



DOI: <https://doi.org/10.52714/dthu.14.04S.2025.1587>

ĐẠO HÀM TIỆM CẬN CẤP HAI TỔNG QUÁT VÀ ỨNG DỤNG TRONG BÀI TOÁN TỐI ƯU VECTƠ VỚI THAM SỐ

Phạm Thanh Hùng^{1*}, Nguyễn Thanh Sang² và Huỳnh Hồng Phúc³

Khoa Sư phạm và Xã hội Nhân văn, Trường Đại học Kiên Giang, Việt Nam

**Tác giả liên hệ, Email: pthung@vnkgu.edu.vn*

Lịch sử bài báo

Ngày nhận: 02/6/2025; Ngày nhận chỉnh sửa: 22/7/2025; Ngày duyệt đăng: 27/7/2025

Tóm tắt

Bài báo này nghiên cứu các công thức tính toán cho đạo hàm tiệm cận cấp hai tổng quát của ánh xạ nghiệm hữu hiệu và ánh xạ nhiều của bài toán tối ưu vectơ phụ thuộc tham số. Dưới những điều kiện tự nhiên, chúng tôi nhận được các công thức tính toán cho đạo hàm tiệm cận cấp hai tổng quát của ánh xạ nghiệm hữu hiệu và ánh xạ nhiều của bài toán tối ưu vectơ phụ thuộc tham số.

Từ khóa: *Bài toán tối ưu vectơ phụ thuộc tham số, đạo hàm tiệm cận cấp hai tổng quát, ánh xạ nhiều và ánh xạ nghiệm hữu hiệu, độ nhạy.*

Trích dẫn: Phạm, T. H., Nguyễn, T. S., & Huỳnh, H. P. (2025). Đạo hàm tiệm cận cấp hai tổng quát và ứng dụng trong bài toán tối ưu vectơ với tham số. *Tạp chí Khoa học Đại học Đồng Tháp*, 14(04S), 283-296. <https://doi.org/10.52714/dthu.14.04S.2025.1587>

Copyright © 2025 The author(s). This work is licensed under a CC BY-NC 4.0 License.

ON GENERALIZED SECOND – ORDER ASYMPTOTIC DERIVATIVES AND APPLICATION IN PARAMETRIC VECTOR OPTIMIZATION PROBLEMS

Pham Thanh Hung^{1*}, Nguyen Thanh Sang², and Huynh Hong Phuc

*Faculty of Pedagogy and Faculty of Social Sciences & Humanities,
Kien Giang University, Vietnam*

**Corresponding author, Email: pthung@vnkgu.edu.vn*

Article history

Received: 02/6/2025; Received in revised form: 22/7/2025; Accepted: 27/7/2025

Abstract

This paper deals with generalized second-order asymptotic derivatives of frontier and solution maps in parametric vector optimization problems. Under some mild conditions, some formulas are obtained for computing generalized second-order asymptotic derivatives of frontier and solution maps, respectively.

Keywords: *Frontier and solution maps, generalized second-order asymptotic derivatives, parametric vector optimization, sensitivity analysis.*

1. Giới thiệu

Tối ưu vectơ ra đời vào cuối thế kỷ 19 là một lĩnh vực được quan tâm nghiên cứu bởi nhiều nhà Toán học trong và ngoài nước (xem Bonnans và Shapiro (2000); Brecker và Kassay (1997); Khan và *cs.* (2015); Sawaragi và *cs.* (1985); Sun và Li (2014); Tung (2017b) và danh mục các tài liệu trích dẫn trong đó). Đạo hàm và đối đạo hàm là một trong những công cụ hiệu quả để nghiên cứu bài toán tối ưu vectơ không trơn (xem Aubin và Frankowska (1990); Durea, M. (2004); Khan và *cs.* (2015); Mordukhovich (2006)). Phân tích độ nhạy nghiệm của bài toán tối ưu vectơ có nghĩa là tính toán đạo hàm hoặc đối đạo hàm của ánh xạ nghiệm hữu hiệu hoặc hàm giá trị tối ưu của bài toán phụ thuộc tham số. Các nghiên cứu về độ nhạy nghiệm ở dạng cấp 1 đã được nghiên cứu từ những năm 1980 (xem Chuong và Yao (2010); Chuong (2013); Kuk và *cs.* (1996a, 1996b); Shi (1991, 1993); Tanino (1988a, 1988b)). Trong những năm gần đây các nhà Toán học quan tâm nhiều hơn đến việc nghiên cứu độ nhạy nghiệm ở dạng cấp 2 của bài toán tối ưu vectơ (xem Li và Zhai (2012); Sun (2014)). Các dạng đạo hàm của ánh xạ đa trị dễ dàng mở rộng từ cấp 1 sang cấp 2 hơn đối đạo hàm nên thu hút được nhiều nhà Toán học quan tâm nghiên cứu. Có rất nhiều dạng đạo hàm cấp hai của ánh xạ đa trị đang được đề nghị và áp dụng để nghiên cứu độ nhạy nghiệm của bài toán tối ưu. Mỗi loại đều có những điểm đặc biệt riêng nên rất khó để so sánh ưu nhược điểm của các loại đạo hàm này với nhau. Đạo hàm tiệm cận cấp hai là một trong những công cụ rất hữu ích để phân tích độ nhạy nghiệm của bài toán tối ưu vectơ có tham số.

Nón tiệm cận cấp hai đã được giới thiệu vào năm 1998 và là một công cụ hữu ích để nghiên cứu bài toán tối ưu vectơ (xem Penot (1998)). Từ đó, nón tiệm cận cấp hai được nhiều nhà Toán học sử dụng để nghiên cứu điều kiện tối ưu và độ nhạy nghiệm trong bài toán tối ưu vectơ; Kalashnikov và *cs.* (2006) đã giới thiệu đạo hàm tiệm cận cấp hai có đồ thị là nón tiệm cận cấp hai và sử dụng đạo hàm này để nghiên cứu điều kiện tối ưu cấp hai cho bài toán tối ưu đa trị; Li và Zhai (2012) đã sử dụng đạo hàm tiệm cận cấp hai để nghiên cứu điều kiện tối ưu cấp hai cho bài toán bất đẳng thức biến phân.; Li và *cs.* (2012) đã sử dụng đạo hàm tiệm cận cấp hai để nghiên cứu điều kiện tối ưu cấp hai cho bài toán tối ưu đa trị. Khan và Tammer (2013) đã sử dụng đạo hàm tiệm cận cấp hai để nghiên cứu điều kiện tối ưu cấp hai dạng Dubovitskii-Milyutin cho bài toán tối ưu đa trị; Khanh và Tung (2016) đã sử dụng đạo hàm tiệm cận cấp hai để nghiên cứu điều kiện tối ưu cho các dạng nghiệm hữu hiệu của bài toán tối ưu đa trị với ràng buộc hỗn hợp; Tung (2017) đã giới thiệu một phiên bản mở rộng của đạo hàm tiệm cận cấp hai và sử dụng để làm điều kiện chuẩn tắc trong việc nghiên cứu độ nhạy nghiệm của bài toán tối ưu vectơ; Tung (2021) đã nghiên cứu điều kiện tối ưu cho bài toán tối ưu đa trị thông qua một dạng trên đạo hàm tiệm cận cấp hai của ánh xạ đa trị.

Đạo hàm tiệm cận cấp hai tổng quát được giới thiệu trong bài báo của Khan và Tammer (2013). Tuy nhiên theo hiểu biết của chúng tôi, các công thức tính toán đạo hàm tiệm cận cấp hai tổng quát của ánh xạ nghiệm hữu hiệu và ánh xạ nhiều trong bài toán tối ưu phụ thuộc tham số chưa được nghiên cứu.

Mặc dù, có một số phần giống nhau trong chứng minh giữa đạo hàm contingent cấp hai và đạo hàm tiệm cận cấp hai của ánh xạ đa trị như trong mục 3 và mục 4 trong bài báo của Tung (2021) với $m = 2$, nhưng việc khai triển rõ công thức tính toán đạo hàm tiệm cận cấp hai vẫn có ý nghĩa trong một số trường hợp. Chú ý rằng, bài báo này thu được các công thức tính toán của đạo hàm tiệm cận cấp hai tổng quát của ánh xạ nghiệm hữu hiệu và ánh xạ nhiều trong bài toán tối ưu phụ thuộc tham số mà không cần sử dụng thêm những điều kiện phức tạp như trong bài báo của Tung (2021).

2. Phương pháp nghiên cứu

2.1. Giải tích đa trị

Trong bài báo này, nếu không có giả thiết gì thêm thì ta giả sử P, X và Y là các không gian Euclide $\mathbb{R}^n$. Không gian X được xác định thứ tự bởi nón $Q \subset X$. Không gian Y được xác định thứ tự bởi nón $K \subset Y$. Giả sử $K \subset Y$ và $Q \subset X$ là nón điểm, lồi, đóng với đỉnh tại gốc tọa độ. Chuẩn của tất cả các không gian Euclide được kí hiệu bởi $\|\cdot\|$. Gốc của các không gian Euclide được kí hiệu bởi 0 . Bao đóng và biên của tập $A \subset X$ lần lượt được kí hiệu bởi $cl A$ and ∂A . Nón của tập $A \subset X$ được kí hiệu bởi $\{ka | k \geq 0, a \in A\}$. $\mathbb{R}$ chỉ tập số thực. $\mathbb{R}_+$ chỉ tập số thực dương. $\mathbb{R}_-$ chỉ tập số thực âm. $\mathbb{N}$ chỉ tập số tự nhiên.

Giả sử $G: P \rightrightarrows Y$ là một hàm đa trị. Miền hữu hiệu (hay miền xác định, miền hiệu quả), đồ thị, trên đồ thị của G được định nghĩa bởi

$$\begin{aligned} \text{dom} G &:= \{p \in P : G(p) \neq \emptyset\}, \\ \text{gph} G &:= \{(p, x) \in P \times Y : x \in G(p)\}, \\ \text{epi} G &:= \{(p, x) \in P \times Y : p \in \text{dom} G, x \in G(p) + K\}. \end{aligned}$$

Định nghĩa 2.1.1. (xem Khan và cs. (2015)) Đặt Ω là một tập con khác rỗng của Y . Một phần tử $\bar{y} \in \Omega$ được gọi là một điểm K -cực tiểu của Ω , nếu $(\Omega - \bar{y}) \cap (-K) = \{0\}$. Tập của tất cả các điểm K -cực tiểu của Ω là được kí hiệu bởi $\text{Min}_K \Omega$.

Định nghĩa 2.1.2. (xem Khan và cs. (2015)) Nón tiệm cận cấp hai của $B \subseteq Y$ tại $\bar{y} \in cl(B)$ tương ứng với hướng $\bar{v} \in Y$ được định nghĩa bởi

$$T_A^2(B, \bar{y}, \bar{v}) := \left\{ y \in Y : \exists t_n \rightarrow 0^+, r_n \rightarrow 0^+, \frac{t_n}{r_n} \rightarrow 0, \exists y_n \rightarrow y, \forall n \in \mathbb{N}, \bar{y} + t_n \bar{v} + \frac{1}{2} t_n r_n y_n \in B \right\}.$$

Định nghĩa 2.1.3. (xem Khan và cs. (2015)) Đặt $(\bar{p}, \bar{y}) \in \text{gph} G$. Đạo hàm tiệm cận cấp hai của ánh xạ đa trị $G: P \rightrightarrows Y$ tại $(\bar{p}, \bar{y})$ theo hướng $(\bar{u}, \bar{v}) \in P \times Y$ là ánh xạ đa trị $D_A^2 G(\bar{p}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v}): P \rightrightarrows Y$ định nghĩa bởi

$$\begin{aligned} D_A^2 G(\bar{p}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v})(p) &:= \left\{ y \in Y : \exists t_n \rightarrow 0^+, \exists r_n \rightarrow 0^+, \frac{t_n}{r_n} \rightarrow 0, \exists (p_n, y_n) \rightarrow (p, y), \right. \\ &\quad \left. \forall n \in \mathbb{N}, \bar{y} + t_n \bar{v} + \frac{1}{2} t_n r_n y_n \in G\left(\bar{p} + t_n \bar{u} + \frac{1}{2} t_n r_n p_n\right) \right\}. \end{aligned}$$

Định nghĩa 2.1.4. (xem Khan và Tammer (2013)) Đặt $(\bar{p}, \bar{y}) \in \text{gph} G$. Trên đạo hàm tiệm cận cấp hai của ánh xạ $G: P \rightrightarrows Y$ tại $(\bar{p}, \bar{y})$ theo hướng $(\bar{u}, \bar{v}) \in P \times Y$ là ánh xạ đa trị $D_{AG}^2 G(\bar{p}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v}): P \rightrightarrows Y$ được định nghĩa như sau: $\forall p \in \text{dom} D_A^2(G + K)(\bar{p}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v})$,

$$D_{AG}^2 G(\bar{p}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v})(p) := \min_K D_A^2(G + K)(\bar{p}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v})(p).$$

Định nghĩa 2.1.5. (xem Aubin và Frankowska (1990); Bonnans và Shapiro (2000)) Đặt $f: X \rightarrow Y$ là một hàm vectơ. Hàm f được gọi là khả vi Fréchet cấp hai tại $\bar{x} \in X$, nếu tồn tại hai toán tử tuyến tính liên tục $\nabla f(\bar{x}): X \rightarrow Y$ và $\nabla^2 f(\bar{x}): X \times X \rightarrow Y$, thỏa mãn

$$f(x) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})(x - \bar{x}) + \frac{1}{2} \nabla^2 f(\bar{x})(x - \bar{x}, x - \bar{x}) + o(\|x - \bar{x}\|^2),$$

ở đây $o(\|x - \bar{x}\|^2)$ thỏa mãn $\frac{o(\|x - \bar{x}\|^2)}{\|x - \bar{x}\|^2} \rightarrow 0$ khi $x \rightarrow \bar{x}$. Kí hiệu $\nabla f(\bar{x})$ và $\nabla^2 f(\bar{x})$ theo thứ tự là đạo hàm Fréchet cấp một và đạo hàm Fréchet cấp hai của f . Hàm f được gọi là khả vi Fréchet cấp hai trên X nếu f là khả vi Fréchet tại điểm bất kỳ $x \in X$. Nếu $\nabla f(\bar{x})$ và $\nabla^2 f(\bar{x})$ là liên tục tại $\bar{x}$ thì f được gọi là khả vi liên tục Fréchet differentiable cấp hai tại $\bar{x}$.

Định nghĩa 2.1.6. (xem Sawaragi và cs. (1985))

(i), Tập $\Omega \subset Y$ được gọi là có tính chất domination nếu $\Omega \subset \min_K \Omega + K$.

(ii), Ta nói rằng tính chất domination xảy ra với $F: P \rightrightarrows Y$ xung quanh (hay trong lân cận) $\bar{p} \in P$ nếu tồn tại một lân cận U của $\bar{p}$ thỏa mãn

$$F(p) \subset \min_K F(p) + K, \forall p \in U.$$

2.2. Đạo hàm tiệm cận cấp hai tổng quát của ánh xạ nghiệm hữu hiệu

Giả sử $f: P \times X \rightarrow Y$ là một hàm vector và $C: P \rightrightarrows X$ là một hàm đa trị, $F: P \rightrightarrows Y$ là một hàm đa trị xác định bởi

$$F(p) := f(p, C(p)) = f\{(p, x) : x \in C(p)\}.$$

Ta xét bài toán tối ưu vector có tham số được cho như sau

$$(\text{PVO})_p \quad \min_K \{f(p, x) : x \in C(p)\} = \min_K F(p).$$

ở đây x là biến chưa biết, $p \in P$ là tham số, f là hàm mục tiêu, C là ánh xạ tập ràng buộc và F là ánh xạ tập chấp nhận được.

Giả sử ánh xạ nhiều $\mathcal{F}: P \rightrightarrows Y$ được cho bởi

$$\mathcal{F}(p) := \min_K \{f(p, x) : x \in C(p)\} = \min_K F(p),$$

và ánh xạ nghiệm hữu hiệu (hay còn gọi là ánh xạ nghiệm hiệu quả) $H: P \rightrightarrows X$ được cho bởi

$$H(p) := \{x \in C(p) : f(p, x) \in \mathcal{F}(p)\}.$$

Trong phần này, chúng tôi giới thiệu công thức tính toán của trên đạo hàm tiệm cận cấp hai của ánh xạ nghiệm hữu hiệu H .

Lấy ý tưởng từ định Định nghĩa 2.2 trong bài báo của Sun và Li (2014), chúng tôi đề nghị định nghĩa sau đây.

Định nghĩa 2.2.1. Giả $G: P \rightrightarrows Y$ là một ánh xạ đa trị, $(\bar{p}, \bar{y}) \in \text{gph} G$ và $(\bar{u}, \bar{v}) \in P \times Y$. G được gọi là compact theo hướng tiệm cận cấp hai tại $(\bar{p}, \bar{y})$ tương ứng với $(\bar{u}, \bar{v})$ theo hướng

$p \in P$, nếu với tất cả dãy $t_n \rightarrow 0^+, r_n \rightarrow 0^+, \frac{t_n}{r_n} \rightarrow 0$ và $p_n \rightarrow p$, với mọi dãy $\{y_n\}$ với $\bar{y} + t_n \bar{v} + \frac{1}{2} t_n r_n y_n \in G(\bar{p} + t_n \bar{u} + \frac{1}{2} t_n r_n p_n)$, có tồn tại một dãy con hội tụ của dãy $\{y_n\}$.

Định nghĩa 2.2.1 là trường hợp đặc biệt của Định nghĩa 4 (ii) trong bài báo của Tung (2021) với $m = 2$. Ta có thể kiểm tra điều kiện compact theo hướng tiệm cận cấp hai xảy ra khi lấy $m = 2$ trong Mệnh Đề 1 (ii) trong bài báo của Tung (2021).

Mệnh đề 2.2.1. Đặt $(\bar{p}, \bar{y}) \in \text{gph} G$ và $(u, v) \in P \times Y$. Khi đó, ta có

$$D_A^2 G(\bar{p}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v})(p) + K \subset D_A^2 (G + K)(\bar{p}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v})(p), \forall p \in P.$$

Chứng minh. Giả sử $y \in D_A^2 G(\bar{p}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v})(p) + K$. Thì, tồn tại $y \in D_A^2 G(\bar{p}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v})(p)$ và $k \in K$ thỏa mãn $y = y' + k$. Khi đó, tồn tại $t_n \rightarrow 0^+, r_n \rightarrow 0^+, \frac{t_n}{r_n} \rightarrow 0, \exists (p_n, y_n) \rightarrow (p, y')$ với tất cả $n \in \mathbb{N}$, thỏa mãn $\bar{y} + t_n \bar{v} + \frac{1}{2} t_n r_n y_n \in G\left(\bar{p} + t_n \bar{u} + \frac{1}{2} t_n r_n p_n\right)$. Đặt $y'_n = y_n + k$, ta có $y'_n \rightarrow y' + k$ và $\bar{y} + t_n \bar{v} + \frac{1}{2} t_n r_n y'_n \in G\left(\bar{p} + t_n \bar{u} + \frac{1}{2} t_n r_n p_n\right) + K$. Do đó, ta có $y = y' + k \in D_A^2 (G + K)(\bar{p}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v})(p)$. Do đó, ta có

$$D_A^2 G(\bar{p}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v})(p) + K \subset D_A^2 (G + K)(\bar{p}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v})(p), \forall p \in P. \quad \square$$

Mệnh đề 2.2.2. Đặt $\bar{p} \in P, \bar{x} \in H(\bar{p})$ và $\bar{y} = f(\bar{p}, \bar{x}), (\bar{u}, \bar{w}, \bar{v}) \in P \times X \times Y$. Giả sử rằng f là khả vi Fréchet cấp hai tại $(\bar{p}, \bar{x}), \bar{v} = \nabla f(\bar{p}, \bar{x})(\bar{u}, \bar{w})$ và $\nabla_x f(\bar{p}, \bar{x})(\cdot)$ là đơn ánh. Nếu C là compact theo hướng tiệm cận cấp hai tại $(\bar{p}, \bar{y})$ tương ứng với $(\bar{u}, \bar{v})$ theo hướng $p \in P$, thì ta có

$$\begin{aligned} & \{x \in D_A^2 C(\bar{p}, \bar{x}, \bar{u}, \bar{w})(p) : \nabla f(\bar{p}, \bar{x})(p, x) \in D_A^2 \mathcal{F}(\bar{p}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v})(p)\} + Q = \\ & = D_A^2 (H + Q)(\bar{p}, \bar{x}, \bar{u}, \bar{w})(p), \forall p \in P. \end{aligned}$$

Chứng minh. Đặt $y = \nabla f(\bar{p}, \bar{x})(p, x)$. Giả sử $x \in D_A^2 C(\bar{p}, \bar{x}, \bar{u}, \bar{w})(p)$ và $y \in D_A^2 \mathcal{F}(\bar{p}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v})(p)$. Thì, $\exists t_n \rightarrow 0^+, \exists r_n \rightarrow 0^+, \frac{t_n}{r_n} \rightarrow 0, \exists \{(p_n, y_n)\}_n \subset \text{gph} \mathcal{F}$ thỏa mãn $(p_n, y_n) \rightarrow (p, y)$ và

$$\bar{y} + t_n \bar{v} + \frac{1}{2} t_n r_n y_n \in \mathcal{F}\left(\bar{p} + t_n \bar{u} + \frac{1}{2} t_n r_n p_n\right). \quad (1)$$

Do đó, tồn tại dãy $\{x_n\}_n \subset X$ thỏa mãn $x_n \in C\left(\bar{p} + t_n \bar{u} + \frac{1}{2} t_n r_n p_n\right)$ và $\bar{y} + t_n \bar{v} + \frac{1}{2} t_n r_n y_n = f\left(\bar{p} + t_n \bar{u} + \frac{1}{2} t_n r_n p_n, x_n\right)$. Đặt $x_n := \frac{x_n - \bar{x} - t_n \bar{w}}{\frac{1}{2} t_n r_n}$, ta có

$$x_n = \bar{x} + t_n \bar{w} + \frac{1}{2} t_n r_n x_n \in C \left(\bar{p} + t_n \bar{u} + \frac{1}{2} t_n r_n p_n \right), \quad (2)$$

và

$$\bar{y} + t_n \bar{v} + \frac{1}{2} t_n r_n y_n = f \left(\bar{p} + t_n \bar{u} + \frac{1}{2} t_n r_n p_n, \bar{x} + t_n \bar{w} + \frac{1}{2} t_n r_n x_n \right) \quad (3)$$

Từ (2) và giả thiết ta suy ra dãy $\{x_n\}_n$ bị chặn. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử rằng $x_n \rightarrow \tilde{x}$. Suy ra $\tilde{x} \in D_A^2 C(\bar{p}, \bar{x}, \bar{u}, \bar{w})(p)$. Hơn nữa, vì f khả vi Fréchet cấp hai tại $(\bar{p}, \bar{x})$, ta suy ra

$$\begin{aligned} f \left(\bar{p} + t_n \bar{u} + \frac{1}{2} t_n r_n p_n, \bar{x} + t_n \bar{w} + \frac{1}{2} t_n r_n x_n \right) &= f(\bar{p}, \bar{x}) + t_n \nabla f(\bar{p}, \bar{x})(\bar{u}, \bar{w}) + \frac{1}{2} t_n r_n \nabla f(\bar{p}, \bar{x})(p_n, x_n) \\ &+ \frac{1}{2} t_n^2 \nabla^2 f(\bar{p}, \bar{x}) \left(\left(\bar{u} + \frac{1}{2} r_n p_n, \bar{w} + \frac{1}{2} r_n x_n \right), \left(\bar{u} + \frac{1}{2} r_n p_n, \bar{w} + \frac{1}{2} r_n x_n \right) \right) \\ &+ o \left(\left\| \left(t_n \bar{u} + \frac{1}{2} t_n r_n p_n, t_n \bar{w} + \frac{1}{2} t_n r_n x_n \right) \right\|^2 \right). \end{aligned}$$

Từ đây kết hợp với (3), $\bar{y} = f(\bar{p}, \bar{x})$ và $\bar{v} = \nabla f(\bar{p}, \bar{x})(\bar{u}, \bar{w})$, ta suy ra rằng

$$\begin{aligned} y_n &= \nabla f(\bar{p}, \bar{x})(p_n, x_n) + \frac{t_n}{r_n} \nabla^2 f(\bar{p}, \bar{x}) \left(\left(\bar{u} + \frac{1}{2} r_n p_n, \bar{w} + \frac{1}{2} r_n x_n \right), \left(\bar{u} + \frac{1}{2} r_n p_n, \bar{w} + \frac{1}{2} r_n x_n \right) \right) \\ &+ \frac{o \left(\left\| \left(t_n \bar{u} + \frac{1}{2} t_n r_n p_n, t_n \bar{w} + \frac{1}{2} t_n r_n x_n \right) \right\|^2 \right)}{\frac{1}{2} t_n r_n}. \end{aligned}$$

Cho $n \rightarrow \infty$, ta nhận được $y = \nabla f(\bar{p}, \bar{x})(p_n, \tilde{x})$. Kết hợp điều này với $y = \nabla f(\bar{p}, \bar{x})(p, x)$, ta có $\nabla f(\bar{p}, \bar{x})(p_n, \tilde{x}) = \nabla f(\bar{p}, \bar{x})(p, x)$. Suy ra $\nabla_x f(\bar{p}, \bar{x})(x) = \nabla_x f(\bar{p}, \bar{x})(\tilde{x})$. Từ $\nabla_x f(\bar{p}, \bar{x})(\cdot)$ là đơn ánh, ta suy ra $x = \tilde{x}$. Kết hợp điều này với (1), (2) và (3), suy ra, tồn tại $t_n \rightarrow 0^+$, $r_n \rightarrow 0^+$, $\frac{t_n}{r_n} \rightarrow 0$ và $\exists \{(p_n, x_n)\}_n \subset \text{gph } H$ thỏa mãn $(p_n, x_n) \rightarrow (\bar{p}, \bar{x})$ và

$$\bar{x} + t_n \bar{w} + \frac{1}{2} t_n r_n x_n \in H \left(\bar{p} + t_n \bar{u} + \frac{1}{2} t_n r_n p_n \right).$$

Nên, ta có $x \in D_A^2 H(\bar{p}, \bar{x}, \bar{u}, \bar{w})(p)$. Do đó,

$\{x \in D_A^2 C(\bar{p}, \bar{x}, \bar{u}, \bar{w})(p) : \nabla f(\bar{p}, \bar{x})(p, x) \in D_A^2 \mathcal{F}(\bar{p}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v})(p)\} \subset D_A^2 H(\bar{p}, \bar{x}, \bar{u}, \bar{w})(p), \forall p \in P$.
Suy ra

$$\begin{aligned} & \left\{x \in D_A^2 C(\bar{p}, \bar{x}, \bar{u}, \bar{w})(p) : \nabla f(\bar{p}, \bar{x})(p, x) \in D_A^2 \mathcal{F}(\bar{p}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v})(p)\right\} + Q \\ & \subset D_A^2 H(\bar{p}, \bar{x}, \bar{u}, \bar{w})(p) + Q, \forall p \in P. \end{aligned}$$

Từ Mệnh đề 2.2.1, ta suy ra $D_A^2 H(\bar{p}, \bar{x}, \bar{u}, \bar{w})(p) + Q \subset D_A^2 (H + Q)(\bar{p}, \bar{x}, \bar{u}, \bar{w})(p)$.

Do đó,

$$\begin{aligned} & \left\{x \in D_A^2 C(\bar{p}, \bar{x}, \bar{u}, \bar{w})(p) : \nabla f(\bar{p}, \bar{x})(p, x) \in D_A^2 \mathcal{F}(\bar{p}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v})(p)\right\} + Q \\ & \subset D_A^2 (H + Q)(\bar{p}, \bar{x}, \bar{u}, \bar{w})(p) + Q, \forall p \in P. \end{aligned}$$

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh

$$\begin{aligned} & D_A^2 (H + Q)(\bar{p}, \bar{x}, \bar{u}, \bar{w})(p) \\ & \subset \left\{x \in D_A^2 C(\bar{p}, \bar{x}, \bar{u}, \bar{w})(p) : \nabla f(\bar{p}, \bar{x})(p, x) \in D_A^2 \mathcal{F}(\bar{p}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v})(p)\right\} + Q, \forall p \in P. \end{aligned}$$

Thật vậy, đặt $x \in D_A^2 (H + Q)(\bar{p}, \bar{x}, \bar{u}, \bar{w})(p)$. Thì, tồn tại $t_n \rightarrow 0^+, r_n \rightarrow 0^+, \frac{t_n}{r_n} \rightarrow 0$ và

$\exists \{(p_n, x_n)\}_n \subset P \times X$ thỏa mãn $(p_n, x_n) \rightarrow (p, x)$ và

$$\bar{x} + t_n \bar{w} + \frac{1}{2} t_n r_n x_n \in H\left(\bar{p} + t_n \bar{u} + \frac{1}{2} t_n r_n p_n\right) + Q. \quad (4)$$

Do đó, tồn tại $\{\bar{x}_n\}_n \subset C\left(\bar{p} + t_n \bar{u} + \frac{1}{2} t_n r_n p_n\right), \{q_n\}_n \subset Q$ và

$$f\left(\bar{p} + t_n \bar{u} + \frac{1}{2} t_n r_n p_n, \bar{x}_n\right) \in \mathcal{F}\left(\bar{p} + t_n \bar{u} + \frac{1}{2} t_n r_n p_n\right),$$

thỏa mãn $\bar{x} + t_n \bar{w} + \frac{1}{2} t_n r_n x_n = \bar{x}_n + q_n$. Đặt $\bar{x}'_n = \frac{\bar{x}_n - \bar{x} - t_n \bar{w}}{\frac{1}{2} t_n r_n}$. Ta có

$$\bar{x}_n = \bar{x} + t_n \bar{w} + \frac{1}{2} t_n r_n \bar{x}'_n \in C\left(\bar{p} + t_n \bar{u} + \frac{1}{2} t_n r_n p_n\right).$$

Kết hợp điều này với giả thiết ta suy ra dãy $\{\bar{x}'_n\}_n$ bị chặn. Không mất tính tổng quát, ta có

thể giả sử rằng $\bar{x}'_n \rightarrow \bar{x}' \in X$. Do đó, tồn tại $t_n \rightarrow 0^+, r_n \rightarrow 0^+, \frac{t_n}{r_n} \rightarrow 0$ và $\exists \{(p_n, x_n)\}_n \subset P \times X$

thỏa mãn $(p_n, x_n) \rightarrow (p, \bar{x}')$ và

$$\bar{x} + t_n \bar{w} + \frac{1}{2} t_n r_n x_n \in C\left(\bar{p} + t_n \bar{u} + \frac{1}{2} t_n r_n p_n\right).$$

Do đó, $\bar{x}' \in D_A^2 C(\bar{p}, \bar{x}, \bar{u}, \bar{w})(p)$. Từ $\bar{x} + t_n \bar{w} + \frac{1}{2} t_n r_n x_n = \bar{x}_n + k_n$ và $\bar{x}_n' = \frac{\bar{x}_n - \bar{x} - t_n \bar{w}}{\frac{1}{2} t_n r_n}$, ta được

$x_n - \bar{x}_n' = \frac{2k_n}{t_n r_n} \in Q$. Hơn nữa, vì Q là nón đóng, suy ra $x - \bar{x}' \in Q$. Do đó, ta chỉ cần chứng minh rằng $\nabla f(\bar{p}, \bar{x})(p, x) \in D_A^2 \mathcal{F}(\bar{p}, \bar{x}, \bar{u}, \bar{w})(p)$. Đặt

$$y_n := \frac{f\left(\bar{p} + t_n \bar{u} + \frac{1}{2} t_n r_n p_n, \bar{x} + t_n \bar{w} + \frac{1}{2} t_n r_n \bar{x}_n'\right) - f(\bar{p}, \bar{x}) - t_n \bar{v}}{\frac{1}{2} t_n r_n}. \quad (5)$$

Thì, ta có $\bar{y} + t_n \bar{w} + \frac{1}{2} t_n r_n y_n \in \mathcal{F}\left(\bar{p} + t_n \bar{w} + \frac{1}{2} t_n r_n p_n\right)$. Hơn nữa, vì f khả vi Fréchet cấp hai tại $(\bar{p}, \bar{x})$, ta nhận được

$$\begin{aligned} f\left(\bar{p} + t_n \bar{u} + \frac{1}{2} t_n r_n p_n, \bar{x} + t_n \bar{w} + \frac{1}{2} t_n r_n \bar{x}_n'\right) &= f(\bar{p}, \bar{x}) + t_n \nabla f(\bar{p}, \bar{x})(\bar{u}, \bar{w}) + \frac{1}{2} t_n r_n \nabla f(\bar{p}, \bar{x})(p_n, \bar{x}_n') \\ &+ \frac{1}{2} t_n^2 \nabla^2 f(\bar{p}, \bar{x})\left(\left(\bar{u} + \frac{1}{2} r_n p_n, \bar{w} + \frac{1}{2} r_n \bar{x}_n'\right), \left(\bar{u} + \frac{1}{2} r_n p_n, \bar{w} + \frac{1}{2} r_n \bar{x}_n'\right)\right) \\ &+ o\left(\left\|\left(t_n \bar{u} + \frac{1}{2} t_n r_n p_n, t_n \bar{w} + \frac{1}{2} t_n r_n \bar{x}_n'\right)\right\|^2\right). \end{aligned}$$

Từ điều này và (5), $\bar{y} = f(\bar{p}, \bar{x})$, ta suy ra

$$\begin{aligned} y_n &= \nabla f(\bar{p}, \bar{x})(p_n, \bar{x}_n') + \frac{t_n}{r_n} \nabla^2 f(\bar{p}, \bar{x})\left(\left(\bar{u} + \frac{1}{2} r_n p_n, \bar{w} + \frac{1}{2} r_n \bar{x}_n'\right), \left(\bar{u} + \frac{1}{2} r_n p_n, \bar{w} + \frac{1}{2} r_n \bar{x}_n'\right)\right) \\ &+ \frac{o\left(\left\|\left(t_n \bar{u} + \frac{1}{2} t_n r_n p_n, t_n \bar{w} + \frac{1}{2} t_n r_n \bar{x}_n'\right)\right\|^2\right)}{\frac{1}{2} t_n r_n}. \end{aligned}$$

Cho $n \rightarrow \infty$, ta nhận được $y = \nabla f(\bar{p}, \bar{x})(p_n, \bar{x}_n')$. Do đó, ta có

$$\nabla f(\bar{p}, \bar{x})(p_n, \bar{x}_n') \in D_A^2 \mathcal{F}(\bar{p}, \bar{x}, \bar{u}, \bar{w})(p).$$

Mệnh đề 2.2.2 được chứng minh.

□

Định lý 2.2.1. Đặt $\bar{p} \in P, \bar{x} \in H(\bar{p}), \bar{y} = f(\bar{p}, \bar{x}), (\bar{u}, \bar{w}, \bar{v}) \in P \times X \times Y$ và $\bar{v} = \nabla f(\bar{p}, \bar{x})(\bar{u}, \bar{w})$. Giả sử rằng các điều kiện sau xảy ra:

(i) f là khả vi Fréchet cấp hai tại $(\bar{p}, \bar{x})$;

(ii) $\nabla_x f(\bar{p}, \bar{x})(\cdot)$ là đơn ánh;

(iii) C là compact theo hướng tiệm cận cấp hai tại $(\bar{p}, \bar{y})$ tương ứng với $(\bar{u}, \bar{v})$ theo hướng $p \in P$.

Khi đó, với mọi $p \in P$, ta có

$$D_{AG}^2 H(\bar{p}, \bar{x}, \bar{u}, \bar{w})(p) = \min_K \{x \in D_A^2 C(\bar{p}, \bar{x}, \bar{u}, \bar{w})(p) : \nabla f(\bar{p}, \bar{x})(p, x) \in D_A^2 \mathcal{F}(\bar{p}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v})(p)\}.$$

Chứng minh.

Từ định nghĩa của đạo hàm tiệm cận cấp hai tổng quát và Mệnh đề 2.2.2, ta có

$$\begin{aligned} D_{AG}^2 H(\bar{p}, \bar{x}, \bar{u}, \bar{w})(p) &= \min_K D_{AG}^2 (H + Q)(\bar{p}, \bar{x}, \bar{u}, \bar{w})(p) \\ &= \min_K \left(\{x \in D_A^2 C(\bar{p}, \bar{x}, \bar{u}, \bar{w})(p) : \nabla f(\bar{p}, \bar{x})(p, x) \in D_A^2 \mathcal{F}(\bar{p}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v})(p)\} + Q \right) \\ &= \min_K \{x \in D_A^2 C(\bar{p}, \bar{x}, \bar{u}, \bar{w})(p) : \nabla f(\bar{p}, \bar{x})(p, x) \in D_A^2 \mathcal{F}(\bar{p}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v})(p)\}. \end{aligned}$$

Định lý 2.2.1 được chứng minh. $\square$

2.3. Đạo hàm tiệm cận cấp hai tổng quát của ánh xạ nhiều

Trong phần này, chúng tôi sẽ đưa ra quy luật tính toán cho đạo hàm tiệm cận cấp hai tổng quát của ánh xạ nhiều $\mathcal{F}$.

Đầu tiên, chúng tôi giới thiệu một kết quả có ứng dụng trong phần sau.

Mệnh đề 2.3.1. Đặt $\bar{p} \in P, \bar{x} \in C(\bar{p}), (\bar{u}, \bar{w}, \bar{v}) \in P \times X \times Y$ và $\bar{y} = f(\bar{p}, \bar{x})$. Giả sử rằng f khả vi Fréchet cấp hai tại $(\bar{p}, \bar{x})$ với $\bar{v} = \nabla f(\bar{p}, \bar{x})(\bar{u}, \bar{w})$ và C là compact theo hướng tiệm cận cấp hai tại $(\bar{p}, \bar{y})$ tương ứng với $(\bar{u}, \bar{v})$ theo hướng $p \in P$. Khi đó, ta có

$$\{\nabla f(\bar{p}, \bar{x})(p, x) : (p, x) \in T_A^2(\text{gph } C, (\bar{p}, \bar{x}), (\bar{u}, \bar{w}))\} + K = D_A^2 (F + K)(\bar{p}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v})(p), \forall p \in P.$$

Chứng minh. Đặt $y = \nabla f(\bar{p}, \bar{x})(p, x)$. Giả sử $(p, x) \in T_A^2(\text{gph } C, (\bar{p}, \bar{x}), (\bar{u}, \bar{w}))$. Thì, tồn tại

$$t_n \rightarrow 0^+, r_n \rightarrow 0^+, \frac{t_n}{r_n} \rightarrow 0, \exists \{(p_n, y_n)\}_n \subset \text{gph } C \text{ thỏa mãn } (p_n, x_n) \rightarrow (p, x) \text{ và}$$

$$\bar{x} + t_n \bar{w} + \frac{1}{2} t_n r_n x_n \in C\left(\bar{p} + t_n \bar{u} + \frac{1}{2} t_n r_n p_n\right).$$

Điều này suy ra rằng

$$f\left(\bar{p} + t_n \bar{u} + \frac{1}{2} t_n r_n p_n, \bar{x} + t_n \bar{w} + \frac{1}{2} t_n r_n x_n\right) \in F\left(\bar{p} + t_n \bar{u} + \frac{1}{2} t_n r_n p_n\right), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Đặt

$$y_n = \frac{f\left(\bar{p} + t_n \bar{u} + \frac{1}{2} t_n r_n p_n, \bar{x} + t_n \bar{w} + \frac{1}{2} t_n r_n x_n\right) - f(\bar{p}, \bar{x}) - t_n \bar{v}}{\frac{1}{2} r_n t_n}. \quad (6)$$

Ta suy ra $\bar{y} + t_n \bar{v} + \frac{1}{2} t_n r_n y_n \in F\left(\bar{p} + t_n \bar{u} + \frac{1}{2} t_n r_n p_n\right), \forall n \in \mathbb{N}$. Vì f là khả vi Fréchet cấp hai tại $(\bar{p}, \bar{x})$, ta có

$$\begin{aligned} f\left(\bar{p} + t_n \bar{u} + \frac{1}{2} t_n r_n p_n, \bar{x} + t_n \bar{w} + \frac{1}{2} t_n r_n x_n\right) &= f(\bar{p}, \bar{x}) + t_n \nabla f(\bar{p}, \bar{x})(\bar{u}, \bar{w}) \\ &+ \frac{1}{2} t_n r_n \nabla f(\bar{p}, \bar{x})(p_n, x_n) + \frac{1}{2} t_n^2 \nabla^2 f(\bar{p}, \bar{x})\left(\left(\bar{u} + \frac{1}{2} r_n p_n, \bar{w} + \frac{1}{2} r_n x_n\right), \left(\bar{u} + \frac{1}{2} r_n p_n, \bar{w} + \frac{1}{2} r_n x_n\right)\right) \\ &+ o\left(\left\|\left(t_n \bar{u} + \frac{1}{2} t_n r_n p_n, t_n \bar{w} + \frac{1}{2} t_n r_n x_n\right)\right\|^2\right). \end{aligned}$$

Điều này kết hợp với (6) và $\bar{y} = f(\bar{p}, \bar{x})$, ta có

$$\begin{aligned} y_n &= \nabla f(\bar{p}, \bar{x})(p_n, x_n) + \frac{t_n}{r_n} \nabla^2 f(\bar{p}, \bar{x})\left(\left(\bar{u} + \frac{1}{2} r_n p_n, \bar{w} + \frac{1}{2} r_n x_n\right), \left(\bar{u} + \frac{1}{2} r_n p_n, \bar{w} + \frac{1}{2} r_n x_n\right)\right) \\ &+ \frac{o\left(\left\|\left(t_n \bar{u} + \frac{1}{2} t_n r_n p_n, t_n \bar{w} + \frac{1}{2} t_n r_n x_n\right)\right\|^2\right)}{\frac{1}{2} t_n r_n}. \end{aligned}$$

Cho $n \rightarrow \infty$, ta nhận được $y = \nabla f(\bar{p}, \bar{x})(p, x)$. Do đó,

$$y = \nabla f(\bar{p}, \bar{x})(p, x) \in D_A^2 F(\bar{p}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v})(p).$$

Bởi vậy,

$$\{\nabla f(\bar{p}, \bar{x})(p, x) : (p, x) \in T_A^2(\text{gph} C, (\bar{p}, \bar{x}), (\bar{u}, \bar{w}))\} \subset D_A^2 F(\bar{p}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v})(p).$$

Suy ra

$$\{\nabla f(\bar{p}, \bar{x})(p, x) : (p, x) \in T_A^2(\text{gph} C, (\bar{p}, \bar{x}), (\bar{u}, \bar{w}))\} + K \subset D_A^2 F(\bar{p}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v})(p) + K.$$

Từ Mệnh đề 2.2.1, ta có $D_A^2 F(\bar{p}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v})(p) + K \subset D_A^2 (F + K)(\bar{p}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v})(p)$. Do đó, ta có

$$\{\nabla f(\bar{p}, \bar{x})(p, x) : (p, x) \in T_A^2(\text{gph} C, (\bar{p}, \bar{x}), (\bar{u}, \bar{w}))\} + K \subset D_A^2 (F + K)(\bar{p}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v})(p).$$

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh

$$D_A^2 (F + K)(\bar{p}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v})(p) \subset \{\nabla f(\bar{p}, \bar{x})(p, x) : (p, x) \in T_A^2(\text{gph} C, (\bar{p}, \bar{x}), (\bar{u}, \bar{w}))\} + K.$$

Thật vậy, với mỗi $p \in P$, lấy bất kỳ $y \in D_A^2 (F + K)(\bar{p}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v})(p)$. Thì, tồn tại $t_n \rightarrow 0^+, r_n \rightarrow 0^+, \frac{t_n}{r_n} \rightarrow 0$ và $\exists \{(p_n, y_n)\}_n \subset P \times Y$ thỏa mãn $(p_n, y_n) \rightarrow (p, y)$ và

$$\bar{y} + t_n \bar{v} + \frac{1}{2} t_n r_n y_n \in F\left(\bar{p} + t_n \bar{u} + \frac{1}{2} t_n r_n p_n\right) + K.$$

Thì, tồn tại $\{x_n\}_n \subset C\left(\bar{p} + t_n \bar{u} + \frac{1}{2} t_n r_n p_n\right), \{k_n\}_n \subset K$ thỏa mãn

$$\bar{y} + t_n \bar{v} + \frac{1}{2} t_n r_n y_n = f\left(\bar{p} + t_n \bar{u} + \frac{1}{2} t_n r_n p_n, x_n\right) + k_n.$$

Đặt $x'_n := \frac{x_n - \bar{x} - t_n \bar{w}}{\frac{1}{2} t_n r_n}$. Ta có $x_n = \bar{x} + t_n \bar{w} + \frac{1}{2} t_n r_n x'_n \in C\left(\bar{p} + t_n \bar{u} + \frac{1}{2} t_n r_n p_n\right)$. Từ giả thiết, ta

suy ra dãy $\{x'_n\}_n$ bị chặn. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử rằng $x'_n \rightarrow x'$. Do đó, ta có $(p, x') \in T_A^2(\text{gph } C, (\bar{p}, \bar{x}), (\bar{u}, \bar{w}))$. Từ

$$\bar{y} + t_n \bar{v} + \frac{1}{2} t_n r_n y_n = f\left(\bar{p} + t_n \bar{u} + \frac{1}{2} t_n r_n p_n, x_n\right) + k_n.$$

Ta suy ra $y_n - \frac{f\left(\bar{p} + t_n \bar{u} + \frac{1}{2} t_n r_n p_n, x_n\right) - \bar{y} - t_n \bar{v}}{t_n} = \frac{k_n}{t_n} \in K$. Thì, từ $\bar{y} = f(\bar{p}, \bar{x})$ và

$x_n = \bar{x} + t_n \bar{w} + \frac{1}{2} t_n r_n x'_n$, ta suy rằng

$$y_n - \frac{f\left(\bar{p} + t_n \bar{u} + \frac{1}{2} t_n r_n p_n, \bar{x} + t_n \bar{w} + \frac{1}{2} t_n r_n x'_n\right) - f(\bar{p}, \bar{x}) - t_n \bar{v}}{\frac{1}{2} t_n r_n} = \frac{k_n}{\frac{1}{2} t_n r_n} \in K.$$

Vì f là khả vi Fréchet cấp hai tại $(\bar{p}, \bar{x})$, ta có

$$\begin{aligned} f\left(\bar{p} + t_n \bar{u} + \frac{1}{2} t_n r_n p_n, \bar{x} + t_n \bar{w} + \frac{1}{2} t_n r_n x'_n\right) &= f(\bar{p}, \bar{x}) + t_n \nabla f(\bar{p}, \bar{x})(\bar{u}, \bar{w}) \\ &+ \frac{1}{2} t_n r_n \nabla f(\bar{p}, \bar{x})(p_n, x_n) + \frac{1}{2} t_n^2 \nabla^2 f(\bar{p}, \bar{x})\left(\left(\bar{u} + \frac{1}{2} r_n p_n, \bar{w} + \frac{1}{2} r_n x_n\right), \left(\bar{u} + \frac{1}{2} r_n p_n, \bar{w} + \frac{1}{2} r_n x_n\right)\right) \\ &+ o\left(\left\|\left(t_n \bar{u} + \frac{1}{2} t_n r_n p_n, t_n \bar{w} + \frac{1}{2} t_n r_n x_n\right)\right\|^2\right). \end{aligned}$$

Cho $n \rightarrow \infty$ và từ $\bar{v} = \nabla f(\bar{p}, \bar{x})(\bar{u}, \bar{w})$, ta có

$$y_n - \frac{f\left(\bar{p} + t_n \bar{u} + \frac{1}{2} t_n r_n p_n, \bar{x} + t_n \bar{w} + \frac{1}{2} t_n r_n x'_n\right) - f(\bar{p}, \bar{x}) - t_n \bar{v}}{\frac{1}{2} t_n r_n} \rightarrow y - \nabla f(\bar{p}, \bar{x})(p, x').$$

Vì K là nón đóng, ta có $y - \nabla f(\bar{p}, \bar{x})(p, x') \in K$. Suy ra $y \in \nabla f(\bar{p}, \bar{x})(p, x') + K$.

Mệnh đề 2.3.1 được chứng minh xong. $\square$

Định lý 2.3.1. Đặt $\bar{p} \in P, \bar{x} \in C(\bar{p}), \bar{y} = f(\bar{p}, \bar{x}), (\bar{u}, \bar{w}, \bar{v}) \in P \times X \times Y$ và $\bar{v} = \nabla f(\bar{p}, \bar{x})(\bar{u}, \bar{w})$. Giả sử các điều kiện sau đây xảy ra:

- (i) f là khả vi Fréchet cấp hai tại $(\bar{p}, \bar{x})$;
- (ii) Tính domination xảy ra đối với F trong lân cận của $\bar{p}$;
- (iii) C là compact theo hướng tiệm cận cấp hai tại $(\bar{p}, \bar{y})$ tương ứng với $(\bar{u}, \bar{v})$ theo hướng $p \in P$.

Khi đó, ta có

$$D_{AG}^2 \mathcal{F}(\bar{p}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{w})(p) = \min_K \left\{ \nabla f(\bar{p}, \bar{x})(p, x) : (p, x) \in T_A^2(\text{gph } C, (\bar{p}, \bar{y}), (\bar{u}, \bar{w})) \right\}, \forall p \in P.$$

Chứng minh. Ta có $\mathcal{F}(p) \subset F(p)$ với tất cả $p \in P$ và tính domination xảy ra đối với F trong lân cận của $\bar{p}$, tồn tại một lân cận U cận của $\bar{p}$ thỏa mãn $\mathcal{F}(p) + K = F(p) + K, \forall p \in U$.

Do đó, $T_A^2(\text{gph } \mathcal{F} + C, (\bar{p}, \bar{y}), (\bar{u}, \bar{v})) = T_A^2(\text{gph } F + C, (\bar{p}, \bar{y}), (\bar{u}, \bar{w}))$, suy ra, với mỗi $p \in P$, $D_{AG}^2 F(\bar{p}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v})(p) = D_{AG}^2 \mathcal{F}(\bar{p}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v})(p), \forall p \in P$.

Từ định nghĩa của trên đạo hàm tiệm cận cấp hai và Mệnh đề 2.3.1, ta có

$$\begin{aligned} D_{AG}^2 F(\bar{p}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{w})(p) &= \min_K D_{AG}^2 (F + K)(\bar{p}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{w})(p) \\ &= \min_K \left\{ f(\bar{p}, \bar{x})(p, x) : (p, x) \in T_A^2(\text{gph } C, (\bar{p}, \bar{y}), (\bar{u}, \bar{w})) \right\} + K \\ &= \min_K \left\{ \nabla f(\bar{p}, \bar{x})(p, x) : (p, x) \in T_A^2(\text{gph } C, (\bar{p}, \bar{y}), (\bar{u}, \bar{w})) \right\}. \end{aligned}$$

Do đó, ta có

$$D_{AG}^2 \mathcal{F}(\bar{p}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v})(p) = \min_K \left\{ \nabla f(\bar{p}, \bar{x})(p, x) : (p, x) \in T_A^2(\text{gph } C, (\bar{p}, \bar{x}), (\bar{u}, \bar{w})) \right\}.$$

Định lý 2.3.1 được chứng minh xong. □

Tài liệu tham khảo

- Aubin, J. P., & Frankowska, H. (1990). *Set-valued Analysis*, Basel: Birkhäuser.
- Bonnans, J.F., & Shapiro, A. (2000). *Perturbation Analysis of Optimization Problems*, New York: Springer.
- Brecker, W. W., & Kassay, G. (1997). A systematization of convexity concepts for sets and functions. *J. Convex Anal.*, 4, 109-127. <https://www.heldermann-verlag.de/jca/jca04/jca04005.pdf>
- Chuong, T. D., & Yao, J. C. (2010). Generalized clarke epiderivatives of parametric vector optimization problems. *J. Optim. Theory Appl.*, 147, 77-94. <https://doi.org/10.1007/s10957-010-9646-9>
- Chuong, T. D. (2013). Derivatives of the efficient point multifunction in parametric vector optimization problems. *J. Optim. Theory Appl.*, 156, 247-265. <https://doi.org/10.1007/s10957-012-0099-1>
- Durea, M. (2004). First and second order optimality conditions for set-valued optimization problems, *Rend. Circ. Mat. Palermo.*, 2, 451-468. <https://doi.org/10.1007/BF02875738>

- Kalashnikov, V., Jadamba, B., & Khan, A. A. (2006). First and second-order optimality conditions in set optimization. In: Dempe, S., Kalashnikov, V. (eds.) *Optimization with Multivalued Mappings*, 265-276.
- Khan, A. A., & Tammer, C. (2013). Second-order optimality conditions in set-valued optimization via asymptotic derivatives. *Optimization.*, 62, 743-758. <https://doi.org/10.1080/02331934.2012.674948>
- Khan, A. A., Tammer, C., & Zlinescu, C. (2015). *Set-Valued Optimization: An Introduction with Applications*. Heidelberg: Springer.
- Khanh, P. Q., and Tung, N. M. (2016). Second-order conditions for open-cone minimizers and firm minimizers in set-valued optimization subject to mixed constraints. *J. Optim. Theory Appl.*, 171, 45-69. <https://doi.org/10.1007/s10957-016-0995-x>
- Kuk, H., Tanino, T., & Tanaka, M. (1996a). Sensitivity analysis in parametrized convex vector optimization. *J. Math. Anal. Appl.*, 202, 511-522. <https://doi.org/10.1006/jmaa.1996.0331>
- Kuk, H., Tanino, T., & Tanaka, M. (1996b). Sensitivity analysis in vector optimization. *J. Optim. Theory Appl.*, 89, 713-730. <https://doi.org/10.1007/BF02275356>
- Li, S. J., Sun, X. K., & Zhai, J. (2012). Second-order contingent derivatives of set-valued mappings with application to set-valued optimization. *Appl. Math. Comput.*, 218, 6874-6886. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.12.064>
- Li, S. J., Zhu, S. K., & Li, X. B. (2012). Second order optimality conditions for strict efficiency of constrained set-valued optimization. *J. Optim. Theory Appl.*, 155, 534-557. <https://doi.org/10.1007/s10957-012-0076-8>
- Li, S. J., & Zhai J. (2012). Second-order asymptotic differential properties and optimality conditions for weak vector variational inequalities. *Optim. Lett.*, 6, 503-523. <https://doi.org/10.1007/s11590-011-0276-4>
- Mordukhovich, B. S. (2006). *Variational Analysis and Generalized Differentiation*. Berlin: Springer, I: Basic Theory.
- Penot, J. P. (1998). Second-order conditions for optimization problems with constraints. *SIAM J. Control Optim.*, 37, 303-318. <https://doi.org/10.1137/S0363012996311095>
- Sawaragi, Y., Nakayama, H., & Tanino, T. (1985). *Theory of Multiobjective Optimization*. New York: Academic Press.
- Shi, D. S. (1991). Contingent derivative of the perturbation map in multiobjective optimization. *J. Optim. Theory Appl.*, 70, 385-396. <https://doi.org/10.1007/BF00940634>
- Shi, D. S. (1993). Sensitivity analysis in convex vector optimization. *J. Optim. Theory Appl.*, 77, 145-159. <https://doi.org/10.1007/BF00940783>
- Sun, X. K., & Li, S. J. (2014). Generalized second-order contingent epiderivatives in parametric vector optimization problem. *J. Glob. Optim.*, 58, 351-363. <https://doi.org/10.1007/s10898-013-0054-1>
- Tanino, T. (1988a). Sensitivity analysis in multiobjective optimization. *J. Optim. Theory Appl.*, 56, 479-499. <https://doi.org/10.1007/BF00939554>
- Tanino, T. (1988b). Stability and sensitivity analysis in convex vector optimization. *SIAM J. Control Optim.*, 26, 521-536. <https://doi.org/10.1137/0326031>
- Tung, L. T. (2017a). Second-order radial-asymptotic derivatives and applications in set-valued vector optimization. *Pac. J. Optim.*, 13, 137-153. <http://www.yokohamapublishers.jp/online-p/PJO/vol13/pjov13n1p137.pdf>
- Tung, L. T. (2017b). Variational sets and asymptotic variational sets of proper perturbation map in parametric vector optimization. *Positivity.*, 21, 1647-1673. <https://doi.org/10.1007/s11117-017-0491-z>
- Tung, L. T. (2018). On second-order proto-differentiability of perturbation maps. *Set-Valued*

- Var. Anal.*, 26, 561-579. <https://doi.org/10.1007/s11228-016-0397-0>
- Tung, L. T. (2021). On higher-order proto-differentiability and higher-order asymptotic proto-differentiability of weak perturbation maps in parametric vector optimization. *Positivity*, 25(2), 579-604. <https://doi.org/10.1007/s11117-020-00778-2>
- Tung, N. M. (2021). Second-order efficient optimality conditions for set-valued vector optimization in terms of asymptotic contingent epiderivatives. *RAIRO Oper. Res.*, 55, 841-860. <https://doi.org/10.1051/ro/2021039>