



DOI: <https://doi.org/10.52714/dthu.14.01S.2025.1564>

PHÁT TRIỂN NĂNG LỰC GIẢI QUYẾT VẤN ĐỀ TOÁN HỌC CHO HỌC SINH TRONG DẠY HỌC CÁC BÀI TOÁN THỰC TIỄN CHỦ ĐỀ HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Nguyễn Dương Hoàng¹ và Hồ Tuấn Thoại^{2,3*}

¹*Khoa Sư phạm Toán – Tin, Trường Sư phạm, Trường Đại học Đồng Tháp, Việt Nam*

²*Tổ Toán, Trường Trung học phổ thông Kiên Lương, Việt Nam*

³*Học viên cao học, Trường Đại học Đồng Tháp, Việt Nam*

**Tác giả liên hệ, Email: thoai0180@gmail.com*

Lịch sử bài báo

Ngày nhận: 01/6/2025; Ngày nhận chỉnh sửa: 11/6/2025; Ngày duyệt đăng: 23/6/2025

Tóm tắt

Hiện nay, đổi mới giáo dục ở nước ta tập trung chuyển dịch mạnh mẽ từ việc chỉ chú trọng truyền đạt kiến thức sang việc phát triển toàn diện năng lực và phẩm chất của người học. Theo Chương trình Giáo dục phổ thông môn Toán năm 2018, năng lực giải quyết vấn đề toán học là một trong năm năng lực cốt lõi cần được hình thành và phát triển ở học sinh trung học phổ thông. Chủ đề Hàm số lượng giác và phương trình lượng giác trong Toán lớp 11 cung cấp nhiều cơ hội phát triển năng lực này thông qua dạy học các bài toán thực tiễn. Bài viết này đề xuất một số biện pháp phát triển năng lực giải quyết vấn đề toán học cho học sinh trong dạy học các bài toán thực tiễn chủ đề Hàm số lượng giác và phương trình lượng giác, góp phần nâng cao chất lượng dạy học toán ở trường trung học phổ thông.

Từ khóa: *Bài toán thực tiễn, hàm số lượng giác, năng lực giải quyết vấn đề toán học, phương trình lượng giác.*

Trích dẫn: Nguyễn, D. H., & Hồ, T. T. (2025). Phát triển năng lực giải quyết vấn đề toán học cho học sinh trong dạy học các bài toán thực tiễn chủ đề hàm số lượng giác và phương trình lượng giác. *Tạp chí Khoa học Đại học Đồng Tháp*, 14(01S), 150-164. <https://doi.org/10.52714/dthu.14.01S.2025.1564>

Copyright © 2025 The author(s). This work is licensed under a CC BY-NC 4.0 License.

DEVELOPING STUDENTS' MATHEMATICAL PROBLEM-SOLVING ABILITY IN TEACHING PRACTICAL PROBLEMS ON TRIGONOMETRIC FUNCTIONS AND EQUATIONS

Nguyen Duong Hoang¹ and Ho Tuan Thoai^{2,3*}

¹*Faculty of Mathematics - Information Teacher Education,
School of Education, Dong Thap University, Vietnam*

²*Math Team, Kien Luong High School, Vietnam*

³*Post-graduate student, Dong Thap University, Vietnam*

**Corresponding author, Email: thoai0180@gmail.com*

Article history

Received: 01/6/2025; Received in revised form: 11/6/2025; Accepted: 23/6/2025

Abstract

Our country's educational innovation focuses on a strong shift from only focusing on imparting knowledge to comprehensively developing learners' abilities and qualities. Under the 2018 General Education Program for Mathematics, the ability to solve mathematical problems is one of the five core abilities that need to be formed and developed in high school students. The topic of trigonometric functions and equations in 11th grade mathematics provides many opportunities to develop this ability in practices. This article proposes some measures to develop students' mathematical problem-solving ability in teaching practical problems on the topic of trigonometric functions and equations, contributing to improving the quality of mathematics teaching in high schools.

Keywords: *Mathematical problem-solving ability, practical problems, trigonometric equations, trigonometric functions.*

1. Đặt vấn đề

Trong những năm gần đây, ngành giáo dục không ngừng đổi mới phương pháp giảng dạy nhằm nâng cao chất lượng theo định hướng phát triển năng lực (NL) và phẩm chất toàn diện cho người học.

Chương trình Giáo dục phổ thông (Bộ Giáo dục và Đào tạo, 2018a) thực hiện mục tiêu giáo dục là hình thành các phẩm chất và năng lực cho học sinh (HS) bao gồm nhiều nội dung, trong đó có giáo dục toán học. Toán học (TH) có vai trò quan trọng trong việc góp phần hình thành và phát triển cho HS toàn diện cả về phẩm chất và NL toán học với các thành tố: năng lực tư duy và lập luận toán học; năng lực mô hình hóa toán học; năng lực giải quyết vấn đề toán học (NLGQVĐTH); năng lực giao tiếp toán học; năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học toán (Bộ Giáo dục và Đào tạo, 2018b).

Trong các năng lực trên, NLGQVĐTH là một trong những NL thành tố của NL toán học, không chỉ giúp HS phát triển tư duy logic, sáng tạo mà còn giúp HS vận dụng kiến thức kiến thức TH trong giải quyết các vấn đề (GQVĐ) thực tiễn. Đây là nền tảng để HS đối mặt với thách thức trong học tập và cuộc sống. Ngoài ra, một mục tiêu quan trọng trong giáo dục hiện nay là vận dụng TH vào GQVĐ thực tiễn. Việc học toán không chỉ là tiếp thu lý thuyết mà còn là khả năng áp dụng kiến thức vào các tình huống cụ thể trong đời sống.

Bài viết đề xuất một số biện pháp góp phần phát triển NLGQVĐTH cho HS trong dạy học các bài toán thực tiễn chủ đề Hàm số lượng giác và phương trình lượng giác – Toán 11.

2. Phương pháp nghiên cứu

Nghiên cứu tài liệu lý luận dạy học môn toán; các tài liệu về giáo dục học môn toán, nội dung chủ đề Hàm số lượng giác và phương trình lượng giác; các sách báo, các bài viết về khoa học, các đề tài nghiên cứu khoa học có liên quan đến luận văn; để từ đó đề xuất các biện pháp.

3. Kết quả nghiên cứu

3.1. Năng lực giải quyết vấn đề toán học

Phan (2014), NLGQVĐTH của HS trong dạy học toán trung học phổ thông (THPT) được cấu thành bởi các thành tố sau: “*NL hiểu vấn đề, NL phát hiện và triển khai giải pháp GQVĐ, NL trình bày giải pháp GQVĐ, NL phát hiện giải pháp khác để GQVĐ và NL phát hiện vấn đề mới*”.

Võ & Tô (2023) cho rằng: “*NLGQVĐTH của HS trong môn toán là tổ hợp những thuộc tính tâm lý của người học giúp họ huy động kiến thức, kỹ năng, kinh nghiệm và các phẩm chất cá nhân để có thể giải quyết thành công những vấn đề TH nhất định trong những điều kiện cụ thể*”.

Theo Chương trình Giáo dục phổ thông 2018 (Bộ Giáo dục và Đào tạo, 2018b), NLGQVĐTH là một thành tố của NL TH, biểu hiện cụ thể của NLGQVĐTH và yêu cầu cần đạt cho cấp THPT được thể hiện như sau:

- Xác định được tình huống có vấn đề; thu thập, sắp xếp, giải thích và đánh giá được độ tin cậy của thông tin; chia sẻ sự am hiểu vấn đề với người khác.
- Lựa chọn và thiết lập được cách thức, quy trình giải quyết vấn đề.
- Thực hiện và trình bày được giải pháp giải quyết vấn đề.
- Đánh giá được giải pháp đã thực hiện; phản ánh được giá trị của giải pháp; khái quát hoá được cho vấn đề tương tự.

Dựa trên những nghiên cứu đã trình bày, chúng tôi quan niệm rằng: *NLGQVĐTH* là một thuộc tính quan trọng của cá nhân, thể hiện ở khả năng huy động và vận dụng hiệu quả kiến thức, kinh nghiệm, cũng như các kỹ năng *TH* đã được trang bị để phân tích, nhận diện và tìm ra giải pháp cho những vấn đề thực tiễn cụ thể. Quá trình này không chỉ đòi hỏi sự linh hoạt trong tư duy *TH* mà còn yêu cầu cá nhân biết lựa chọn và kết hợp các phương pháp phù hợp, đồng thời phát huy tính sáng tạo, tư duy logic và khả năng lập luận chặt chẽ để *GQVĐ* một cách tối ưu.

Ở Việt Nam, đã có nhiều nghiên cứu đề cập về *NLGQVĐTH*. Nguyễn (2021) đã đưa ra được 4 biện pháp nhằm phát triển *NLGQVĐTH* cho HS thông qua dạy học chương Vector trong không gian; Quan hệ vuông góc trong không gian. Nguyễn (2022) đã đề xuất 5 biện pháp nhằm phát triển *NLGQVĐTH* cho HS trong dạy học chủ đề hệ thức lượng trong tam giác Toán 10 - Kết nối tri thức với cuộc sống. Huỳnh (2022) đã đề xuất 5 biện pháp nhằm phát triển *NLGQVĐTH* cho HS thông qua dạy học giải bài tập chủ đề Tích phân - Giải tích 12, Nhìn chung, các nghiên cứu đều cho thấy việc phát triển *NLGQVĐTH* cho HS là một nhiệm vụ mang tính cấp thiết.

Việc áp dụng các biện pháp phát triển *NLGQVĐTH* trong dạy học các bài toán thực tiễn liên quan đến chủ đề Hàm số lượng giác và phương trình lượng giác và vận dụng thích hợp trong dạy học sẽ phát triển *NLGQVĐTH* cho HS lớp 11, đồng thời góp phần nâng cao chất lượng dạy và học môn Toán tại trường THPT.

3.2. Biểu hiện của năng lực giải quyết vấn đề toán học của học sinh trong dạy học các bài toán thực tiễn chủ đề Hàm số lượng giác và phương trình lượng giác

3.2.1. Nội dung chủ đề

Chủ đề Hàm số lượng giác và phương trình lượng giác đều được đề cập ở cả ba bộ sách: Chân trời sáng tạo (Trần & cs., 2023), Kết nối tri thức với cuộc sống (Hà & cs., 2023), Cánh diều (Đỗ & cs., 2023). Chủ đề này gồm các nội dung:

- Góc lượng giác. Số đo của góc lượng giác. Đường tròn lượng giác. Giá trị lượng giác của góc lượng giác, quan hệ giữa các giá trị lượng giác.
- Các phép biến đổi lượng giác (công thức cộng; công thức nhân đôi; công thức biến đổi tích thành tổng; công thức biến đổi tổng thành tích).
- Hàm số lượng giác và đồ thị.
- Phương trình lượng giác cơ bản.

Trong yêu cầu cần đạt của các nội dung trên trong Chương trình Giáo dục phổ thông 2018 môn Toán đều nêu rõ việc vận dụng Hàm số lượng giác và phương trình lượng giác vào giải quyết một số vấn đề thực tiễn. Do đó, bài viết này sẽ dựa trên các yêu cầu đó để phát triển *NLGQVĐTH* cho HS trong dạy học các bài toán thực tiễn chủ đề Hàm số lượng giác và phương trình lượng giác.

3.2.2. Một số biểu hiện của năng lực giải quyết vấn đề toán học của học sinh

Dựa trên nội dung và yêu cầu cần đạt trong dạy học chương Hàm số lượng giác và phương trình lượng giác (Toán 11), cũng như các biểu hiện, yêu cầu của *NLGQVĐTH* ở HS phổ thông, chúng tôi xác định các biểu hiện cụ thể của *NLGQVĐTH* của HS khi giải bài toán thực tiễn trong chủ đề Hàm số lượng giác và phương trình lượng giác, cụ thể như sau:

a. Học sinh xác định được tình huống có vấn đề; thu thập, sắp xếp, giải thích và đánh giá được độ tin cậy của thông tin; chia sẻ sự am hiểu vấn đề với người khác

HS nhận diện và phát hiện vấn đề cần giải quyết trong bài toán thực tiễn, qua đó tiến hành thu thập thông tin và dữ liệu liên quan đến bài toán. Sau khi thu thập, HS sẽ sắp xếp, giải thích các dữ liệu có trong bài toán và đánh giá độ tin cậy của thông tin đó. Cùng với việc này, HS cũng cần chia sẻ sự am hiểu về vấn đề cho người khác trong bài toán thực tiễn có liên quan đến nội dung chương Hàm số lượng giác và phương trình lượng giác. Nhận thức và phát hiện vấn đề là bước cơ bản và quan trọng, giúp học sinh chuẩn bị tốt nhất cho quá trình giải quyết bài toán.

b. Lựa chọn và thiết lập được cách thức, quy trình giải quyết vấn đề

Sau khi nhận thức được vấn đề cần giải quyết, HS cần lựa chọn các kiến thức TH phù hợp để áp dụng vào bài toán thực tiễn. HS sẽ kết hợp kiến thức TH với kiến thức thực tiễn để thiết lập mô hình TH phù hợp, từ đó xây dựng quy trình giải quyết bài toán.

c. Học sinh thực hiện và trình bày được giải pháp giải quyết vấn đề

Dựa trên mô hình TH đã được thiết lập, HS sử dụng kỹ năng tính toán, các thuật toán và công cụ TH để thực hiện trình bày lời giải cho bài toán một cách logic, giúp người đọc có thể hình dung được rõ ràng cách thức GQVĐ và thu được kết quả của bài toán một cách chính xác. Các biểu hiện trên có mối quan hệ chặt chẽ với nhau, gắn liền với hoạt động học tập của HS trong học tập và vận dụng kiến thức chủ đề.

d. Đánh giá được giải pháp đã thực hiện; phản ánh được giá trị của giải pháp; khái quát hoá được cho vấn đề tương tự

Sau khi giải quyết bài toán, việc đánh giá giải pháp đã thực hiện rất quan trọng, giúp HS tìm ra giải pháp tối ưu cho các bài toán tương tự. Giáo viên (GV) có thể yêu cầu HS khái quát lại phương pháp giải và giải quyết các bài toán thực tiễn tương tự, qua đó đánh giá NLGQVĐTH của HS và điều chỉnh dạy học sao cho phù hợp.

Trên cơ sở khoa học trên, chúng tôi đề xuất một số biện pháp phát triển NLGQVĐTH của học sinh.

3.3. Một số biện pháp phát triển năng lực giải quyết vấn đề toán học cho học sinh trong dạy học các bài toán thực tiễn chủ đề Hàm số lượng giác và phương trình lượng giác

Trên cơ sở các biểu hiện của NLGQVĐTH của HS trong học tập chủ đề; trên cơ sở cách thức phát triển năng lực, NLGQVĐTH được đề cập của các tác giả Lê & Nguyễn (2020), chúng tôi đề xuất một số biện pháp phát triển NLGQVĐTH cho HS trong dạy học các bài toán thực tiễn chủ đề Hàm số lượng giác và phương trình lượng giác.

3.3.1. Biện pháp 1: Tăng cường sử dụng các bài toán thực tiễn để gợi động cơ trong các khâu của quá trình dạy học chủ đề Hàm số lượng giác và phương trình lượng giác

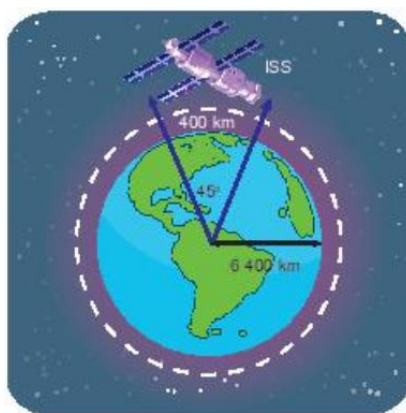
Mục đích của biện pháp: Giúp HS ứng dụng toán học vào thực tiễn, khơi dậy hứng thú và động cơ học tập. Việc sử dụng bài toán thực tiễn giúp HS phát triển khả năng GQVĐ và tư duy logic. Đồng thời, nó kết nối lý thuyết với thực tế, nâng cao chất lượng dạy và học. Biện pháp này tác động đến các biểu hiện 3.2.2.a và 3.2.2.c.

Cách thức thực hiện: Lựa chọn hoặc thiết kế các bài toán thực tiễn phù hợp; Lồng ghép bài toán vào các khâu dạy học.

a. Khâu khơi động: Nhằm rèn luyện cho HS biểu hiện “Xác định được tình huống có vấn đề; thu thập, sắp xếp, giải thích và đánh giá được độ tin cậy của thông tin; chia sẻ sự am hiểu vấn đề với người khác”.

Bắt đầu bài học bằng một bài toán thực tiễn giúp kích thích sự tò mò và tạo ra những câu hỏi cho HS. Đây là một hoạt động quan trọng vì nó không chỉ giúp định hướng mục tiêu học tập của tiết học mà còn có thể là mục tiêu của cả chủ đề. Mở đầu bài học có thể thực hiện theo nhiều cách khác nhau, tùy thuộc vào sự lựa chọn của GV. Tuy nhiên, nếu khởi động bằng một bài toán thực tiễn, ngoài việc thể hiện ý nghĩa và tác dụng của bài toán, nó còn có khả năng thu hút sự chú ý và tập trung của HS, tạo nên một khởi đầu mạnh mẽ, đồng thời xây dựng nền tảng vững chắc cho quá trình học tập sau này. Qua đó, vấn đề cần giải quyết cũng được đặt ra một cách rõ ràng.

Ví dụ 1. (*Tình huống mở đầu – Sách giáo khoa Kết nối tri thức với cuộc sống, Toán 11, tập 1, trang 5*) Trạm vũ trụ Quốc tế ISS (tên Tiếng Anh: International Space Station) nằm trong quỹ đạo tròn cách bề mặt Trái Đất khoảng 400 km (Hình 1). Nếu trạm mặt đất theo dõi được trạm vũ trụ ISS khi nó nằm trong góc 45° ở tâm của quỹ đạo tròn này phía trên ăng-ten theo dõi, thì trạm vũ trụ ISS đã di chuyển được bao nhiêu kilômét trong khi nó đang được trạm mặt đất theo dõi? Giả sử rằng bán kính của Trái Đất là 6 400 km. Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị.



Hình 1. Minh họa góc quan sát ISS từ mặt đất

Tác động của GV khi đưa ra ví dụ trên ở khâu khởi động trong dạy bài học giá trị lượng giác của góc lượng giác:

- GV đưa ra bài toán thực tiễn liên quan đến Trạm vũ trụ ISS và quỹ đạo của Trái Đất. Đây là một tình huống mở đầu hấp dẫn, kích thích sự tò mò của HS về một vấn đề thực tế trong không gian.

- GV đóng vai trò như người dẫn dắt, tạo sự kết nối giữa bài toán và các khái niệm lý thuyết mà HS cần áp dụng trong bài học. GV cũng giúp HS hiểu rõ bối cảnh của bài toán, đồng thời tạo cơ hội để HS suy nghĩ về cách thức GQVĐ.

Hoạt động của HS:

- HS sẽ làm quen với cách áp dụng các khái niệm TH vào các bài toán thực tiễn, qua đó phát triển NL GQVĐ. HS sẽ được thử thách trong việc tính toán quỹ đạo và khoảng cách mà trạm vũ trụ di chuyển.

- Trong quá trình giải quyết bài toán, HS cần phân tích, nhận diện các yếu tố liên quan và vận dụng kiến thức về góc, bán kính, quỹ đạo vào bài toán. HS cũng sẽ phát triển kỹ năng tính toán chính xác và làm tròn kết quả đến đơn vị phù hợp.

Nhờ vậy, khâu khởi động giúp HS không chỉ tiếp thu kiến thức lý thuyết mà còn phát triển kỹ năng GQVĐ, làm tăng sự chủ động trong học tập và khả năng vận dụng kiến thức vào

thực tế.

b. Khâu vận dụng: Nhằm rèn luyện cho HS biểu hiện “Thực hiện và trình bày được giải pháp GQVĐ”.

Khâu này giúp HS áp dụng những kiến thức đã học vào các bài toán phức tạp hơn, đòi hỏi khả năng tổng hợp, sáng tạo và phát triển tư duy GQVĐ. Đây là bước quan trọng trong việc nâng cao NLGQVĐTH của HS, giúp các em mở rộng phạm vi kiến thức và cải thiện khả năng tư duy logic.

Ví dụ 2. (Vận dụng 2 - Sách giáo khoa Kết nối tri thức với cuộc sống, Toán 11, tập 1, trang 20) Khi nhấn một phím trên điện thoại cảm ứng, bàn phím sẽ tạo ra hai âm thuần, kết hợp với nhau để tạo ra âm thanh nhận dạng duy nhất phím. Hình 2 cho thấy tần số thấp f_1 và tần số cao f_2 liên quan đến mỗi phím. Nhấn một phím sẽ tạo ra sóng âm $y = \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t)$, ở đó t là biến thời gian (tính bằng giây).



Hình 2. Tần số âm thanh của các phím điện thoại

- Tìm hàm số mô hình hoá âm thanh được tạo ra khi nhấn phím 4.
- Biến đổi công thức vừa tìm được ở câu a) về dạng tích của một hàm số sin và một hàm số cosin.

GV: Bài toán yêu cầu tìm hàm sóng mô hình hóa âm thanh được tạo ra khi nhấn phím trên bàn phím điện thoại. Hàm sóng âm thanh y có dạng nào?

HS: Hàm sóng âm thanh có dạng $y = \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t)$, trong đó f_1, f_2 là tần số tương ứng với tần số thấp và tần số cao cho từng phím, t là biến thời gian.

GV: Dựa trên số liệu thể hiện trên Hình 2, tìm hàm số mô hình hoá âm thanh được tạo ra khi nhấn phím 4?

HS: Trong Hình 2, tần số thấp của phím 4 là 770 Hz và tần số cao là 1209 Hz. Từ đó, hàm số mô hình hoá sẽ có dạng: $y = \sin(2\pi \cdot 770t) + \sin(2\pi \cdot 1029t)$.

GV: Như vậy, hàm số mô hình hoá âm thanh khi nhấn phím 4 đã được xác định. Làm sao để biến đổi công thức vừa tìm được ở câu a) thành một dạng tích của một hàm số sin và một hàm số cosin?

HS: Để biến đổi công thức này, ta có thể sử dụng công thức tổng của hai sin:

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \quad (1)$$

Áp dụng công thức (1) vào hàm sóng, ta sẽ có:

$$y = 2 \sin \left(2\pi \cdot \frac{1029 + 770}{2} t \right) \cdot \cos \left(2\pi \cdot \frac{1029 - 770}{2} t \right).$$

GV: Như vậy, chúng ta đã biến đổi công thức hàm sóng thành dạng tích của hai hàm số. Điều này có ý nghĩa gì trong thực tiễn?

HS: Dạng tích này có thể giúp chúng ta dễ dàng mô phỏng và xử lý âm thanh trong các ứng dụng thực tế như trong các hệ thống điện thoại hay các thiết bị âm thanh, nơi các tần số âm thanh cần được phân tách và xử lý riêng biệt.

GV: Cách biểu diễn này không chỉ có ý nghĩa trong việc tính toán mà còn rất hữu ích trong các ứng dụng thực tế như điện thoại di động và hệ thống âm thanh. Các em có thể thử áp dụng các công thức này vào các bài toán thực tế khác để thấy được sự linh hoạt của TH trong việc giải quyết các vấn đề đời sống.

3.3.2. Biện pháp 2: Hướng dẫn học sinh giải các bài toán thực tiễn liên quan đến kiến thức chủ đề Hàm số lượng giác và phương trình lượng giác theo hướng phát hiện và giải quyết vấn đề

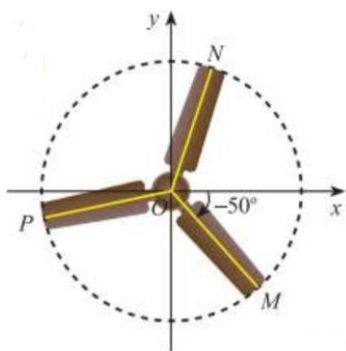
Mục đích của biện pháp: Giúp HS giải các bài toán thực tiễn theo hướng phát hiện và GQVĐ. Qua đó, các em biết lựa chọn phương pháp phù hợp, trình bày giải pháp rõ ràng và đánh giá được kết quả. Biện pháp này tác động đến các biểu hiện 3.2.2.a, 3.2.2.b, 3.2.2.c và 3.2.2.d.

Cách thức thực hiện:

Bước 1: Tìm hiểu bài toán

Ở bước này, GV tổ chức cho HS phát hiện và phát biểu được vấn đề cần giải quyết trong bài toán, nhằm rèn luyện cho HS biểu hiện “Xác định được tình huống có vấn đề; thu thập, sắp xếp, giải thích và đánh giá được độ tin cậy của thông tin; chia sẻ sự am hiểu vấn đề với người khác”.

Ví dụ 3. (Vận dụng 2 – Sách giáo khoa Chân trời sáng tạo, Toán 11, tập 1, trang 9) Trong Hình 3, chiếc quạt có ba cánh được phân bố đều nhau. Viết công thức tổng quát số đo của góc lượng giác (Ox, OM) , (Ox, ON) và (Ox, OP) .



Hình 3. Các góc lượng giác tạo bởi ba cánh quạt đối xứng

GV: Cái gì chưa biết trong bài toán trên?

Tổ chức cho HS nhận diện vấn đề rõ ràng, giúp HS tập trung vào việc tìm hiểu đề bài và xác định các yếu tố quan trọng cần giải quyết.

HS: Lắng nghe và trả lời các câu hỏi của GV, từ đó xác định được các phần chưa biết

trong bài toán.

GV: Giả thiết nào được cho trước trong bài toán? GV gợi ý HS tổng hợp các giả thiết, dữ kiện bài toán.

HS: Phát biểu lại các giả thiết có trong bài, như quạt có ba cánh phân bố đều, góc giữa các tia bằng 120° .

GV: Cần GQVĐ gì trong bài toán? GV hướng dẫn HS viết công thức tổng quát cho các góc lượng giác liên quan.

HS: Nhận diện được vấn đề cần giải quyết, đó là viết công thức tổng quát cho các góc lượng giác (Ox, OM) , (Ox, ON) và (Ox, OP) .

HS sử dụng thông tin bài toán để chia sẻ hiểu biết và xây dựng công thức cần thiết.

Đánh giá: Qua bước này, HS được rèn luyện khả năng:

- Xác định rõ tình huống có vấn đề cần giải quyết.
- Thu thập và hệ thống hóa thông tin bài toán.
- Giải thích và đánh giá tính hợp lý của các giả thiết.
- Thể hiện khả năng trình bày, chia sẻ ý tưởng với bạn bè và GV.

Bước 2: Tìm phương pháp giải bài toán

GV tập cho HS phân tích bài toán để từ đó đề xuất, lựa chọn cách thức GQVĐ một cách hiệu quả, nhằm rèn luyện cho HS biểu hiện “lựa chọn và thiết lập được cách thức, quy trình GQVĐ”.

Trở lại Ví dụ 3:

GV: Tập trung cho HS phân tích bài toán, từ đó lựa chọn cách thức, công thức tổng quát để GQVĐ.

HS: Tích cực phân tích bài toán dưới sự hướng dẫn của GV để hiểu rõ phương pháp cần áp dụng.

- Công thức tổng quát cho góc lượng giác $(Ou, Ov) = \alpha^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$. (2)

- Hệ thức Chasles: Với ba tia Ou, Ov, Ow bất kì ta có:

$$(Ou, Ov) + (Ov, Ow) = (Ou, Ow) + k360^\circ, (k \in \mathbb{Z}). \quad (3)$$

HS vận dụng lý thuyết về phân bố đều của ba tia trên vòng tròn để xác định góc giữa các tia liên tiếp là 120° .

GV: Hỗ trợ HS nhận thức cách lựa chọn phương pháp TH phù hợp dựa trên giả thiết bài toán.

HS: Bắt đầu xây dựng kế hoạch và quy trình giải bài toán dựa trên các công thức và hệ thức đã học.

Áp dụng vào bài toán: Với ba tia phân bố đều theo một vòng tròn, góc giữa hai tia liên tiếp sẽ luôn là 120° . Áp dụng công thức tính góc giữa các tia để tìm ra các công thức tổng quát của góc lượng giác cụ thể trong bài toán yêu cầu.

Qua bước này, giúp HS:

- Lựa chọn công thức và phương pháp giải toán phù hợp.
- Thiết lập quy trình giải bài toán một cách logic và hệ thống.
- Hiểu được sự liên hệ giữa các kiến thức lý thuyết và bài toán thực tế.

Bước 3: Trình bày lời giải

GV tổ chức cho HS huy động kiến thức để GQVĐ và HS trình bày bài toán có lập luận, có căn cứ, nhằm rèn luyện cho HS biểu hiện “Thực hiện và trình bày được giải pháp GQVĐ”.

Để trình bày lời giải cho Ví dụ 3, sau khi phân tích bài toán, GV tổ chức cho HS khai thác các đặc điểm, giả thiết của bài toán để tìm ra lời giải tối ưu, HS huy động kiến thức bằng cách đặt ra hệ thống những câu hỏi liên quan và tự trả lời những câu hỏi này. Sau đó trình bày lời giải một cách rõ ràng, đầy đủ, lập luận có căn cứ và chính xác.

Kiến thức được huy động bao gồm: công thức (2) và công thức (3).

Chiếc quạt có ba cánh được phân bố đều nhau nên $MON = NOP = POM = 120^\circ$.

$$+ (Ox, OM) = -50^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}.$$

+ Với ba tia OM, Ox và ON , theo Hệ thức Chasles ta có:

$$(Ox, OM) + (OM, ON) = (Ox, ON) + k_1 360^\circ, \text{ với } k_1 \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow (Ox, ON) = (Ox, OM) + (OM, ON) - k_1 360^\circ$$

$$= -50^\circ + 120^\circ - k_1 360^\circ = 70^\circ - k_1 360^\circ.$$

+ Tương tự, với ba tia Ox, ON, OP , ta có:

$$(Ox, ON) + (ON, OP) = (Ox, OP) + k_2 360^\circ, \text{ với } k_2 \in \mathbb{Z}$$

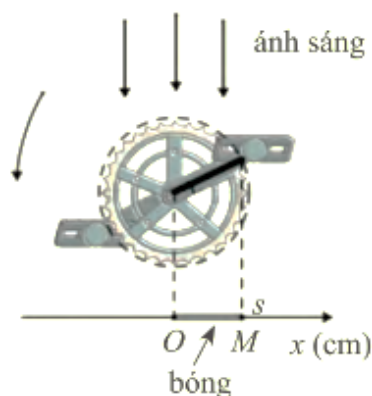
$$\Rightarrow (Ox, OP) = (Ox, ON) + (ON, OP) - k_2 360^\circ$$

$$= 70^\circ - k_1 360^\circ + 120^\circ - k_2 360^\circ = 190^\circ - k.360^\circ, \text{ với } k = k_1 + k_2.$$

Bước 4: Nghiên cứu sâu lời giải

GV tập cho HS đánh giá được quá trình thực hiện lời giải, thấy được ứng dụng thực tế của bài toán và khái quát hóa mở rộng bài toán, nhằm rèn luyện cho HS biểu hiện “Đánh giá được giải pháp đã thực hiện; phản ánh được giá trị của giải pháp; khái quát hoá được cho vấn đề tương tự”. Ở bước này, chúng tôi cho học sinh đánh giá bài làm của mình, qua đánh giá sẽ giúp HS thấy được khả năng thực hiện lời giải bài toán của bản thân đang ở mức nào cần điều chỉnh chỗ nào, bổ sung thêm những gì hay lược bớt đi những cái không cần thiết nhằm tiến tới lựa chọn được cách giải tối ưu.

Ví dụ 4. (Hoạt động khởi động, vận dụng – Sách giáo khoa Chân trời sáng tạo, Toán 11, tập 1, trang 34) Trong Hình 4, khi bàn đạp xe đạp quay, bóng M của đầu trục quay dao động trên mặt đất quanh điểm O theo phương trình $x = 17 \cos 5\pi t$ với x (cm) là toạ độ của điểm M trên trục Ox và t (giây) là thời gian bàn đạp quay. Xác định các thời điểm mà tại đó độ dài bóng OM bằng 10 cm (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).



Hình 4. Chuyển động của bàn đạp xe đạp quanh điểm cố định

HS dựa vào thang đánh giá ở **Bảng 1** để đánh giá bài giải của mình theo các ý sau:

Bảng 1. Thang đánh giá NLGQVĐTH của HS trong dạy học các bài toán thực tiễn

Tiêu chí đánh giá	Nội dung đánh giá	Đánh giá
		Mức độ 1 Không làm được ý nào hoặc làm sai
		Mức độ 2 HS biến đổi chỉ ra được trường hợp 1 và giải nó.
		Mức độ 3 Giải quyết được hoàn toàn vấn đề của bài toán một cách chính xác.
Thực hiện lời giải	Để xác định được các thời điểm mà tại đó độ dài bóng OM bằng 10 cm thì $x =10$. $ x =10 \Leftrightarrow 17\cos 5\pi t =10$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 17\cos 5\pi t=10 \\ 17\cos 5\pi t=-10 \end{cases}$ Trường hợp 1: $17\cos 5\pi t=10$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 5\pi t=0,94+k2\pi \\ 5\pi t=-0,94+k2\pi \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} t=0,06+0,4k \\ t=-0,06+0,4k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$ Trường hợp 2: $17\cos 5\pi t=-10$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 5\pi t=2,2+k2\pi \\ 5\pi t=-2,2+k2\pi \end{cases}$	

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 0,14 + 0,4k \\ t = -0,14 + 0,4k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Nếu HS đạt mức 1 nghĩa là các em không trình bày được lời giải hoặc giải sai hoàn toàn. Em cần thay đổi ý thức học tập, học kỹ lại lý thuyết giải phương trình lượng giác.

Nếu HS đạt mức 2, các em chỉ biến đổi được $OM = 10 \Leftrightarrow x = 10$, sau đó đi giải phương trình $17 \cos 5\pi t = 10$.

Nếu HS đạt mức 3, các em có khả năng huy động kiến thức, kỹ năng để giải quyết bài toán.

Khi thực hiện giải pháp GQVĐ, HS thường xuyên kiểm tra từng phép biến đổi, xem lại kết quả, chỉ chấp nhận những điều rõ ràng đúng đắn. Từ đó HS biết giải pháp GQVĐ đã đúng chưa? Tối ưu chưa? Và có thể tìm được giải pháp khác tốt hơn không?

GV cho HS biết ứng dụng thực tế của bài toán

- Ứng dụng trong đời sống và kỹ thuật:

Kỹ thuật chế tạo xe đạp, máy móc quay: Mô hình hóa chuyển động của điểm trên vòng tròn giúp phân tích dao động, vận tốc, năng lượng,

Hình học bóng đổ (Shadow geometry): Dùng trong thiết kế chiếu sáng sân khấu, nghệ thuật sắp đặt, game 3D hoặc mô phỏng vật lý ánh sáng.

Thiết kế robot, quạt gió: Xác định vị trí điểm cụ thể trên cánh quay tại những thời điểm cụ thể để điều khiển hoặc điều chỉnh.

- Ứng dụng trong dạy học:

Liên kết giữa hình học và lượng giác: HS vận dụng phương trình lượng giác để giải bài toán động học.

Thực hành mô hình hóa TH: Từ tình huống vật lý $\rightarrow$ xây dựng phương trình $\rightarrow$ giải phương trình $\rightarrow$ diễn giải kết quả thực tế.

Khái quát hóa và mở rộng bài toán:

- Mở rộng về hình học: Thay vì ánh sáng chiếu thẳng đứng từ trên xuống như hình, có thể:

Chiếu chéo góc $\rightarrow$ mô hình hóa theo đường xiên $\rightarrow$ dẫn đến phương trình bóng phức tạp hơn.

Bóng trên mặt phẳng nghiêng $\rightarrow$ cần kiến thức hình học không gian và phép chiếu.

- Mở rộng về dao động: Thay vì chuyển động tròn đều, ta có thể xét dao động điều hòa, dùng $\cos(\omega t + \varphi)$ hoặc $\sin(\omega t + \varphi)$.

- Mở rộng bài toán lượng giác: Thay đổi điều kiện bài toán, cho độ dài bóng OM bằng một giá trị bất kỳ a và tìm t .

- Chuyển sang bài toán ngược: cho biết thời điểm t , yêu cầu xác định vị trí bóng.

3.3.3. Biện pháp 3: Tạo cơ hội cho học sinh phát hiện và sửa chữa sai lầm trong giải các bài toán thực tiễn chủ đề Hàm số lượng giác và phương trình lượng giác

Mục đích của biện pháp: Giúp HS phát hiện và sửa chữa sai lầm khi giải bài toán thực

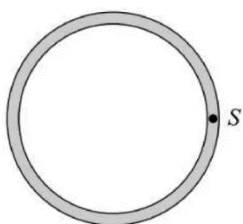
tiền, qua đó rèn kỹ năng tư duy phân biện và tự điều chỉnh cách giải. Đồng thời, HS củng cố kiến thức và nâng cao sự tự tin, cẩn thận khi làm bài. Biện pháp góp phần phát triển NLGQVĐTH một cách hiệu quả.

Cách thức thực hiện: Trong quá trình dạy học giải các bài toán thực tiễn, GV sẽ lồng ghép các bài toán thiết kế theo hai cách:

Một là, GV yêu cầu HS phát hiện sai lầm trong các giải pháp mà các em đã thực hiện để GQVĐ TH.

Hai là, GV đưa ra lời giải bài toán có chứa sai lầm, bài toán này bao hàm vấn đề yêu cầu HS phát hiện sai lầm và sửa chữa.

Ví dụ 5. Một vận động viên chạy bộ trên một đường chạy tròn như Hình 5. Người đó bắt đầu tại điểm S và chạy theo chiều ngược chiều kim đồng hồ với vận tốc không đổi. Biết rằng cứ 30 phút người đó sẽ hoàn thành đúng một vòng chạy.



Hình 5. Mô hình chuyển động tròn của vận động viên chạy bộ

a) Trong 1 phút chạy bộ, người đó vạch nên một góc lượng giác có số đo là bao nhiêu radian?

b) Nếu người đó xuất phát từ S và chạy theo chiều cùng chiều kim đồng hồ, thì trong 72 phút chạy bộ, người đó sẽ vạch nên một cung lượng giác có số đo là bao nhiêu radian?

Lời giải đúng

a) Vì người đó chạy đúng một vòng mất 30 phút ứng với 360° , nên cứ sau 1 phút chạy bộ người đó sẽ vạch nên một cung lượng giác có số đo là $\frac{360^\circ}{60} = 6^\circ = \frac{\pi}{30}$.

b) Nếu người đó chạy theo chiều cùng chiều kim đồng hồ thì góc lượng giác được người đó vạch nên sẽ mang giá trị âm, nghĩa là trong 1 phút chạy bộ người đó sẽ vạch nên một góc lượng giác có số đo là $-\frac{\pi}{30}$.

Vậy trong 72 phút chạy theo chiều cùng chiều kim đồng hồ thì người đó vạch nên một cung lượng giác có số đo là $-72 \cdot \frac{\pi}{30} = -\frac{12\pi}{5}$.

Trong lời giải của bài toán, HS có thể gặp một số sai lầm phổ biến ở những điểm sau:

Câu a)

Phân tích sai lầm: HS có thể tính góc quay trong 1 phút mà không chú ý đến đơn vị góc (radian) hoặc HS có thể nhầm lẫn trong quá trình chuyển đổi. Nếu HS chưa chuyển đổi độ sang radian, sẽ dẫn đến sai số trong kết quả.

Sửa chữa sai lầm: GV cần nhắc nhở HS rằng trong TH, các góc cần phải được tính bằng đơn vị radian khi làm các bài toán liên quan đến vận động trên đường tròn. Hướng dẫn HS

chuyển từ độ sang radian bằng công thức: $\alpha^\circ = \alpha \cdot \frac{\pi}{180}$ (Rad).

Câu b)

Phân tích sai lầm: Một sai lầm phổ biến ở đây có thể là HS không kiểm tra đơn vị của thời gian khi áp dụng công thức, hoặc không tính toán đúng góc trong thời gian 72 phút.

Sửa chữa sai lầm: GV cần nhắc nhở HS kiểm tra kỹ đơn vị của thời gian và tốc độ, để đảm bảo kết quả tính ra là chính xác. GV có thể giải thích lại bước chuyển đổi thời gian từ phút sang góc radian:

$$\begin{aligned} \text{Góc quay bằng } \frac{-72.360}{60} &= 432^\circ, \text{ sau đó chuyển góc này sang radian} \\ -432^\circ &= -432 \cdot \frac{\pi}{180} = -2,4\pi. \end{aligned}$$

Sau khi phân tích và sửa chữa những sai lầm có thể mắc phải trong khi giải bài toán trên, GV cần hướng dẫn cho HS:

- Nhắc nhở về đơn vị góc: Khi giải bài toán liên quan đến vận động trên đường tròn, cần chú ý chuyển đổi giữa độ và radian, và áp dụng công thức đúng.

- Kiểm tra tỷ lệ và công thức: GV cần giải thích cho HS về cách tính góc quay trong một khoảng thời gian cụ thể, nhấn mạnh rằng tỷ lệ giữa thời gian và góc quay phải được tính toán chính xác.

- Kiểm tra đơn vị thời gian: HS cần kiểm tra đơn vị thời gian khi áp dụng vào bài toán, từ đó đưa ra kết quả chính xác.

Các biện pháp trên đã được vận dụng trong thực nghiệm dạy học “Ôn tập chương 1-Toán 11” (Bộ sách Kết nối tri thức với cuộc sống) tại trường THPT Kiên Lương, Kiên Giang. Kết quả cho thấy HS lớp thực nghiệm tiến bộ rõ rệt trong tư duy, sáng tạo và khả năng áp dụng thực tiễn, khẳng định hiệu quả vượt trội của phương pháp dạy học gắn với thực tiễn. Các biện pháp đề xuất không chỉ khả thi mà còn mang lại giá trị cao trong việc phát triển NLGQVĐTH cho HS lớp 11, góp phần đáp ứng mục tiêu phát triển phẩm chất, năng lực HS của Chương trình Giáo dục phổ thông 2018.

4. Kết luận

Phát triển NLGQVĐTH cho HS trong dạy học các bài toán thực tiễn chủ đề Hàm số lượng giác và phương trình lượng giác sẽ góp phần phát triển NLGQVĐTH cho HS trong việc thực hiện đổi mới dạy học toán theo hướng tiếp cận năng lực. Có nhiều cách tiếp cận trong dạy học phát triển năng lực, các biện pháp nêu trên nếu được thực hiện một cách linh hoạt trong dạy học chủ đề sẽ có hiệu quả trong phát triển NLGQVĐTH cho HS.

Tài liệu tham khảo

Bộ Giáo dục và Đào tạo (2018a). *Chương trình giáo dục phổ thông - Chương trình tổng thể* (ban hành kèm theo Thông tư số 32/2018/TT-Bộ GDĐT ngày 26/12/2018 của Bộ trưởng Bộ GDĐT).

Bộ Giáo dục và Đào tạo (2018b). *Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán* (ban hành kèm theo Thông tư số 32/2018/TT-BGDĐT ngày 26/12/2018 của Bộ trưởng Bộ GDĐT).

Đỗ, Đ. T., Phạm, X. C., Nguyễn, S. H., Nguyễn, T. P. L., Phạm, S. N., & Phạm, M. P., (2023). *Sách giáo khoa Toán 11 (Tập 1) – Bộ sách Cánh diều*. Công ty cổ phần đầu tư xuất bản

– Giáo dục Việt Nam.

- Hà, H. K., Cung, T. A., Trần, V. T., Đặng, H. T., Trần, M. C., Lê, V. C., Nguyễn, Đ. Đ., Lê, V. H., Phan, T. H., Trần, Đ. K., Phạm, A. M., & Nguyễn, T. K. S. (2023). *Sách giáo khoa Toán 11 (Tập 1) – Bộ sách Kết nối tri thức với cuộc sống*. Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam.
- Huỳnh, T. K. (2022). *Phát triển năng lực giải quyết vấn đề toán học cho học sinh thông qua dạy học giải bài tập chủ đề Tích phân - Giải tích 12*. Trường Đại học Đồng Tháp, Việt Nam.
- Lê, N. S., & Nguyễn, D. H. (2020). *Một số vấn đề về lí luận và thực hành dạy học môn Toán*. Hà Nội: NXB Giáo dục Việt Nam.
- Nguyễn, M. P. (2021). *Phát triển năng lực giải quyết vấn đề toán học cho học sinh thông qua dạy học chương Vector trong không gian; Quan hệ vuông góc trong không gian – Hình học 11*. Trường Đại học Đồng Tháp, Việt Nam.
- Nguyễn, T. T. (2022). *Phát triển năng lực giải quyết vấn đề toán học cho học sinh trong dạy học chủ đề hệ thức lượng trong tam giác Toán 10 – Kết nối tri thức với cuộc sống*. Trường Đại học Đồng Tháp, Việt Nam.
- Phan, A. T. (2014). *Đánh giá năng lực giải quyết vấn đề của học sinh trong dạy học Toán lớp 11 Trung học Phổ thông*. Trường Đại học Vinh, Việt Nam.
- Trần, N. D., Trần, Đ. H., Nguyễn, T. A., Nguyễn, C., Ngô, H. L., Phạm, H. Q., & Phạm, T. T. (2023). *Sách giáo khoa Toán 11 (Tập 1) – Bộ sách Chân trời sáng tạo*. Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam.
- Võ, X. M., & Tô, Q. L. (2023). Phát triển năng lực giải quyết vấn đề toán học cho học sinh lớp 10 qua dạy học giải bài tập phương trình quy về phương trình bậc hai. *Tạp chí Khoa học Đại học Đồng Tháp*, 12, 3-11. <https://doi.org/10.52714/dthu.12.6.2023.1110>