\leq -1.$$

Vậy, phương trình (8) có nghiệm

$$f_k(m)=\begin{cases}0 & \text{nếu} & m=0,\\ 1 & \text{nếu} & m=1,\\ \dfrac{1}{2k(2k+1)}m^{2k+1}+O\left(m^{2k}\right) & \text{nếu} & m\in\mathbb{Z}\backslash\{0;1\}.\end{cases}$$

Mệnh đề 3.2 đã được chứng minh. ■

Mệnh đề 3.3 *Cho k là số nguyên dương và $(X_n)_{n\geq 0}$ là bước đi ngẫu nhiên đang xét. Khi đó, ta có kết quả sau* $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{X_n}{\sqrt{n}}\right)^{2k-1}\right]=0.$

Chứng minh

Lấy kỳ vọng hai vế của đẳng thức (7) với biến $X_n, n\geq 0$ và sử dụng phương pháp đệ quy theo $n, n-1, \ldots, 1, 0$ cùng với điều kiện ban đầu $X_0=0$, ta được kết quả dưới đây

$$\mathbb{E}f_0(X_n)=0, n\geq 0.$$

Áp dụng Mệnh đề 3.1 đẳng thức trên trở thành $\mathbb{E}(X_n)=0, n\geq 0$. Do đó, $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{E}(X_n)=0$. Đến đây chúng tôi giả sử $\mathbb{E}\left(X_n^{2k-1}\right)=0, k\geq 1$. Từ phương trình (8), bằng việc lấy kỳ vọng vế theo vế, ta được $\mathbb{E}f_k(X_{n+1})=\mathbb{E}f_k(X_n)+\mathbb{E}\left(X_n^{2k-1}\right)$ hay $\mathbb{E}f_k(X_{n+1})=\mathbb{E}f_k(X_n), n\geq 0$. Suy ra $\mathbb{E}f_k(X_n)=0, n\geq 0$.

Theo Mệnh đề 3.2, ta được $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{f_k(X_n)}{(\sqrt{n})^{2k+1}}=\frac{1}{2k(2k+1)}\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{X_n}{\sqrt{n}}\right)^{2k+1}$.

Lấy kỳ vọng hai vế đẳng thức này và áp dụng $\mathbb{E}f_k(X_n)=0, n\geq 0$, ta được $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{X_n}{\sqrt{n}}\right)^{2k+1}\right]=0$. Theo nguyên lý qui nạp, ta có điều phải chứng minh. ■

Mệnh đề 3.4 *Cho $g(m)$ là hàm đa thức được xác định trên $\mathbb{Z}$. Khi đó, phương trình*

$$\mathcal{P}g_0(m)-g_0(m)=1 \tag{10}$$

với $g_0(0) = 0, g_0(1) = 1$*, có nghiệm*

$$g_0(m) = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad m = 0, \\ 1 & \text{nếu} \quad m = 1, \\ \frac{1}{2}(m^2 - m + 2) & \text{nếu} \quad m \geq 2, \\ \frac{1}{2}(m^2 + m) & \text{nếu} \quad m \leq -1. \end{cases}$$

Chứng minh

Việc chứng minh mệnh đề này cũng tương tự như Mệnh đề 3.1. Tuy nhiên ở đây, đa thức $Q_0(m) = 1, \forall m \in \mathbb{Z}$. Do đó, phương trình (10) có nghiệm

$$g_0(m) = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad m = 0, \\ 1 & \text{nếu} \quad m = 1, \\ \frac{1}{2}(m^2 - m + 2) & \text{nếu} \quad m \geq 2, \\ \frac{1}{2}(m^2 + m) & \text{nếu} \quad m \leq -1. \blacksquare \end{cases}$$

Mệnh đề 3.5 *Cho k là số nguyên dương và $g_k(m)$ là hàm đa thức được xác định trên $\mathbb{Z}$. Khi đó, phương trình $\mathcal{P}g_k(m) - g_k(m) = m^{2k}$* (11)

với $g_k(0) = 0, g_k(1) = 1$*, có nghiệm*

$$g_k(m) = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad m = 0, \\ 1 & \text{nếu} \quad m = 1, \\ \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} m^{2k+2} + O\left(m^{2k+1}\right) & \text{nếu} \quad m \in \mathbb{Z}\backslash\{0; 1\}. \end{cases}$$

Chứng minh

Ý tưởng cho việc chứng minh mệnh đề này tương tự như Mệnh đề 3.2. Chúng ta bắt đầu bằng việc khai triển phương trình (11) về dạng tương đương sau

$$g_k(m+2) - 3g_k(m) + 2g_k(m-1) = 3m^{2k}. \tag{12}$$

Tiếp theo, bằng việc áp dụng kết quả có được trong Bổ đề 2.2 và Bổ đề 2.3, phương trình (12) có nghiệm

$$g_k(m) = \begin{cases} m + \sum_{\ell=0}^{m-2} \sum_{i=0}^{\ell} Q_k(i) & \text{nếu} \quad m \geq 2, \\ 0 & \text{nếu} \quad m = 0, \\ 1 & \text{nếu} \quad m = 1, \\ m + \sum_{\ell=1}^{-m} \sum_{i=1}^{\ell} Q_k(-i) & \text{nếu} \quad m \leq -1, \end{cases}$$

trong đó $Q_k(m) = \frac{3}{2}\sum_{i=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^i (m+1+i)^{2k} = m^{2k} + O\left(m^{2k-1}\right), k \geq 1$.

Áp dụng Bổ đề 2.4, phương trình (11) có nghiệm

$$g_k(m) = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad m = 0, \\ 1 & \text{nếu} \quad m = 1, \\ \dfrac{1}{(2k+1)(2k+2)} m^{2k+2} + O\left(m^{2k+1}\right) & \text{nếu} \quad m \in \mathbb{Z}\backslash\{0; 1\}. \blacksquare \end{cases}$$

Mệnh đề 3.6 *Cho k là số nguyên dương và $(X_n)_{n\geq 0}$ là bước đi ngẫu nhiên đang xét. Khi đó, ta có kết quả sau*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left[\left(\frac{X_n}{\sqrt{n}}\right)^{2k}\right] = \frac{(2k)!\left(\sqrt{2}\right)^{2k}}{k!\,2^k}.$$

Chứng minh

Vì đây là một trong hai mệnh đề quan trọng và trực tiếp dẫn đến kết quả trong Định lý 1.1 nên chúng tôi sẽ trình bày chi tiết hơn các mệnh đề còn lại với mục tiêu giúp bạn đọc dễ theo dõi.

Lấy kỳ vọng vế theo vế của phương trình (10) với phần biến $X_n, n \geq 0$ và chuyển vế một biểu thức trong đó, ta được $\mathbb{E}g_0(X_{n+1}) = \mathbb{E}g_0(X_n) + 1$.

Đệ quy phương trình này theo $n, n-1, \dots, 1, 0$, suy ra được $\mathbb{E}g_0(X_n) = \mathbb{E}g_0(X_0) + n$. Theo điều kiện ban đầu $X_0 = 0$ và $g_0(0) = 0$, đẳng thức dưới đây được xác định

$$\mathbb{E}g_0(X_n) = n.$$

Kết hợp Mệnh đề 3.4, ta suy ra được $\mathbb{E}(X_n^2) = 2n + O(n^0)$.

Giả sử $\mathbb{E}\left(X_n^{2k}\right) = \frac{(2k)!}{k!} n^k + O(n^{k-1}), k \geq 1.$ (13)

Lấy kỳ vọng hai vế của phương trình (11) với phần biến $X_n, n \geq 0$, ta được đẳng thức dưới đây

$$\mathbb{E}g_k(X_{n+1}) - \mathbb{E}g_k(X_n) = \mathbb{E}\left(X_n^{2k}\right).$$

Tiếp tục đệ quy phương trình này theo $n, n-1, \dots, 1, 0$, suy ra được $\mathbb{E}g_k(X_n) - \mathbb{E}g_k(X_0) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\left(X_i^{2k}\right)$. Theo điều kiện ban đầu $X_0 = 0$ và $g_k(0) = 0$, đẳng thức dưới đây được xác định

$$\mathbb{E}g_k(X_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\left(X_i^{2k}\right).$$

Áp dụng giả thiết (13) và thu gọn, ta được

$$\mathbb{E}g_k(X_n) = \frac{(2k)!}{(k+1)!} n^{k+1} + O(n^k).$$

Áp dụng kết quả của Mệnh đề 3.5 suy ra được đẳng thức dưới đây

$$\mathbb{E}\left(X_n^{2k+2}\right) = \frac{[2(k+1)]!}{(k+1)!} n^{k+1} + O(n^k).$$

Theo nguyên lý quy nạp, ta được

$$\mathbb{E}\left(X_n^{2k}\right) = \frac{(2k)!}{k!} n^k + O(n^{k-1}), k \geq 1, n \geq 0.$$

Do đó,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left[\left(\frac{X_n}{\sqrt{n}}\right)^{2k}\right] = \frac{(2k)!}{k!} = \frac{(2k)!\left(\sqrt{2}\right)^{2k}}{k!\,2^k}. \blacksquare$$

Các kết quả có được từ các Mệnh đề 3.3 và 3.6 đã thỏa mãn đầy đủ điều kiện của Bổ đề 2.1. Từ đó, ta có thể kết luận $(X_n)_{n\geq 0}$ hội tụ theo phân phối về $Z\sim\mathcal{N}(0,2)$ khi $n \to \infty$. Vậy, Định đý 1.1 đã được chứng minh hoàn toàn. ■

4. Kết luận

Như vậy, vấn đề đã đặt ra ở phần một đã được giải đáp triệt để. Cụ thể, chúng tôi đã tìm ra luật phân phối giới hạn chính là phân phối chuẩn $\mathcal{N}$ $(0,2)$ và đã chứng minh được sự hội tụ này thông qua toán tử Markov trong phương trình Poisson. Các nhà giao dịch hoàn toàn có thể dựa vào kết quả này để kiểm tra xem chiến lược giao dịch mà họ đã đặt ra có hiệu quả hay không? Ví dụ như nếu chiến lược giao dịch thỏa mãn mô hình này thì lợi nhuận trung bình xấp xỉ bằng 0. Từ đó, họ có thể loại bỏ chiến lược ngay từ đầu mà không cần giao dịch và tìm kiếm chiến lược khác. Một câu hỏi có thể đặt ra tiếp theo là: Nếu xác suất chuyển trong mô hình trên khác với bộ số $\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$ thì bước đi ngẫu nhiên đó sẽ tuân theo luật phân phối nào khác và lợi nhuận trung bình có thể lớn hơn 0? Chúng tôi hy vọng sẽ sớm tìm ra lời giải đáp cho câu hỏi trên trong thời gian sớm nhất.

Tài liệu tham khảo

Alili, S. (1999). Asymptotic behaviour for random walks in random environments. *Journal of Applied Probability*, *36*, 334–349.

Billingsley, P. (1995). *Probability and Measure, Third Edition*. John Wiley, New York.

Brown, B. M. (1971). Martingale central limit theorems. *Ann. Math. Statist.*, *42*, 59 - 66. https://doi.org/10.1214/aoms/1177693494

Depauw, J., & Derrien, J. M. (2009). Variance limite d'une marche aléatoire réversible en milieu aléatoire sur Z. *Comptes Rendus Mathematique*, *347*(7-8), 401–406.

https://doi.org/10.1016/j.crma.2009.01.030

Graham, R. L., Knuth, D. E., & Patashnik O. (1994). *Concrete mathematics: a foundation for computer science, Second Edition*. Addison-Wesley Professional.

Kozlov, S. M. (1985). The averaging method and walks in inhomogeneous environments, *Uspekhi Mat. Nauk 40*, 61–120.

Lam, H. C. (2014). A quenched central limit theorem for reversible random walk in random environment on Z. *Journal of Applied Probability*, *51*, 1051-1064.

Lâm, H. C., & Dương, T. B. B. (2017). Tốc độ hội tụ trong định lý giới hạn trung tâm cho bước đi ngẫu nhiên trong một chiều. *Tạp chí Khoa học Đại học Cần Thơ, 49,* 73-78. https://doi.org/10.22144/ctu.jvn.2017.010

Lâm, H. C., Trần, P. L., La, M. K., & Dương, T. T. (2021). Định lý giới hạn trung tâm trong mô hình trò chơi công bằng. *Tạp chí Khoa học Đại học Cần Thơ*, *57*(2), 39-43. https://doi.org/10.22144/ctu.jvn.2021.036

Mathieu, P. (2008). Quenched invariance principles for random walks with random conductances. *Journal of Statistical Physics*, *130*, 1025–1046. https://doi.org/10.1007/s10955-007-9465-z

Trotter, H. F. (1959). An elementary proof of the central limit theorem. *Arch. Math (Basel), 10*(1), 226-234. https://doi.org/10.1007/BF01240790