TẠP CHÍ KHOA HỌC ĐẠI HỌC ĐỒNG THÁP
Dong Thap University Journal of Science
Chuyên san Khoa học Tự nhiên
ISSN 0866-7675 | e-ISSN 2815-567X

DOI: https://doi.org/10.52714/dthu.15.2.2026.1747

NGHIÊN CỨU MỘT SỐ ÁP DỤNG TRONG TOÁN HỌC PHỔ THÔNG CỦA HÀM LAMBERT *W*

Võ Đức Thịnh[1] và Bùi Phương Nam[2*]

[1]Khoa Sư phạm Toán - Tin, Trường Sư phạm, Trường Đại học Đồng Tháp, Việt Nam

[2]Sinh viên, Khoa Sư phạm Toán - Tin, Trường Sư phạm, Trường Đại học Đồng Tháp, Việt Nam

**Tác giả liên hệ, Email: phuongnam1602200322b@gmail.com*

Lịch sử bài báo

Ngày nhận: 20/5/2025; Ngày nhận chỉnh sửa: 09/6/2025; Ngày duyệt đăng: 11/6/2025

Tóm tắt

Trong bài viết này, chúng tôi trước tiên giới thiệu hàm Lambert W và một số tính chất của nó. Sau đó, chúng tôi sẽ thiết lập quy trình để tính toán hoặc xấp xỉ giá trị của hàm Lambert W tại một điểm. Bên cạnh đó, chúng tôi trình bày một số áp dụng của hàm Lambert W trong việc xây dựng và giải quyết một số bài toán trong toán học phổ thông như giải các phương trình mũ và tìm giới hạn dãy số. Cuối cùng, chúng tôi sẽ đưa ra các bài toán minh họa cho các nội dung trên.

Từ khóa: *Dãy số, hàm Lambert W, phương pháp Newton, phương trình mũ.*

Trích dẫn: Võ, Đ. T., & Bùi, . N. (2026). Nghiên cứu một số áp dụng trong toán học phổ thông của hàm Lambert *W*. *Tạp chí Khoa học Đại học Đồng Tháp, 15*(2), 1-16. https://doi.org/10.52714/dthu.15.2.2026.1747

STUDYING SOME APPLICATIONS OF THE LAMBERT W FUNCTION IN ELEMENTARY MATHEMATICS

Vo Duc Thinh[1] and Bui Phuong Nam[2]*

[1] Faculty of Mathematics and Informatics Education, School of Education, Dong Thap University, Cao Lanh 870000, Vietnam
[2] Student, Faculty of Mathematics and Informatics Education, School of Education, Dong Thap University, Cao Lanh 870000, Vietnam

**Corresponding author, Email: phuongnam1602200322b@gmail.com*

Article history

Received: 20/5/2025; Received in revised form: 09/6/2025; Accepted: 11/6/2025

Abstract

This paper first introduces the Lambert W function and discuss some of its fundamental properties. Next, it establishes a process for computing or approximating the value of the Lambert W function at a given point. Furthermore, it presents several applications of the Lambert W function in constructing and solving problems in elementary mathematics, including solving exponential equations and determining the limits of sequences. Finally, a collection of illustrative problems are provided to demonstrate these applications.

Keywords: *Exponential Equation, Lambert W Function, Newton's Method, sequence.*

1. Giới thiệu

Hàm Lambert W, còn được gọi là hàm Omega hoặc Logarit tích (Lehtonen, 2016), là một hàm đa trị được xác định như là các nhánh của hệ thức nghịch đảo của hàm $f(W) = We^W$, trong đó W là số phức bất kỳ và e^W là hàm mũ. Hàm này được đặt theo tên của Johann Lambert, người đã nghiên cứu một bài toán liên quan vào năm 1758. Dựa trên công trình của Lambert (Lambert, 1758), Leonhard Euler đã tiếp tục nghiên cứu và công bố một bài báo (Euler, 1783), trong đó ông phân tích một trường hợp đặc biệt liên quan đến biểu thức We^W. Công trình của Euler không chỉ làm sáng tỏ thêm những tính chất quan trọng của biểu thức này, mà còn góp phần đặt nền móng cho sự phát triển lý thuyết về hàm Lambert W trong toán học hiện đại. Sau đó, Corless và cs (1996) đã trình bày lại định nghĩa hàm Lambert W là hàm nghịch đảo đa giá trị của hàm We^W, bên cạnh đó các tác giả cũng trình bày một quy trình tính toán hiệu quả cho hàm số và một phương pháp cho việc tích hợp biểu tượng của các biểu thức chứa W. Tiếp đó, Beardon (2021) đã tập trung vào nghiên cứu nhánh chính $W_0(x)$ của hàm Lambert W và sử dụng của chuỗi Taylor của tại một điểm nhất định để có được biểu diễn chuỗi vô hạn của $W_0(x)$ trong toàn bộ định nghĩa. Bên cạnh đó, Iacono và Boyd (2017) cũng đề cập đến việc hàm Lambert W có nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực khoa học khác. Iacono và Boyd (2017) đã giúp chính xác hóa hơn cho việc tính toán giá trị của nhánh có giá trị thực chính của hàm Lambert W. Một nghiên cứu của Hoorfar và Hassani (2008) còn chỉ ra rằng bất đẳng thức sau đúng với $x \geq e$:

$$\ln(x) - \ln(\ln(x)) + \frac{\ln(\ln(x))}{2\ln(x)} \leq W_0(x) \leq \ln(x) - \ln(\ln(x)) + \frac{e}{e-1}.\frac{\ln(\ln(x))}{2\ln(x)}.$$

Hơn thế Mező (2022) đã cho ra mắt một quyển sách thể hiện gần như chi tiết một số kiến thức cơ bản và một số ứng dụng của hàm Lambert W trong các lĩnh vực khoa học khác. Ở Việt Nam, một số công trình nghiên cứu đã được thực hiện để giải quyết các vấn đề cụ thể thông qua hàm Lambert W, chẳng hạn như Hoàng và Nguyễn (2023) đã sử dụng hàm Lambert W để giải các dạng phương trình, hệ phương trình vi phân có trễ. Một trong những động lực của nghiên cứu này xuất phát từ việc giải một số phương trình mũ có dạng đặc biệt, chẳng hạn như phương trình:

$$24^x = 9x. \tag{1}$$

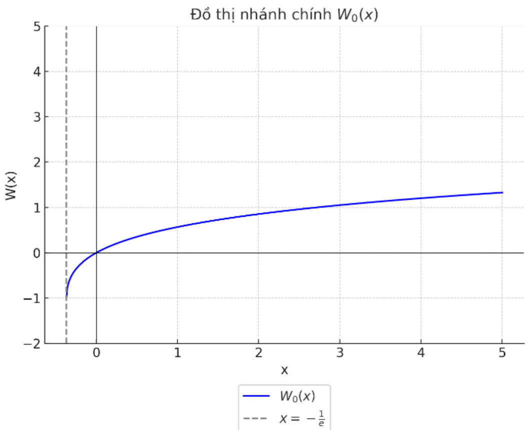
Đối với phương trình (1), các phương pháp giải thông thường gặp nhiều khó khăn hay thậm chí là không thể áp dụng. Tuy nhiên, phương trình (1) có thể được giải một cách đơn giản nếu áp dụng một số tính chất của hàm Lambert W (xem Mục 3.1). Bên cạnh việc giải các phương trình mũ có dạng (1), hàm Lambert W có thể được áp dụng để giải một số bài toán mũ dạng phức tạp hơn. Các kỹ thuật giải này đã được trình bày ở một số tài liệu, chẳng hạn như trong (Phan, 2020). Tuy nhiên, các kết quả này chưa được trình bày một cách hệ thống. Hơn nữa, một câu hỏi được đặt ra là: "*ngoài áp dụng vào việc giải các bài toán phương trình mũ, hàm Lambert W còn có thể áp dụng để giải các dạng toán phổ thông nào khác không*?".

Trong bài viết này, chúng tôi sẽ thệ thống các áp dụng của hàm Lambert W vào việc giải các bài toán phương trình mũ. Bên cạnh đó, chúng tôi cũng đề xuất áp dụng của hàm Lambert W vào việc xây dựng, đề xuất các bài toán về chứng minh sự hội tụ và tìm giới hạn của dãy số. Việc áp dụng hàm Lambert W vào các bài toán nói trên là chủ đề đáng được quan tâm trong việc bồi dưỡng học sinh giỏi toán cũng như bồi dưỡng sinh viên, học sinh tham gia các kỳ thi Olympic Toán học sinh viên, học sinh.

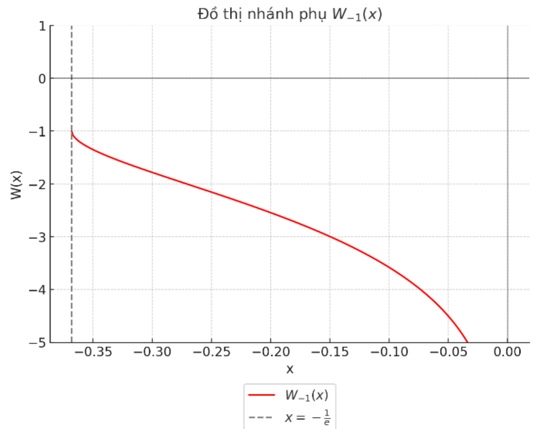
2. Một số tính chất cơ bản của hàm Lambert W

2.1. Một số nhánh cơ bản của của hàm Lambert W

Theo các khoảng xác định khác nhau, hàm Lambert W nhận những giá trị khác nhau, thậm chí là giá trị phức. Tuy nhiên có hai nhánh nhận giá trị thực cơ bản nhận được nhiều sự quan tâm và có những áp dụng quan trọng trong toán học phổ thông đó là các nhánh W_0 và W_{-1}. Trong toàn bộ bài viết này, chúng ta chỉ khảo sát hàm Lambert W trên $\left[\frac{-1}{e}, +\infty\right)$. Trên khoảng này, hàm Lambert W chia thành hai nhánh khác nhau. Nhánh W_0 xác định trên $\left[\frac{-1}{e}, +\infty\right)$ nhận $T = [-1; +\infty)$ làm tập giá trị, trong khi nhánh W_{-1} xác định trên $\left[\frac{-1}{e}, 0\right)$ nhận $T = (-\infty, -1]$ làm tập giá trị.



Hình 1. Đồ thị nhánh W_0



Hình 2. Đồ thị nhánh W_{-1}

2.2. Đạo hàm của hàm Lambert W

Xuất phát từ tính chất của hàm Lambert W

$$W(x).e^{W(x)} = x. \tag{2.2.1}$$

Lấy đạo hàm hai vế của (2.2.1) ta được:

$$W'(x)e^{W(x)} + W(x)W'(x)e^{W(x)} = 1$$

$$\Leftrightarrow W'(x) = \frac{1}{e^{W(x)} + W(x)e^{W(x)}}$$

$$\Leftrightarrow W'(x) = \frac{1}{(W(x)+1)e^{W(x)}}$$

$$\Leftrightarrow W'(x) = \frac{W(x)}{x(1+W(x))}. \tag{2.2.2}$$

Từ (2.2.2), ta thấy rằng công thức đạo hàm của hàm Lambert W tại 1 điểm sẽ xác định khi:

$$W(x) + 1 \neq 0 \Leftrightarrow W(x) \neq \frac{-1}{e}.$$

Do đó, đạo hàm của hàm Lambert W tại một điểm được tính theo công thức sau:

$$W'(x) = \frac{W(x)}{x\big(1+W(x)\big)} \;, x > \frac{-1}{e}$$

2.3. Tích phân của hàm Lambert W

Với mọi $a, b \in \left(\frac{-1}{e}, +\infty\right)$, tích phân từ a đến b của hàm Lambert W được xác định như sau:

Đặt $x = te^t \Rightarrow dx = (t+1)e^t dt$, khi đó:

$$\int_a^b W(x)dx = \int_{W(a)}^{W(b)} W(te^t)(t+1)e^t dt = \int_{W(a)}^{W(b)} t(t+1)e^t dt$$

$$= t(t+1)e^t\Big|_{W(a)}^{W(b)} - \int_{W(a)}^{W(b)} (2t+1)e^t dt$$

$$= t(t+1)e^t\Big|_{W(a)}^{W(b)} - (2t+1)e^t\Big|_{W(a)}^{W(b)} + 2\int_{W(a)}^{W(b)} e^t dt$$

$$= t(t+1)e^t\Big|_{W(a)}^{W(b)} - (2t+1)e^t\Big|_{W(a)}^{W(b)} + 2e^t\Big|_{W(a)}^{W(b)}$$

$$= (t^2 - t + 1)e^t\Big|_{W(a)}^{W(b)}$$

$$= bW(b) - b + e^{W(b)} - aW(a) + a - e^{W(a)}.$$

Do đó, tích phân của hàm Lambert W tại một điểm được tính theo công thức sau:

$$\int_a^b W(x)dx = bW(b) - b + e^{W(b)} - aW(a) + a - e^{W(a)}.$$

3. Áp dụng vào toán phổ thông

3.1. Giải một số dạng đặc biệt của phương trình mũ

3.1.1. Cách giải phương trình mũ dạng:

$$a^x + bx = c \quad (1 \neq a > 0, b \neq 0). \tag{3.1.1}$$

Quy trình giải bài toán (3.1.1) được trình bày như sau:

Vì $b \neq 0$ nên chia 2 vế của phương trình (3.1.1) cho b, ta được

$$\frac{a^x}{b} + x = \frac{c}{b}.$$

Ta sử dụng các phép biến đổi tương đương để tìm nghiệm của phương trình trên như sau:

$$\frac{a^x}{b} = \frac{c}{b} - x \Leftrightarrow \frac{e^{x\ln a}}{b} = \frac{c}{b} - x$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{c}{b} - x\right)e^{-x\ln a} = \frac{1}{b}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{c}{b} - x\right)e^{-x\ln a}e^{\frac{c}{b}\ln a} = \frac{1}{b}e^{\frac{c}{b}\ln a}$$

$$\Leftrightarrow (\ln a).\left(\frac{c}{b} - x\right)e^{\left(\frac{c}{b}-x\right)\ln a} = \frac{1}{b}e^{\frac{c}{b}\ln a}\ln a$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{c}{b} - x\right)\ln a = W\left(\frac{1}{b}e^{\frac{c}{b}\ln a}\ln a\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{c}{b} - \frac{W\left(\frac{1}{b}e^{\frac{c}{b}\ln a}\ln a\right)}{\ln a}.$$

Do hàm Lambert W gồm 2 nhánh nhận giá trị thực W_0và W_{-1} nên ta xét 3 trường hợp sau:

Trường hợp 1: $\frac{1}{b}e^{\frac{c}{b}\ln a}\ln a \in \left[\frac{-1}{e};0\right)$ thì (3.1.1) có 2 nghiệm lần lượt là :

$$x = \frac{c}{b} - \frac{W_0\left(\frac{1}{b}e^{\frac{c}{b}\ln a}\ln a\right)}{\ln a} \text{ hoặc } x = \frac{c}{b} - \frac{W_{-1}\left(\frac{1}{b}e^{\frac{c}{b}\ln a}\ln a\right)}{\ln a}.$$

Trường hợp 2: $\frac{1}{b}e^{\frac{c}{b}\ln a}\ln a \geq 0$ thì (3.1.1) có 1 nghiệm duy nhất là :

$$x = \frac{c}{b} - \frac{W_0\left(\frac{1}{b}e^{\frac{c}{b}\ln a}\ln a\right)}{\ln a}.$$

Trường hợp 3: $\frac{1}{b}e^{\frac{c}{b}\ln a}\ln a < \frac{-1}{e}$ thì (3.1) vô nghiệm.

Ví dụ 1: Giải phương trình

$$4^x + x = 0. \tag{3.1.2}$$

Lời giải.

Ta thấy (3.1.2) có dạng $a^x + bx = c$ với $a = 4, b = 1, c = 0$.

Bằng tính toán trực tiếp ta có $\frac{1}{b}e^{\frac{c}{b}\ln a}\ln a = \frac{1}{4}e^0 \ln 4 = \ln 4 > 0$ nên theo trường hợp 2 của quy trình giải phương trình (3.1.1) ta có phương trình (3.1.2) có nghiệm duy nhất là

$$x = -\frac{W_0(\ln 4)}{\ln 4} = -\frac{W_0(e^{\ln 2}\ln 2)}{\ln 4} = -\frac{\ln 2}{\ln 4} = -\frac{1}{2}.$$

Ví dụ 2: Giải phương trình

$$2^x + x = 5. \tag{3.1.3}$$

Lời giải.

Ta thấy (3.1.3) có dạng $a^x + bx = c$ với $a = 2, b = 1, c = 5$.

Bằng tính toán trực tiếp ta có $\frac{1}{b}e^{\frac{c}{b}\ln a}\ln a = e^{5\ln 2}\ln 2 > 0$ nên theo trường hợp 2 của quy trình giải phương trình (3.1.1) ta có phương trình (3.1.3) có nghiệm duy nhất là:

$$x = 5 - \frac{W_0(e^{5\ln 2}\ln 2)}{\ln 2}.$$

3.1.2. Cách giải phương trình mũ dạng:

$$a^x = bx^n \quad (1 \neq a > 0, b \neq 0, n \in \mathbb{N}^*). \tag{3.1.4}$$

Quy trình giải phương trình (3.1.4) được trình bày như sau:

+ Với n lẻ, bằng các phép biến đổi tương đương ta tìm nghiệm của phương trình (3.1.4) như sau:

$$a^{\frac{x}{n}} = \sqrt[n]{b}\,x \Leftrightarrow e^{\frac{x\ln a}{n}} = \sqrt[n]{b}\,x \Leftrightarrow -\frac{x\ln a}{n}e^{-\frac{x\ln a}{n}} = -\frac{\ln a}{n}b^{\frac{-1}{n}}.$$

Điều này tương đương với

$$-\frac{x\ln a}{n} = W\left(-\frac{\ln a}{n}b^{\frac{-1}{n}}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{nW\left(-\frac{\ln a}{n}b^{\frac{-1}{n}}\right)}{\ln a}.$$

Do hàm Lambert W gồm 2 nhánh nhận giá trị thực W_0 và W_{-1} nên ta xét 3 trường hợp sau:

Trường hợp 1: $-\frac{\ln a}{n}b^{\frac{-1}{n}} \in \left[\frac{-1}{e};0\right)$ thì (3.1.4) có 2 nghiệm lần lượt là :

$$x = -\frac{nW_0\left(-\frac{\ln a}{n}b^{\frac{-1}{n}}\right)}{\ln a} \text{ hoặc } x = -\frac{nW_{-1}\left(-\frac{\ln a}{n}b^{\frac{-1}{n}}\right)}{\ln a}.$$

Trường hợp 2: $-\frac{\ln a}{n}b^{\frac{-1}{n}} \geq 0$ thì (3.1.4) có 1 nghiệm duy nhất là:

$$x = -\frac{nW_0\left(-\frac{\ln a}{n}b^{\frac{-1}{n}}\right)}{\ln a}.$$

Trường hợp 3: $-\frac{\ln a}{n}b^{\frac{-1}{n}} < \frac{-1}{e}$ thì (3.1.4) vô nghiệm.

+ Với n chẵn, $b > 0$, bằng các phép biến đổi tương đương ta tìm nghiệm của phương trình (3.1.4) như sau:

$$a^{\frac{x}{n}} = \sqrt[n]{b}|x|. \tag{3.1.4a}$$

Nếu $x > 0$ thì từ phương trình trên ta có:

$$a^{\frac{x}{n}} = \sqrt[n]{b}\ x \Leftrightarrow e^{\frac{x\ln a}{n}} = \sqrt[n]{b}\ x \Leftrightarrow -\frac{x\ln a}{n}e^{-\frac{x\ln a}{n}} = -\frac{\ln a}{n}b^{\frac{-1}{n}}.$$

Điều này tương đương với:

$$-\frac{x\ln a}{n} = W\left(-\frac{\ln a}{n}b^{\frac{-1}{n}}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{nW\left(-\frac{\ln a}{n}b^{\frac{-1}{n}}\right)}{\ln a}.$$

Do hàm Lambert W gồm 2 nhánh nhận giá trị thực W_0 và W_{-1} nên ta xét 3 trường hợp sau:

Trường hợp 1: $-\frac{\ln a}{n}b^{\frac{-1}{n}} \in \left[\frac{-1}{e};0\right)$ thì (3.1.4) có 2 nghiệm lần lượt là :

$$x = -\frac{nW_0\left(-\frac{\ln a}{n}b^{\frac{-1}{n}}\right)}{\ln a} \text{ hoặc } x = -\frac{nW_{-1}\left(-\frac{\ln a}{n}b^{\frac{-1}{n}}\right)}{\ln a}.$$

Trường hợp 2: $-\frac{\ln a}{n}b^{\frac{-1}{n}} \geq 0$ thì (3.1.4) có 1 nghiệm duy nhất là: $x = -\frac{nW_0\left(-\frac{\ln a}{n}b^{\frac{-1}{n}}\right)}{\ln a}$.

Trường hợp 3: $-\frac{\ln a}{n}b^{\frac{-1}{n}} < \frac{-1}{e}$ thì (3.1.4) vô nghiệm.

Nếu $x < 0$ thì từ (3.1.4a) ta có

$$a^{\frac{x}{n}} = -\sqrt[n]{b}\,x \Leftrightarrow e^{\frac{x\ln a}{n}} = -\sqrt[n]{b}\,x \Leftrightarrow -\frac{x\ln a}{n}e^{-\frac{x\ln a}{n}} = \frac{\ln a}{n}b^{\frac{-1}{n}}.$$

Điều này tương đương với

$$-\frac{x\ln a}{n} = W\left(\frac{\ln a}{n}b^{\frac{-1}{n}}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{nW\left(\frac{\ln a}{n}b^{\frac{-1}{n}}\right)}{\ln a}.$$

Do hàm Lambert W gồm 2 nhánh nhận giá trị thực W_0 và W_{-1} nên ta xét 3 trường hợp sau:

Trường hợp 1: $\frac{\ln a}{n} b^{\frac{-1}{n}} \in \left[\frac{-1}{e}; 0\right)$ thì (3.1.4) có 2 nghiệm lần lượt là :

$$x = -\frac{nW_0\left(\frac{\ln a}{n} b^{\frac{-1}{n}}\right)}{\ln a} \text{ hoặc } x = -\frac{nW_{-1}\left(\frac{\ln a}{n} b^{\frac{-1}{n}}\right)}{\ln a}.$$

Trường hợp 2: $\frac{\ln a}{n} b^{\frac{-1}{n}} \geq 0$ thì (3.1.4) có 1 nghiệm duy nhất là: $x = -\frac{nW_0\left(\frac{\ln a}{n} b^{\frac{-1}{n}}\right)}{\ln a}$.

Trường hợp 3: $\frac{\ln a}{n} b^{\frac{-1}{n}} < \frac{-1}{e}$ thì (3.1.4) vô nghiệm.

+ Với n chẵn, $b < 0$, thì (3.1.4) vô nghiệm.

Ví dụ 3: Giải phương trình

$$2^x = x^2 . \tag{3.1.5}$$

Lời giải.

Ta thấy phương trình (3.1.5) có dạng $a^x = bx^n$ với $a = 2, b = 1, n = 2$. Ta xét hai trường hợp sau:

Trường hợp $x > 0$. Bằng tính toán trực tiếp ta có:

$$-\frac{\ln a}{n} b^{\frac{-1}{n}} = -\frac{\ln 2}{2} 1^{\frac{-1}{2}} = -\frac{\ln 2}{2} \in \left[\frac{-1}{e}; 0\right).$$

Do đó theo trường hợp 1 quy trình giải phương trình (3.1.4) ta được nghiệm của (3.1.5) lần lượt là:

$$x = -\frac{2W_0\left(-\frac{\ln 2}{2}\right)}{\ln 2} = -\frac{2W_0\left(e^{\ln\frac{1}{2}} \ln\frac{1}{2}\right)}{\ln 2} = \frac{2\ln 2}{\ln 2} = 2 \text{ hoặc } x = -\frac{2W_{-1}\left(-\frac{\ln 2}{2}\right)}{\ln 2} = \frac{2\ln 4}{\ln 2} = 4.$$

Trường hợp $x < 0$. Bằng tính toán trực tiếp ta có: $\frac{\ln a}{n} b^{\frac{-1}{n}} = \frac{\ln 2}{2} > 0$. Theo trường hợp 2 quy trình giải phương trình (3.1.4) ta được nghiệm duy nhất của (3.1.5) là $x = -\frac{2W_0\left(\frac{\ln 2}{2}\right)}{\ln 2}$.

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm là $x = -\frac{2W_0\left(\frac{\ln 2}{2}\right)}{\ln 2}, x = 2, x = 4$.

Ví dụ 4: Giải phương trình

$$3^x = 2x^3. \tag{3.1.6}$$

Lời giải.

Ta thấy phương trình (3.1.6) có dạng $a^x = bx^n$ với $a = 3, b = 2, n = 3$. Vì n lẻ, bằng tính toán trực tiếp ta có $-\frac{\ln a}{n} b^{\frac{-1}{n}} = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \frac{\ln 3}{3} \in \left[\frac{-1}{e}; 0\right)$. Do đó theo trường hợp 1 của quy trình giải phương trình (3.1.4) ta được nghiệm của (3.1.6) lần lượt là:

$$x = -\frac{3W_{-1}\left(-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\frac{\ln 3}{3}\right)}{\ln 3} \text{ hoặc } x = -\frac{3W_0\left(-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\frac{\ln 3}{3}\right)}{\ln 3}.$$

Từ quy trình giải phương trình (3.1.1) và (3.1.4) chúng tôi rút ra được bảng tóm tắt sau

Bảng 1. Bảng tóm tắt quy trình giải 2 dạng phương trình (3.1.1) và (3.1.4)

	$a^x + bx = c$ (3.1.1)	$a^x = bx^n$ (3.1.4)
Bước 1	Xác định a, b, c	Xác định a, b, n
Bước 2	Tính $$T = \frac{1}{b} e^{\frac{c}{b}\ln a} \ln a$$	+ với n lẻ hoặc n chẵn, $b > 0, x > 0$ tính $$T_1 = -\frac{\ln a}{n} b^{\frac{-1}{n}}$$ + với n chẵn, $b > 0, x < 0$ tính $T_2 = \frac{\ln a}{n} b^{\frac{-1}{n}}$ + n chẵn , $b < 0$ (3.1.4) vô nghiệm
Bước 3	+ $-\frac{1}{e} \le T < 0$ thì (3.1.1) có 2 nghiệm $$x = \frac{c}{b} - \frac{W_0(T)}{\ln a}$$ hoặc $$x = \frac{c}{b} - \frac{W_{-1}(T)}{\ln a}$$ + $T \ge 0$ thì (3.1.1) có nghiệm duy nhất $$x = \frac{c}{b} - \frac{W_0(T)}{\ln a}$$ + $T < -\frac{1}{e}$ thì (3.1.1) vô nghiệm.	+ $-\frac{1}{e} \le T_1, T_2 < 0$ thì (3.1.4) có 2 nghiệm $$x = -\frac{nW_0(T_1)}{\ln a}$$ hoặc $$x = -\frac{nW_{-1}(T_1)}{\ln a}$$ Hay $$x = -\frac{nW_0(T_2)}{\ln a}$$ hoặc $$x = -\frac{nW_{-1}(T_2)}{\ln a}$$ + $T_1, T_2 \ge 0$ thì (3.1.4) có nghiệm duy nhất $$x = -\frac{nW_0(T_1)}{\ln a}$$ Hay $$x = -\frac{nW_0(T_2)}{\ln a}$$ + $T_1, T_2 < -\frac{1}{e}$ thì (3.1.4) vô nghiệm.

Bằng những quy trình giải hai dạng phương trình mũ (3.1.1) và (3.1.4) đã trình bày ở trên chúng tôi đề xuất thêm một số phương trình tương tự có thể áp dụng các quy trình ở trên vào việc giải các phương trình đó.

3.1.3. Bài toán đề xuất về phương trình mũ

Bài 1. Giải phương trình $2^x + x = 3$. (Đáp án: $x = 1$)

Bài 2. Giải phương trình $2^{x^2+1} + x^2 = 5$. (Đáp án: $x = \pm 1$)

Bài 3. Giải phương trình $4.5^x - 5x^2 - 10x = 5$.

(Đáp án: $x = 1, x = -\frac{2W_{-1}\left(\frac{-\ln 5}{5}\right)}{\ln 5} - 1, x = -\frac{2W_0\left(\frac{\ln 5}{5}\right)}{\ln 5} - 1$)

Bài 4. Giải phương trình $7^{x-1} - 8x^3 + 12x^2 - 6x + 1 = 0$. (Đáp án: $x = 1$, $x = 4$)

3.2. Thiết kế và giải một số bài toán về dãy số

Mục này trình bày việc áp dụng một số tính chất của hàm Lambert W vào việc đề xuất và xây dựng một số bài toán về chứng minh sự hội tụ và tìm giới hạn của dãy số. Ý tưởng này, xuất phát từ quy trình tính hoặc xấp xỉ giá trị của hàm Lambert W tại một điểm. Trong một số trường hợp khác, việc tính giá trị của hàm Lambert W tại một điểm bất kỳ thông qua định nghĩa gặp một số khó khăn, chẳng hạn $W(2)$. Do đó, việc xấp xỉ giá trị của hàm Lambert W sẽ giúp cho việc dự đoán các giá trị của hàm Lambert W tại một điểm được dễ dàng hơn. Có nhiều thuật toán để ước lượng giá trị của hàm Lambert W tại một điểm nhưng trong nghiên cứu này chúng tôi sẽ tập trung vào phương pháp Newton để xấp xỉ giá trị của hàm Lambert W tại một điểm. Từ phương pháp Newton, chúng tôi sẽ đề xuất một số bài toán về chứng minh sự hội tụ và tìm giới hạn của dãy số. Trước tiên chúng tôi sẽ nhắc lại về phương pháp Newton để xấp xỉ nghiệm của các phương trình.

3.2.1. Phương pháp Newton

Trong giải tích số, phương pháp Newton (còn được gọi là phương pháp Newton–Raphson), đặt tên theo Isaac Newton và Joseph Raphson, là một phương pháp tìm nghiệm xấp xỉ gần đúng của một hàm số có tham số thực.

$$\text{Tìm } x: f(x) = 0$$

Phương pháp Newton–Raphson với một biến được thực hiện như sau:

Phương pháp này bắt đầu với một hàm f được xác định qua số thực x, với đạo hàm f', và một số gần đúng x_0 ban đầu sát với nghiệm của f. Nếu chức năng đáp ứng các giả định được đưa ra trong công thức đạo hàm và số dự đoán ban đầu gần với nghiệm số, thì một phép xấp xỉ tốt hơn x_1 là:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

về mặt hình học, $(x_{1,0})$ là điểm giao giữa trục x và tiếp tuyến của đồ thị của f tại $(x_0, f(x_0))$. Quá trình được lặp lại với

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

cho đến khi đạt được một giá trị nghiệm với độ chính xác cần thiết.

Thuật toán này là thuật toán đầu tiên trong nhóm thuật toán của các phương pháp Householder, tiếp theo là phương pháp Halley. Phương pháp này cũng có thể được mở rộng cho các hàm số phức, các hệ phương trình và các phương trình tổng quát.

Thiết lập quy trình ước lượng giá trị hàm Lambert W tại một điểm từ phương pháp Newton

Bước 1: xét phương trình

$$xe^x - a = 0, a \in \left[\frac{-1}{e}; +\infty\right).$$

Với điều kiện của a để phương trình có nghiệm thì $xe^x \geq \frac{-1}{e} = -1e^{-1}$. Tác động hàm Lambert W vào ta được $x \geq -1$. Mặt khác với $a = \frac{-1}{e}$ ta dễ dàng tính được $x = -1$. Do vậy,

$$W_0\left(\frac{-1}{e}\right) = W_{-1}\left(\frac{-1}{e}\right) = -1.$$

Do đó ở các bước sau chúng tôi chỉ xét điều kiện $x > -1$và $a > \frac{-1}{e}$.

Bước 2: đặt $f(x) = xe^x - a$, khi đó ta có $f^{'}(x) = (x+1)e^x$, dựa vào thuật toán Newton ta có:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f^{'}(x_n)} = x_n - \frac{x_n e^{x_n} - a}{(x_n+1)e^{x_n}}.$$

Chọn $x_0 = \alpha$, α là số gần với nghiệm phương trình $f(x) = 0$. Khi đó việc tính giá trị của hàm Lambert W đối với nhánh W_0 sẽ quy về việc tìm giới hạn của dãy số sau:

$$\begin{cases} x_0 \ = \alpha, \quad \big(\alpha \in [-1, +\infty)\big), \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n e^{x_n} - a}{(x_n+1)e^{x_n}}. \end{cases}$$

Đối với nhánh W_{-1}thì việc tính giá trị của hàm Lambert W sẽ quy về việc tính giới hạn của dãy số sau:

$$\begin{cases} x_0 \ = \alpha, \quad \big(\alpha \in (-\infty, -1)\big), \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n e^{x_n} - a}{(x_n+1)e^{x_n}}. \end{cases}$$

Bước 3: ta sẽ chứng minh (x_n) hội tụ về $W(a)$. Đặt $g(x) = x - \frac{xe^x - a}{(x+1)e^x}$. Khi đó ta có

$$g^{'}(x) = 1 - \frac{(x+1)^2 e^{2x} - (xe^x - a)(x+2)e^x}{(x+1)^2 e^{2x}} = \frac{(xe^x - a)(x+2)}{(x+1)^2 e^x},$$

nghĩa là

$$g^{'}(x) - 1 = \frac{(xe^x - a)(x+2)}{(x+1)^2 e^x} - \frac{(x+1)^2 e^x}{(x+1)^2 e^x} = \frac{-ax - 2a - e^x}{(x+1)^2 e^x}.$$

Đặt $h(x) = -ax - 2a - e^x$. Khi đó $h^{'}(x) = -a - e^x < 0 \ \left(\forall x > -1, \forall a > \frac{-1}{e}\right)$. Do đó $h(x)$ nghịch biến trên $(-1, \infty)$. Suy ra $h(x) < h(-1) = -a - \frac{1}{e} < \frac{1}{e} - \frac{1}{e} = 0$. Do đó

$$g^{'}(x) < 1 \ \left(\forall x > -1, \forall a > \frac{-1}{e}\right). \qquad (3.2.1)$$

Mặt khác, ta có $g^{'}(x) - 0 = \frac{(xe^x - a)(x+2)}{(x+1)^2 e^x}$ và $x + 2 > 0$ với $x > -1$. Giả sử $xe^x - a < 0$ với $x > -1$, $a > \frac{-1}{e}$ nào đó. Khi đó $xe^x < a$ hay $xe^x < \min\limits_{\left[\frac{-1}{e}; +\infty\right)} a = \frac{-1}{e}$. Vì $xe^x > \frac{-1}{e}$ với mọi $x > -1$ nên giả sử bên trên mâu thuẫn .

Do đó $xe^x - a > 0, \forall x > -1, \forall a > \frac{-1}{e}$. Suy ra $g^{'}(x) > 0$, $\forall x > -1, \forall a > \frac{-1}{e}$.
(3.2.2)

Từ (3.2.1) và (3.2.2), ta có $0 < g^{'}(x) < 1$.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh phương trình $g(l) = l$ có một nghiệm duy nhất. Thật vậy, phương trình $g(l) = l$ tương đương

$$\frac{le^l - a}{(l+1)e^l} = 0 \Leftrightarrow le^l - a = 0 \Leftrightarrow le^l = a. \qquad (3.2.3)$$

Tác động hàm Lambert W vào hai vế của phương trình (3.2.3) ta được

$$l = W(a)$$

Mặt khác ta có $(xe^x - a)' = (x+1)e^x > 0$ với $x > -1$. Do đó phương trình $g(l) = l$ có nghiệm duy nhất là $l = W(a)$. Khi đó,

$$\begin{cases} g(x_0) &= x_1, \\ g(x_n) &= x_{n+1}. \end{cases}$$

Theo chứng minh ở trên ta có $0 < g'(x) < 1$ $\left(\forall x > -1, \forall a > \frac{-1}{e}\right)$. Do đó tồn tại $u, v \in \mathbb{R}$ sao cho $0 < u < v$ và $g'(x) \leq \frac{u}{v}$. Quan sát rằng

$$|x_{n+1} - l| = |g(x) - g(l)| = |g'(c)||x_n - l| \leq \frac{u}{v}|x_n - l| \leq \cdots \leq \left(\frac{u}{v}\right)^{n+1}|x_0 - l|.$$

Vì $\lim\left(\frac{u}{v}\right)^{n+1}|x_0 - l| = 0$ nên $\lim|x_{n+1} - l| = 0$ hay $\lim x_{n+1} = l = W(a)$.

Vậy ta đã chứng được rằng (x_n) hội tụ về $W(a)$. Về sau khi ước lượng giá trị của hàm Lambert W tại một điểm ta không cần chứng minh (x_n) hội tụ về $W(a)$ nữa mà ta chỉ việc thiết lập dãy số (x_n) và tìm giới hạn của dãy (x_n). Ví dụ sau minh hoạ cho việc xấp xỉ giá trị của hàm Lambert W tại một điểm như sau.

Ví dụ 5: Ước lượng giá trị của hàm Lambert W tại $x = 2$.

Lời giải.

Ta thấy $2 > 0$ nên hàm Lambert W chỉ nhận duy nhất 1 giá trị thực là $W_0(2)$. Chúng tôi sẽ đi ước lượng giá trị của $W_0(2)$ theo quy trình mà chúng tôi đã thiết lập.

Bước 1: xét phương trình

$$xe^x = 2.$$

Bước 2: đặt $f(x) = xe^x - 2$, khi đó ta có $f'(x) = (x+1)e^x$, dựa vào thuật toán Newton ta có:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n e^{x_n} - 2}{(x_n+1)e^{x_n}}.$$

Xét dãy số (x_n) được xác định như sau:

$$\begin{cases} x_0 &= 1, \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n e^{x_n} - 2}{(x_n+1)e^{x_n}}. \end{cases}$$

Bước 3: tìm giới hạn của dãy số (x_n) ta được $\lim x_n \approx 0{,}8526$ hay $W_0(2) \approx 0{,}8526$.

3.2.2. Đề xuất và giải một số bài toán về dãy số

Ngoài việc ước lượng giá trị của hàm Lambert W tại một điểm dựa quy trình ước lượng giá trị của hàm Lambert W. Dựa vào quy trình giải hai dạng phương trình mũ (3.1.1) và (3.1.4) cũng như quy trình ước lượng giá trị của hàm Lambert W chúng tôi sẽ trình bày cũng như đề xuất một số bài toán về dãy số dưới đây.

Ví dụ 6: Cho dãy số (x_n) được xác định như sau: $\begin{cases} x_0 = \frac{5}{6} \\ x_{n+1} = 2^{x_n} - x_n \end{cases}$ $(n \in \mathbb{N})$

a) Chứng minh (x_n) hội tụ.
b) Tìm giới hạn của (x_n).

Lời giải.

a) Để chứng minh (x_n) hội tụ, ta sẽ chứng minh (x_n) bị chặn và (x_n) tăng. Để chứng minh (x_n) bị chặn, ta sẽ chứng minh $0 < x_n \leq 1, \forall \in \mathbb{N}$. Thật vậy, ta thấy $0 < x_0 = \frac{5}{6} \leq 1$. Giả sử với $n = k, k \in \mathbb{N}^*$, ta có $0 < x_k \leq 1$. Ta sẽ chứng minh $0 < x_{k+1} \leq 1$. Xét hàm số

$$f(x) = 2^x - x, \forall x \in (0; 1].$$

Ta có $f'(x) = 2^x \ln 2 - 1$. Giải phương trình $f'(x) = 0$ ta được $x = \frac{\ln\frac{1}{\ln 2}}{\ln 2} = -\frac{\ln(\ln 2)}{\ln 2} \approx$ 0,5286.

Do đó ta có bảng biến thiên của $f(x)$ như sau:

Bảng 2. Bảng biến thiên của hàm $f(x) = 2^x - 2x$

x	0 1	$-\frac{\ln(\ln 2)}{\ln 2}$
$f'(x)$	0	
$f(x)$	1 ↘ $f\left(-\frac{\ln(\ln 2)}{\ln 2}\right)$ ↗	1

Dựa vào bảng biến thiên ta có $0 < f\left(-\frac{\ln(\ln 2)}{\ln 2}\right) \approx 0{,}91392 \leq f(x) \leq 1$. Do đó theo giả thiết quy nạp $n = k, k \in \mathbb{N}^*$ ta có $0 < x_k \leq 1$. Thay $x_k$vào $f(x)$ ta được:

$$0 < f(x_k) \leq 1 \text{ hay } 0 < x_{k+1} \leq 1.$$

Vậy dãy số (x_n) bị chặn.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh (x_n) tăng. Ta thấy $x_0 = \frac{5}{6} \leq x_1 = 2^{\frac{5}{6}} - \frac{5}{6} \approx 0{,}94846$. Giả sử với $n = k, k \in \mathbb{N}^*$, ta có $x_k \leq x_{k+1}$. Ta sẽ đi chứng minh $x_{k+1} \leq x_{k+2}$. Thật vậy, xét hàm số

$$g(x) = 2^x - 2x, \forall x \in (0; 1].$$

Ta có $g'(x) = 2^x \ln 2 - 2 < 0, \forall x \in (0; 1]$. Do đó $g(x)$ nghịch biến trên $(0; 1]$, ta có

$$g(x) \geq g(1) = 0, \forall x \in (0; 1].$$

Điều này kéo theo rằng $g(x_{k+1}) \geq 0$ hay $x_{k+1} \leq x_{k+2}$. Vậy dãy (x_n) tăng.

Do đó dãy (x_n) tăng và bị chặn nên nó hội tụ.

b) Vì (x_n) hội tụ và $0 < x_n \leq 1$ nên tồn tại một số thực l sao cho $\lim x_n = l, l \in (0; 1]$. Từ giả thiết bài toán, ta có

$$\lim x_{n+1} = \lim(2^{x_n} - x_n) \text{ hay } 2^l - 2l = 0.$$

Ta thấy rằng phương trình $2^l - 2l = 0$ là phương trình mũ dạng $a^x + bx = c$ được trình bày ở mục (3.1.1) nên dựa vào quy trình tìm nghiệm đó chúng ta có thể giải phương trình $2^l - 2l = 0$ và ta có nghiệm như sau:

$$l = -\frac{W_0\left(-\frac{1}{2}\ln 2\right)}{\ln 2} = -\frac{W_0\left(e^{\ln\frac{1}{2}}\ln\frac{1}{2}\right)}{\ln 2} = \frac{\ln 2}{\ln 2} = 1$$

hoặc

$$l = -\frac{W_{-1}\left(-\frac{1}{2}\ln 2\right)}{\ln 2} = -\frac{W_{-1}\left(e^{\ln\frac{1}{4}}\ln\frac{1}{4}\right)}{\ln 2} = \frac{\ln 4}{\ln 2} = 2.$$

.

Vì $l \in (0; 1]$ nên $l = 1$. Vậy $\lim x_n = 1$.

Ví dụ 7: Cho dãy số (x_n) được xác định như sau: $\begin{cases} x_0 = \frac{5}{6} \\ x_{n+1}^3 = 3^{x_n - 1} \end{cases} (n \in \mathbb{N})$

a) Chứng minh (x_n) hội tụ.
b) Tìm giới hạn của (x_n).

Lời giải.

a) Để chứng minh (x_n) hội tụ ta sẽ chứng minh (x_n) bị chặn và (x_n) tăng.

Để chứng minh (x_n) bị chặn ta sẽ chứng minh $0 < x_n \leq 1$, $\forall \in \mathbb{N}$. Ta thấy $0 < x_0 = \frac{5}{6} \leq 1$. Giả sử với $n = k, k \in \mathbb{N}^*$, ta có $0 < x_k \leq 1$. Ta sẽ chứng minh $0 < x_{k+1} \leq 1$. Định nghĩa hàm số $f(x) = 3^{x-1}, \forall x \in 0; 1$. Vì $f(x)$ đồng biến trên $(0; 1]$ nên $0 < f(0) < f(x) \leq f(1) = 1$. Từ giả thiết qui nạp $0 < x_k \leq 1$, thay x_k vào $f(x)$ ta được $0 < 3^{x_k - 1} \leq 1$. Do đó $0 < x_{k+1}^3 \leq 1$ và vì vậy $0 < x_{k+1} \leq 1$. Theo nguyên lý qui nạp, ta kết luận dãy (x_n) bị chặn.

Tiếp theo ta sẽ chứng minh (x_n) tăng. Ta thấy $x_0 = \frac{5}{6} \leq x_1 = \sqrt[3]{3^{\frac{5}{6}-1}} \approx 0{,}94$. Giả sử với $n = k, k \in \mathbb{N}^*$, ta có $x_k \leq x_{k+1}$. Ta sẽ chứng minh $x_{k+1} \leq x_{k+2}$. Vì $x_k \leq x_{k+1}$ nên $3^{x_k - 1} \leq 3^{x_{k+1} - 1}$ hay $x_{k+1}^3 \leq x_{k+2}^3$. Suy ra $x_{k+1} \leq x_{k+2}$. Do đó (x_n) tăng.

Vậy (x_n) hội tụ.

b) Vì (x_n) hội tụ nên tồn tại một số thực l sao cho $\lim x_n = l, l \in (0; 1]$. Từ giả thiết bài toán, ta có $\lim x_{n+1}^3 = \lim 3^{x_n - 1}$ hay $l^3 = 3^{l-1}$. Ta thấy được phương trình $l^3 = 3^{l-1}$ có là phương trình mũ đặc biệt dạng $a^x = bx^n$ mà chúng tôi đã trình quy trình giải ở mục (3.1.2) nên dựa vào quy trình tìm nghiệm đó chúng ta có thể giải phương trình $l^3 = 3^{l-1}$ và có nghiệm như sau:

$$l = -\frac{3W_0\left(-\frac{\ln 3}{3}3^{\frac{-1}{3}}\right)}{\ln 3} = -\frac{3W_0\left(-\frac{\ln 3}{3}e^{\frac{-\ln 3}{3}}\right)}{\ln 3} = \frac{\ln 3}{\ln 3} = 1, \text{hoặc } l = -\frac{3W_{-1}\left(-\frac{\ln 3}{3}3^{\frac{-1}{3}}\right)}{\ln 3}.$$

Mặt khác, theo tính chất của nhánh thực W_{-1} ta có $W_{-1}\left(-\frac{\ln 3}{3}3^{\frac{-1}{3}}\right) < W_{-1}\left(\frac{-1}{e}\right) = -1$. Do đó $-\frac{3W_{-1}\left(-\frac{\ln 3}{3}3^{\frac{-1}{3}}\right)}{\ln 3} > \frac{-3W_{-1}\left(\frac{-1}{e}\right)}{\ln 3} = \frac{3}{\ln 3} > 2$. Vậy $\lim x_n = l = 1$.

3.2.3. Một số bài toán đề xuất về dãy số

Bài 1. Cho dãy số (x_n) được xác định như sau: $\begin{cases} x_0 & = \frac{2}{3} \\ 3x_{n+1} = 2^{x_n} + x_n \end{cases}$ $(n \in \mathbb{N})$

a) Chứng minh (x_n) hội tụ.
b) Tìm giới hạn của (x_n).

(Gợi ý: a) chứng minh (x_n) bị chặn và tăng. b) $\lim x_n = 1$)

Bài 2. Cho dãy số (x_n) được xác định như sau: $\begin{cases} x_0 & = \frac{1}{2} \\ 5x_{n+1} = 3^{x_n} + 2x_n \end{cases}$ $(n \in \mathbb{N})$

a) Chứng minh (x_n) hội tụ.
b) Tìm giới hạn của (x_n).

(Gợi ý: a) chứng minh (x_n) bị chặn và tăng. b) $\lim x_n = 1$)

Bài 3. Cho dãy số (x_n) được xác định như sau: $\begin{cases} x_0 & = -\frac{1}{4} \\ x_{n+1} = -4^{x_n} \end{cases}$ $(n \in \mathbb{N})$

a) Chứng minh (x_n) hội tụ.
b) Tìm giới hạn của (x_n).

(Gợi ý: a) chứng minh (x_n) bị chặn và (x_{2k}) giảm, (x_{2k+1}) tăng . b) $\lim x_n = -\frac{1}{2}$)

Bài 3. Cho dãy số (x_n) được xác định như sau: $\begin{cases} x_0 & = \frac{1}{2} \\ 5x_{n+1}^5 = 5^{x_n} \end{cases}$ $(n \in \mathbb{N})$

a) Chứng minh (x_n) hội tụ.
b) Tìm giới hạn của (x_n).

(Gợi ý: a) chứng minh (x_n) bị chặn và tăng. b) $\lim x_n = 1$)

4. Kết luận

Trong bài báo này, chúng tôi đã khảo sát một số tính chất cơ bản và ứng dụng của hàm Lambert W trong việc giải các phương trình có dạng đặc biệt như phương trình (3.1.1) và (3.1.4). Kết quả đạt được cho thấy hàm Lambert W là một công cụ hiệu quả giúp biểu diễn nghiệm tường minh cho nhiều loại phương trình mũ phức tạp, đặc biệt là các phương trình có thể quy về dạng $a^x + bx = c$ và $a^x = bx^n$. Hơn thế, một hướng nghiên cứu đầy tiềm năng là ứng dụng hàm Lambert W vào các bài toán thực tế, chẳng hạn như: nghiên cứu bài toán lãi kép trong tài chính, với mục tiêu xác định khoảng thời gian cần thiết để đạt được một số tiền cụ thể khi biết lãi suất và số vốn ban đầu. Hay nghiên cứu mô hình tăng trưởng dân số hoặc tăng trưởng sinh học, nơi các hàm mũ thường được sử dụng để mô tả sự biến đổi theo thời gian, có thể được khai thác sâu hơn bằng cách áp dụng hàm Lambert W để tìm thời điểm hoặc điều kiện ban đầu.

Lời cảm ơn: Bài báo này được hỗ trợ bởi Trường Đại học Đồng Tháp với Đề tài nghiên cứu khoa học của sinh viên mã số SPD2024.02.38.

Tài liệu tham khảo

Beardon, A. F. (2021). The principal branch of the Lambert W function. *Computational Methods and Function Theory*, *21*(2), 307-316. https://doi.org/10.1007/s40315-020-00329-6.

Corless, R. M., Gonnet, G. H., Hare, D. E., Jeffrey, D. J., & Knuth, D. E. (1996). On the Lambert W function. *Advances in Computational mathematics*, *5*, 329-359. https://doi.org/10.1007/BF02124750.

Euler, L. (1783). De serie Lambertina Plurimisque eius insignibus proprietatibus. *Acta Academiae scientiarum imperialis petropolitanae*, 29-51.

Hoàng, V. A., & Nguyễn, T. H. L. (2023). Ứng dụng của hàm Lambert W đối với một dạng phương trình, hệ phương trình vi phân có trễ. *Tạp chí Khoa học - Đại học Tây Bắc*, (28), 54-58. https://tapchi.utb.edu.vn/index.php/journalofscience/article/view/446/510.

Hoorfar, A., & Hassani, M. (2008). Inequalities on the Lambert W function and hyperpower function. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, *9*(2), 5-9. https://eudml.org/doc/130024.

Iacono, R., & Boyd, J. P. (2017). New approximations to the principal real-valued branch of the Lambert W-function. *Advances in Computational Mathematics*, *43*, 1403-1436. https://doi.org/10.1007/s10444-017-9524-6.

Lambert, J. H. (1758). Observationes variae in mathesin puram. *Acta Helvetica*, *3*(1), 128-168.

Lehtonen, J. (2016). The Lambert W function in ecological and evolutionary models. *Methods in Ecology and Evolution*, *7*(9), 1110-1118. https://doi.org/10.1111/2041-210X.12558

Mező, I. (2022). *The Lambert W function: its generalizations and applications*. Chapman and Hall/CRC.

Phan, S. (2020). Hàm Lambert W và ứng dụng để biểu diễn nghiệm của phương trình. *MATH$\sqrt{N}$.COM*. https://www.mathvn.com/2020/08/ham-lambert-w-va-ung-dung-e-bieu-dien.html.