



DOI: <https://doi.org/10.52714/dthu.15.2.2026.1749>

MÔ HÌNH ISING SPIN-1 VỚI TƯƠNG TÁC TRAO ĐỔI TỨ CỰC TRONG TỪ TRƯỜNG NGOÀI: NGHIÊN CỨU LÝ THUYẾT TRONG GẦN ĐÚNG TRƯỜNG TRUNG BÌNH

Ngô Thị Thuận¹ và Phạm Hương Thảo^{2*}

¹Khoa Cơ bản, Trường Đại học Y Dược, Đại học Huế, Thành phố Huế, Việt Nam

²Khoa Vật lý, Trường Đại học Sư phạm, Đại học Huế, Thành phố Huế, Việt Nam

*Tác giả liên hệ, Email: phamhuongthao@dhsphue.edu.vn

Lịch sử bài báo

Ngày nhận: 01/5/2025; Ngày nhận chỉnh sửa: 07/6/2025; Ngày duyệt đăng: 11/6/2025

Tóm tắt

Mô hình Ising spin-1 với các tương tác trao đổi song tuyến tính và tứ cực trong từ trường ngoài được nghiên cứu trên mạng hình vuông hai chiều đơn giản trong gần đúng trường trung bình. Kết quả thu được cho thấy sự tồn tại của trật tự lưỡng cực hoặc trật tự tứ cực, tùy thuộc vào sự thay đổi cường độ của hai loại tương tác khi không có từ trường ngoài. Ngoài ra, ảnh hưởng của từ trường đến các trật tự này cũng được khảo sát chi tiết. Các kết quả này được phân tích thông qua sự hiện diện của các trạng thái có mômen từ khác không (tức $S^z = \pm 1$) và trạng thái không có mômen từ (tức $S^z = 0$) của hệ spin-1.

Từ khóa: Gần đúng trường trung bình, mô hình Ising spin-1, tương tác trao đổi song tuyến tính, tương tác trao đổi tứ cực.

Trích dẫn: Ngô, T. T., & Phạm, H. T. (2026). Mô hình Ising spin-1 với tương tác trao đổi tứ cực trong từ trường ngoài: nghiên cứu lý thuyết trong gần đúng trường trung bình. *Tạp chí Khoa học Đại học Đồng Tháp*, 15(2), 30-38. <https://doi.org/10.52714/dthu.15.2.2026.1749>

Copyright © 2026 The author(s). This work is licensed under a CC BY-NC 4.0 License.

SPIN-1 ISING MODEL WITH BIQUADRATIC EXCHANGE INTERACTION IN AN EXTERNAL MAGNETIC FIELD: A THEORETICAL STUDY WITHIN THE MEAN-FIELD APPROXIMATION

Ngô Thi Thuan¹ and Phạm Hương Thảo^{2*}

¹*Faculty of Basic Sciences, University of Medicine and Pharmacy,
Hue University, Hue city, Vietnam*

²*Faculty of Physics, University of Education, Hue University, Hue city, Vietnam*

**Corresponding author, Email: phamhuongthao@dhsphue.edu.vn*

Article history

Received: 01/5/2025; Received in revised form: 07/6/2025; Accepted: 11/6/2025

Abstract

The spin-1 Ising model with bilinear and biquadratic exchange interactions in an external magnetic field is studied on a simple two-dimensional square lattice within the mean-field approximation. The obtained results show that either dipolar or quadrupolar order exists, depending on strength variations of two interaction types without a magnetic field. In addition, the influence of the external magnetic field on these orders is also investigated in detail. These results are analyzed through the presence of spin-1 states with nonzero magnetic moment (i.e., $S^z = \pm 1$) and zero magnetic moment (i.e., $S^z = 0$).

Keywords: *Bilinear exchange interaction, biquadratic exchange interaction, mean-field approximation, Spin-1 Ising model.*

1. Giới thiệu

Các mô hình tương tác trao đổi Ising, XY và Heisenberg là những mô hình mẫu quan trọng trong nghiên cứu các tính chất từ của các hệ vật chất (Diep, 2014). Trong đó, tương tác trao đổi song tuyến tính đóng vai trò quyết định trật tự từ của các hệ này. Trong phần lớn các nghiên cứu về tính chất từ của chất rắn đều đưa ra giả định cho rằng các tương tác trao đổi bậc cao là nhỏ hơn rất nhiều so với tương tác trao đổi song tuyến tính (Diep, 2014; Mila & Zhang, 2000). Tuy nhiên, một số báo cáo thực nghiệm và lý thuyết gần đây đã chỉ ra rằng các tương tác trao đổi bậc cao có thể đóng vai trò quan trọng trong việc mô tả tính chất từ của một số hợp chất thực tế, đặc biệt là các hợp chất đất hiếm (Sablík & Wang, 1979; Barker & Chantrell, 2015; Subedi & cs., 2025). Trong các hệ này, tương tác trao đổi bậc cao có thể tương đương hoặc thậm chí lớn hơn tương tác trao đổi song tuyến tính. Mặc dù giả định về các tương tác trao đổi bậc cao trong các hệ từ tính đã được đề xuất từ những năm 1960-1970 (Rodbell & cs., 1963; Blume & Emery, 1971), nhưng sự hiểu biết về các loại tương tác này vẫn chưa được làm rõ. Vì lý do này, nhiều nghiên cứu đã nỗ lực phát triển các mô hình lý thuyết bao gồm các số hạng tương tác trao đổi bậc cao.

Mô hình Ising với spin $S=1$ (gọi tắt là spin-1), trong đó các số hạng tương tác trao đổi bậc cao xuất hiện trong Hamiltonian, là một trong những mô hình được nghiên cứu rộng rãi nhất trong lĩnh vực này. Sự phổ biến của mô hình này không chỉ bởi sự phong phú của giản đồ pha do sự cạnh tranh giữa các tương tác (Zivieri, 2022), mà còn bởi khả năng áp dụng của mô hình để mô tả các hệ chất lỏng đơn giản (Blume & Emery, 1971; Mancini, 2010) hay các trật tự lưỡng cực từ và tứ cực trong các vật liệu từ (Kantar & Erta, 2015; Manojlović & cs., 2016). Mặc dù đã có nhiều nghiên cứu khảo sát vấn đề này (Levitskii & cs., 2006; Kantar & Erta, 2015; Manojlović & cs., 2016; Zivieri, 2022), phần lớn các công trình trước đây chủ yếu tập trung vào các hiện tượng chuyển pha mà chưa đi sâu phân tích chi tiết sự tồn tại và đặc trưng của các loại trật tự khác nhau. Bên cạnh đó, vai trò của từ trường ngoài trong việc ổn định hoặc thúc đẩy sự hình thành trật tự lưỡng cực và tứ cực chưa được khảo sát một cách hệ thống trong các nghiên cứu gần đây. Nhằm hiểu rõ hơn về sự tồn tại và cùng tồn tại của các trật tự lưỡng cực và tứ cực thông qua sự phụ thuộc chi tiết vào các tham số tương tác cũng như cường độ từ trường, chúng tôi đã nghiên cứu hệ spin-1 trên mạng hình vuông hai chiều đơn giản, với các mức độ khác nhau của tương tác trao đổi song tuyến tính và tương tác trao đổi bậc cao - cụ thể là tương tác trao đổi tứ cực - trong gần đúng trường trung bình. Từ đó, chúng tôi xác định các trật tự lưỡng cực và trật tự tứ cực trong hệ. Một số công trình gần đây cũng đã khám phá ra các hiện tượng vật lý khác nhau trong các hệ từ tính hai chiều, nơi các tương tác trao đổi tứ cực đóng vai trò quan trọng (Luo & cs., 2016; Kartsev & cs., 2020; Ni & cs., 2021).

2. Mô hình lý thuyết

Xét một hệ spin gồm N spin-1 được sắp xếp trên một mạng hình vuông hai chiều đơn giản. Mô hình Ising cho hệ spin này được đặt trong một từ trường ngoài $\vec{h} = h^z \vec{e}_z$ có dạng như sau (Sivardière & Blume, 1972):

$$H = -g\mu_B h^z \sum_j S_j^z - \frac{\alpha_1}{2} \sum_{i,j} J_{ij} S_i^z S_j^z - \frac{\alpha_2}{2} \sum_{i,j} J_{ij} Q_i^z Q_j^z, \quad (1)$$

ở đây $j = i \pm 1$ và $J_{ij} = J > 0$ là hằng số tương tác trao đổi giữa các spin lân cận gần nhất. Trong (1), số hạng thứ nhất mô tả tương tác của hệ spin với từ trường ngoài được định hướng dọc theo trục Oz với $h^z > 0$, g là thừa số Landé và μ_B là manhêton Bohr; số hạng thứ hai và số hạng thứ ba lần lượt mô tả các tương tác trao đổi song tuyến tính và tương tác trao

đôi tứ cực của hai spin S_i^z và S_j^z được định xứ tại tất cả các nút của mạng tinh thể với các vectơ vị trí \vec{r}_i và \vec{r}_j , $i, j=1, \dots, N$; α_1 và α_2 lần lượt là các tham số biểu thị mức độ của tương tác trao đổi song tuyến tính và tương tác trao đổi tứ cực. Đối với hệ spin- S ($S \geq 1$), ta có toán tử tứ cực được định nghĩa như sau (Sivardière & Blume, 1972):

$$Q_j^z = \left[(S_j^z)^2 - S(S+1)/3 \right]. \quad (2)$$

Trong mô hình (1) với spin-1, mỗi spin có thể nhận ba giá trị $S^z = -1, 0, +1$ và do đó có khả năng biểu hiện cả hai trật tự lưỡng cực và trật tự tứ cực. Chúng tôi chỉ xét các trường hợp ứng với $\alpha_1 \geq 0$ và $\alpha_2 \geq 0$. Tương tác trao đổi song tuyến tính được biểu diễn qua $\alpha_1 J_{ij} S_i^z S_j^z$ và đóng vai trò chính trong việc hình thành trật tự lưỡng cực, cụ thể là trật tự sắt từ, khi các spin có xu hướng chọn cùng một định hướng cụ thể trên trục z . Trong khi đó, tương tác trao đổi tứ cực được biểu diễn qua $\alpha_2 J_{ij} Q_i^z Q_j^z$, liên quan trực tiếp đến bình phương của các toán tử spin S_i^z , và do đó chỉ phân biệt giữa trạng thái có mômen từ khác không $|+1\rangle$ hoặc $|-1\rangle$ (ứng với $S^z = \pm 1$) và trạng thái không có mômen từ $|0\rangle$ (ứng với $S^z = 0$). Từ đó dẫn đến sự hình thành trật tự tứ cực. Khi cả hai loại tương tác cùng tồn tại, hệ vừa ưu tiên loại bỏ trạng thái $|0\rangle$, vừa phá vỡ đối xứng giữa hai trạng thái $|+1\rangle$ và $|-1\rangle$, do đó có thể xuất hiện một pha hỗn hợp đồng thời mang cả trật tự lưỡng cực và tứ cực. Việc phân tích định hướng ưu tiên của các spin trong từng trường hợp cho phép hiểu rõ hơn về cơ chế hình thành các pha trong hệ và là cơ sở để xây dựng giản đồ pha của mô hình.

Hamiltonian (1) được viết lại dưới dạng khai triển Fourier của các toán tử spin và toán tử tứ cực trong gần đúng trường trung bình, như sau:

$$H = \frac{N}{2} \alpha_1 J_{\vec{k}=0} \langle S^z \rangle \langle S^z \rangle + \frac{N}{2} \alpha_2 J_{\vec{k}=0} \langle Q^z \rangle \langle Q^z \rangle - \sum_j \frac{y_1}{\beta} S_j^z - \sum_j \frac{y_2}{\beta} Q_j^z, \quad (3)$$

ở đây $J_{\vec{k}} = \sum_a J(\vec{a}) e^{-i\vec{k}\vec{a}}$, với \vec{a} là là véc-tơ có gốc tại spin thứ i , nối đến các spin lân cận gần nhất; $\langle \dots \rangle = \text{Tr}(e^{-\beta H} \dots) / \text{Tr}(e^{-\beta H})$ là trung bình nhiệt động của các toán tử với ký hiệu $\text{Tr}(\dots)$ chỉ vết của ma trận; $\beta = 1/k_B T$, với k_B là hằng số Boltzmann và T là nhiệt độ; và

$$\begin{aligned} y_1 &= \beta \left(h^z + \alpha_1 J_{\vec{k}=0} \langle S^z \rangle \right), \\ y_2 &= \alpha_2 \beta J_{\vec{k}=0} \langle Q^z \rangle. \end{aligned} \quad (4)$$

Biểu thức năng lượng tự do của hệ trong gần đúng trường trung bình được tính theo công thức:

$$\begin{aligned} F &= -\frac{1}{\beta} \ln \left(\text{Tr} \left(e^{-\beta H} \right) \right) \\ &= \frac{N}{2} \alpha_1 J_{\vec{k}=0} (m_z)^2 + \frac{N}{2} \alpha_2 J_{\vec{k}=0} (q_z)^2 + \frac{N}{\beta} \frac{2y_2}{3} - \frac{N}{\beta} \ln \left\{ 2 \exp[y_2] \cosh[y_1] + 1 \right\}, \end{aligned} \quad (5)$$

ở đây $m_z = \langle S^z \rangle$ và $q_z = \langle Q^z \rangle$ lần lượt được gọi là mômen lưỡng cực trung bình - hay còn được gọi là mômen từ trung bình (không thứ nguyên) và mômen tứ cực trung bình (không thứ nguyên) được tính toán từ điều kiện cực tiểu của năng lượng tự do: $\frac{\partial F}{\partial m_z} = 0$ và $\frac{\partial F}{\partial q_z} = 0$.

Từ đó, chúng tôi thu được hệ hai phương trình tự hợp cho m_z và q_z :

$$m_z = \frac{2 \exp[y_2] \{ \sinh[y_1] \}}{\{ 2 \exp[y_2] \cosh[y_1] + 1 \}}, \quad (6)$$

$$q_z = -\frac{2}{3} + \frac{2 \exp[y_2] \cosh[y_1]}{\{ 2 \exp[y_2] \cosh[y_1] + 1 \}}. \quad (7)$$

3. Các tính toán số và thảo luận

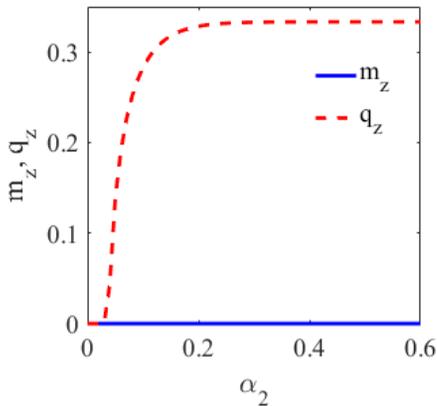
Trong phần này, chúng tôi sử dụng hằng số tương tác trao đổi J làm đơn vị, do đó các đại lượng sẽ được biểu diễn qua các đại lượng rút gọn không thứ nguyên: từ trường rút gọn là $h_r^z = g_z \mu_B h^z / J$ và nhiệt độ rút gọn là $\tau_r = k_B T / J$. Cần lưu ý là khi ở nhiệt độ cao, hệ luôn ở pha thuận từ và không có cả trật tự lưỡng cực và trật tự tứ cực. Do đó, trong phần này chúng tôi chỉ xét đến các trường hợp ứng với nhiệt độ thấp hơn nhiệt độ chuyển từ pha sắt từ hoặc từ pha tứ cực tới pha thuận từ.

3.1. Khi không có từ trường ngoài

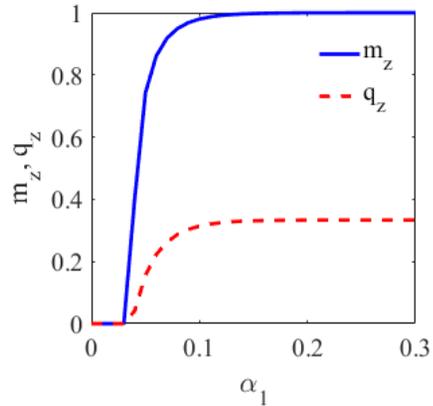
(i) Trường hợp 1: $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$

Trong trường hợp không tồn tại cả hai tương tác trao đổi song tuyến tính và tương tác trao đổi tứ cực, hệ spin thuộc pha thuận từ.

(ii) Trường hợp 2: $\alpha_1 = 0, \alpha_2 \neq 0$



Hình 1. Sự phụ thuộc của mômen lưỡng cực m_z và mômen tứ cực q_z vào tham số tương tác trao đổi tứ cực α_2 , ở đây $\tau_r = 0,1, \alpha_1 = 0$ và $h_r^z = 0$.



Hình 2. Sự phụ thuộc của mômen lưỡng cực m_z và mômen tứ cực q_z vào tham số tương tác trao đổi song tuyến tính α_1 , ở đây $\tau_r = 0,1, \alpha_2 = 0$ và $h_r^z = 0$.

Khi hệ chỉ có tương tác trao đổi tứ cực được đặc trưng bởi tham số α_2 , sự tồn tại của các trật tự trong hệ phụ thuộc mạnh vào độ lớn của α_2 . Dựa vào hình 1, chúng tôi rút ra các nhận xét sau:

+ Khi α_2 nhỏ so với nhiệt độ τ_r , năng lượng do tương tác trao đổi tứ cực không đủ lớn để phá vỡ tính đối xứng giữa các trạng thái spin. Ba trạng thái spin $|+1\rangle$, $|0\rangle$, $|-1\rangle$ vẫn tồn tại với xác suất như nhau do các spin chuyển động nhiệt một cách hỗn loạn. Trong điều kiện này, hệ thuộc pha thuận từ, với cả $m_z = 0$ và $q_z = 0$;

+ Khi α_2 tăng lên, hệ có xu hướng loại bỏ trạng thái $S^z = 0$ để cực tiểu hóa năng lượng tương tác. Khi đó, trong hệ xuất hiện một trật tự tứ cực tự phát, trong đó các spin chủ yếu chiếm các trạng thái $|+1\rangle$ và $|-1\rangle$, nhưng vẫn không có mômen lưỡng cực vì xác suất của hai trạng thái này là cân bằng, nên $m_z = 0$. Tuy nhiên, vì trong cả hai trạng thái này $(S^z)^2 = 1$, nên giá trị q_z tăng lên rõ rệt. Khi α_2 đủ lớn, hệ hoàn toàn bị giới hạn trong hai trạng thái $|+1\rangle$ và $|-1\rangle$, $q_z = S^2 - 2/3 = 1/3$, là giá trị bão hòa của mômen tứ cực trong hệ spin-1.

(iii) Trường hợp 3: $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 = 0$

Khi hệ chỉ có tương tác trao đổi song tuyến tính được đặc trưng bởi tham số α_1 , sự tồn tại của các trật tự trong hệ phụ thuộc mạnh vào độ lớn của α_1 . Dựa vào hình 2, chúng tôi rút ra các nhận xét sau:

+ Khi α_1 nhỏ so với nhiệt độ τ_r , năng lượng do tương tác trao đổi lưỡng cực không đủ lớn để làm cho các spin sắp xếp song song theo cùng một hướng. Dưới tác dụng của nhiệt năng, các spin dao động nhiệt một cách hỗn loạn. Trong điều kiện này, hệ thuộc pha thuận từ, với cả $m_z = 0$ và $q_z = 0$;

+ Khi α_1 tăng, hệ spin có xu hướng hình thành trật tự lưỡng cực tự phát. Tương tác này làm cho các spin có xu hướng sắp xếp song song theo cùng một hướng trên trục z để cực tiểu hóa năng lượng tương tác, dẫn đến mômen lưỡng cực m_z khác không. Do đó, hệ thuộc pha sắt từ;

+ Mặc dù không có tương tác trao đổi tứ cực, nhưng trong pha sắt từ, phần lớn các spin chiếm cùng một trạng thái $|+1\rangle$ hoặc $|-1\rangle$ do tương tác trao đổi song tuyến tính, vì vậy mômen tứ cực q_z cũng trở nên khác không. Tuy nhiên, giá trị q_z trong trường hợp này không phản ánh một trật tự tứ cực tự phát, mà chỉ đơn thuần là kết quả phát sinh từ trật tự lưỡng cực. Kết quả này thường xuất hiện khi các mômen đa cực bậc cao được đưa vào nghiên cứu (Morin & Schmitt, 1983).

+ Khi α_1 đủ lớn, mức độ định hướng của các spin càng mạnh, dẫn đến cả m_z và q_z tăng, và cuối cùng đạt giá trị bão hòa $m_z = S = 1$ và $q_z = 1/3$, ứng với trạng thái mà toàn bộ các spin đều hướng cùng chiều dọc theo trục z .

(iv) Trường hợp 4: $\alpha_1 > 0$ và $\alpha_2 > 0$

Khi cả hai tương tác trao đổi cùng xuất hiện, hệ spin-1 trong mô hình Ising cho thấy khả năng hình thành pha hỗn hợp, trong đó cả trật tự lưỡng cực và trật tự tứ cực cùng tồn tại đồng

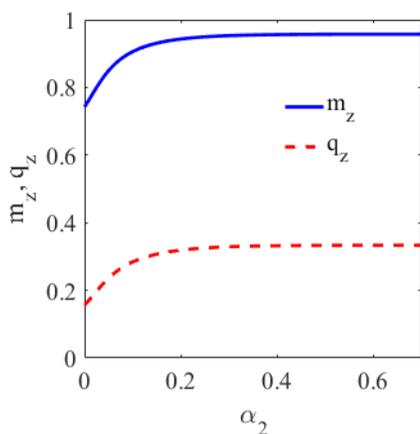
thời. Tương tác trao đổi song tuyến tính $\alpha_1 > 0$ thúc đẩy sự định hướng của spin theo cùng một chiều trên trục z , dẫn đến sự xuất hiện của trật tự sắt từ. Trong khi đó, tương tác trao đổi tứ cực $\alpha_2 > 0$ làm tăng xác suất các spin chiếm các trạng thái $|+1\rangle$ và $|-1\rangle$, làm giảm xác suất ở trạng thái $|0\rangle$, từ đó củng cố thêm cho mômen tứ cực trong hệ. Tùy theo tỷ lệ tương đối giữa α_1 và α_2 , các đặc tính của pha sẽ thay đổi. Từ hình 3, chúng tôi rút ra các nhận xét sau:

+ Khi $\alpha_1 \gg \alpha_2$: trật tự sắt từ chiếm ưu thế, trật tự tứ cực chủ yếu là kết quả phát sinh từ trật tự lưỡng cực, tương tự như trong trường hợp 3;

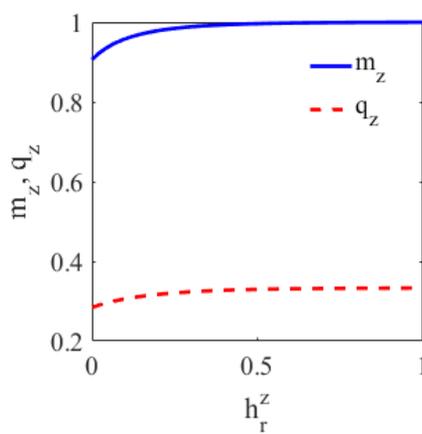
+ Khi $\alpha_2 \gg \alpha_1$: hệ ưu tiên chiếm các trạng thái $|+1\rangle$ và $|-1\rangle$ nhưng vẫn có thể không chọn một chiều cụ thể, dẫn đến trật tự tứ cực thuần với $q_z \neq 0$ và $m_z \approx 0$, tương tự như trong trường hợp 2;

+ Trường hợp tổng quát, $\alpha_1 > 0$ và $\alpha_2 > 0$: cả hai trật tự sắt từ và tứ cực có thể xuất hiện trong hệ, $q_z \neq 0$ và $m_z \neq 0$. Cấu trúc pha của hệ được quyết định phụ thuộc vào tỉ lệ của α_1 và α_2 . Nghiên cứu của Luo và cộng sự (Luo & cs., 2016) cũng đã chỉ ra sự tồn tại của các pha, bao gồm trật tự lưỡng cực, trật tự tứ cực hoặc trật tự hỗn hợp lưỡng cực-tứ cực trong các siêu dẫn chứa sắt giả hai chiều.

Trong tất cả các trường hợp trên, khi tăng α_2 , mômen tứ cực q_z luôn có xu hướng tăng và đạt đến giá trị bão hoà bằng $1/3$, do các spin càng bị đẩy ra khỏi trạng thái $|0\rangle$. Nếu α_1 cũng không quá nhỏ, mômen lưỡng cực m_z cũng tăng theo và đạt đến giá trị bão hoà. Nếu giá trị bão hoà của m_z bằng 1, lúc này tất cả các spin chiếm trạng thái $|+1\rangle$ hoặc $|-1\rangle$, hệ thuộc pha sắt từ. Nếu giá trị bão hoà của m_z nhỏ hơn 1, lúc này đa số các spin chiếm trạng thái $|+1\rangle$ (hoặc $|-1\rangle$), và các spin còn lại chiếm trạng thái $|-1\rangle$ (hoặc $|+1\rangle$), hệ thuộc pha hỗn hợp bao gồm cả hai trật tự sắt từ và trật tự tứ cực.



Hình 3. Sự phụ thuộc của mômen lưỡng cực m_z và mômen tứ cực q_z vào tham số tương tác trao đổi tứ cực α_2 , ở đây $\tau_r = 0,2$, $\alpha_1 = 0,1$ và $h_r^z = 0$.



Hình 4. Sự phụ thuộc của mômen lưỡng cực m_z và mômen tứ cực q_z vào từ trường h_r^z , ở đây $\tau_r = 0,2$, $\alpha_1 = 0,1$ và $\alpha_2 = 0,1$.

3.2. Khi có từ trường ngoài

Chúng tôi xét trường hợp tổng quát, $\alpha_1 > 0$ và $\alpha_2 > 0$. Dưới tác dụng của từ trường ngoài $h_r^z > 0$, hệ spin-1 không chỉ chịu ảnh hưởng của các tương tác trao đổi lưỡng cực và tứ cực, mà còn có xu hướng sắp xếp các spin theo chiều của từ trường, do đó làm cho trật tự lưỡng cực trở nên rõ rệt hơn. Mômen lưỡng cực m_z sẽ tăng dần theo h_r^z và tiến tới đạt đến giá trị bão hòa $m_z = 1$ khi tất cả các spin bị định hướng hoàn toàn theo từ trường ngoài. Mômen tứ cực q_z cũng tăng theo h_r^z và đạt đến giá trị bão hòa $q_z = 1/3$, vì xác suất các spin chiếm trạng thái $|+1\rangle$ ngày càng lớn hơn các trạng thái $|-1\rangle$ và $|0\rangle$. Tuy nhiên, trong trường hợp này, sự tăng của q_z không phải là do trật tự tứ cực tự phát, mà chỉ là kết quả của việc spin bị ép vào trạng thái phân cực mạnh do từ trường. Vì vậy, trong vùng từ trường đủ mạnh, cả $m_z \neq 0$ và $q_z \neq 0$, nhưng hệ không còn thể hiện pha tứ cực tự phát. Các kết quả này được thể hiện trong hình 4.

4. Kết luận

Trong khuôn khổ gần đúng trường trung bình, chúng tôi đã nghiên cứu mô hình Ising spin-1 với cả hai loại tương tác trao đổi song tuyến tính và tứ cực trên mạng hình vuông hai chiều, có xét đến ảnh hưởng của từ trường ngoài. Kết quả cho thấy mômen lưỡng cực và mômen tứ cực của hệ phụ thuộc mạnh vào các tham số tương tác trao đổi α_1 (song tuyến tính) và α_2 (tứ cực), cũng như vào cường độ của từ trường ngoài. Cụ thể, hệ có thể biểu hiện các pha trật tự lưỡng cực, trật tự tứ cực hoặc pha hỗn hợp (cùng tồn tại cả hai trật tự), tùy thuộc vào tỷ lệ α_1 và α_2 . Khi chỉ có tương tác tứ cực, hệ có thể xuất hiện trật tự tứ cực tự phát mà không có trật tự lưỡng cực. Ngược lại, khi chỉ có tương tác song tuyến tính, sự xuất hiện của trật tự lưỡng cực tự phát thường kéo theo một mômen tứ cực khác không, đây là kết quả phát sinh từ sự định hướng mạnh của các spin theo cùng một hướng. Sự hiện diện của từ trường ngoài làm tăng độ ổn định của trật tự lưỡng cực và đồng thời làm tăng mômen tứ cực. Tuy nhiên, trong vùng từ trường đủ lớn, trật tự tứ cực không còn mang tính tự phát mà chủ yếu là kết quả của việc các spin bị ép định hướng theo từ trường. Nghiên cứu này đóng góp vào việc làm rõ cơ chế hình thành và cùng tồn tại của các trật tự từ trong hệ spin-1, đặc biệt là mối quan hệ giữa các trật tự đa cực dưới tác dụng của các loại tương tác khác nhau và từ trường ngoài. Kết quả thu được không chỉ cung cấp cái nhìn định tính về cấu trúc pha của hệ mà còn đặt nền tảng cho các nghiên cứu mở rộng sau này, bao gồm việc so sánh với các kết quả sử dụng mô phỏng Monte Carlo hoặc các phương pháp giải tích gần đúng khác, cũng như việc áp dụng cho các mô hình spin phức tạp hơn như Heisenberg hoặc Blume-Emery-Griffiths. Điều này mở ra hướng nghiên cứu sâu hơn về vai trò của các bậc tự do tứ cực trong các vật liệu từ lượng tử với tương tác cạnh tranh.

Tài liệu tham khảo

- Barker, J., & Chantrell, R. W. (2015). Higher-order exchange interactions leading to metamagnetism in FeRh. *Physical Review B*, 92(9), 094402(1-5). <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.92.094402>
- Blume, M., & Emery, J. V. (1971). Ising model for the λ transition and phase separation in He³-He⁴ mixtures. *Physical Review A*, 4(3), 1071-1077. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.4.1071>
- Diep, H. T. (2014). *Theory of Magnetism: Application to Surface Physics*. World Scientific Publishing. <https://doi.org/10.1142/8994>

- Kantar, E., & Erta, M. (2015). Thermodynamic quantities and phase diagrams of spin-1 Blume Capel bilayer Ising model. *International Journal of Modern Physics B*, 29(20), 1550141(1-12). <https://doi.org/10.1142/S0217979215501416>
- Kartsev, A., Augustin, M., Evans, R. F. L., Novoselov, K. S., & Santos, E. J. G. (2020). Biquadratic exchange interactions in two-dimensional magnets. *npj Computational Materials*, 6, 150(1-11). <https://doi.org/10.1038/s41524-020-00416-1>
- Luo, C., Datta, T. & Yao, D. X. (2016). Spin and quadrupolar orders in the spin-1 bilinear-biquadratic model for iron-based superconductors. *Physical Review B*, 93(23), 235148(1-10). <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.93.235148>
- Levitskii, R., Baran, O., & Lisnii, B. (2006). Phase diagrams of spin-1 Ising model with bilinear and quadrupolar interactions under magnetic field. Two-particle cluster approximation. *The European Physical Journal B*, 50, 439–443. <https://doi.org/10.1140/epjb/e2006-00162-5>
- Mancini, F. P. (2010). Magnetic behavior of a spin-1 Blume-Emery-Griffiths model. *Journal of Physics: Conference Series*, 200, 022030(1-4). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/200/2/022030>
- Manojlović, M., Pantić, M., Škrinjar, M., Kapor, D., Stojanović, S., & Pavkov, M. (2006). Thermodynamic properties of the Ising and Heisenberg S=1 ferromagnet with biquadratic exchange and uniaxial anisotropy. *Physica Status Solidi (b)*, 243(2), 530–541. <https://doi.org/10.1002/pssb.200541166>
- Mila, F., & Zhang, F.C. (2000). On the origin of biquadratic exchange in spin 1 chains. *European Physical Journal*, 16, 7–10 (2000). <https://doi.org/10.1007/s100510070242>
- Morin, P., & D. Schmitt, D. (1983). Magnetic and quadrupolar phase transitions in cubic rare-earth intermetallic compounds. *Physical Review B*, 27(7), 4412-4420. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.27.4412>
- Ni, J. Y., Li, X. Y., Amoroso, D., He, X., Feng, J. S., Kan, E. J., Picozzi, S., & Xiang, H. J. (2021). Giant biquadratic exchange in 2D magnets and its role in stabilizing ferromagnetism of NiCl₂ monolayers. *Physical Review Letter*, 127(24), 247204(1-7). <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.127.247204>
- Rodbell, D. S., Jacobs, I. S., Owen, J., & Harris, E. A. (1963). Biquadratic exchange and the behavior of some antiferromagnetic substances. *Physical Review Letters*, 11(1), 10-12. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.11.10>
- Sablik, M. J., & Wang, Y. L.. (1979). Magnetic excitations in rare-earth antiferromagnets with bilinear and biquadratic pair couplings: Application to DySb. *Physical Review B*, 19(5), 2729-2748. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.19.2729>
- Sivardière, J. & Blume, M. (1972). Dipolar and quadrupolar ordering in Ising systems. *Physical Review B*, 5(3), 1126-1134. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.5.1126>
- Subedi, M. M., Deng, K., Stimpson, E., Flebus, B., & Sklenar, J. (2025). Investigating the dependence of the biquadratic exchange interaction on extrinsic factors in permalloy–ruthenium synthetic antiferromagnets. *Journal of Applied Physics*, 137(15), 153907. <https://doi.org/10.1063/5.0252277>
- Zivieri, R. (2022). Critical behavior of the classical spin-1 Ising model for magnetic systems. *AIP Advances*, 12(3), 035326(1-5). <https://doi.org/10.1063/9.0000288>