



DOI: <https://doi.org/10.52714/dthu.14.04S.2025.1567>

ĐÁNH GIÁ CẬN TRÊN TRONG KHÔI PHỤC HÀM SỐ THUỘC KHÔNG GIAN BESOV BẰNG PHƯƠNG PHÁP TUYẾN TÍNH

Nguyễn Mạnh Cường

Trường Đại học Kiên Giang, Việt Nam

Tác giả liên hệ, Email: nmcuong@vnkgu.edu.vn

Lịch sử bài báo

Ngày nhận: 10/6/2025; Ngày nhận chỉnh sửa: 22/6/2025; Ngày duyệt đăng: 27/6/2025

Tóm tắt

Bài báo nghiên cứu sự khôi phục và xấp xỉ hàm số trong không gian Besov có độ trơn hỗn hợp bằng phương pháp tuyến tính. Chúng tôi sẽ xây dựng các phương pháp tuyến tính từ giá trị lấy mẫu để khôi phục hàm số thuộc không gian Besov và đánh giá cận trên tốc độ hội tụ của phương pháp. Kết quả chính của bài báo là mở rộng và tổng quát các kết quả đã có.

Từ khóa: *Không gian Besov, khôi phục tuyến tính, khôi phục phi tuyến thích nghi*

Trích dẫn: Nguyễn, M. C. (2025). Đánh giá cận trên trong khôi phục hàm số thuộc không gian Besov bằng phương pháp tuyến tính. *Tạp chí Khoa học Đại học Đồng Tháp*, 14(04S), 94-107. <https://doi.org/10.52714/dthu.14.04S.2025.1567>

Copyright © 2025 The author(s). This work is licensed under a CC BY-NC 4.0 License.

UPPER BOUND EVALUATION IN FUNCTION RECOVERY BY LINEAR METHOD IN THE BESOV SPACE

Nguyen Manh Cuong

Kien Giang University, Vietnam

Corresponding author, Email: nmcuong@vnkgu.edu.vn

Article history

Received: 10/6/2025; Received in revised form: 22/6/2025; Accepted: 27/6/2025

Abstract

This paper studies recovery and approximation of functions in the Besov spaces with mixed smoothness by linear methods. Accordingly, linear sampling recovery methods of functions are conducted in the Besov spaces and the upper bound of the method is evaluated. The main result of this paper is to extend and generalize the previous results.

Keywords: *Besov-type spaces, linear sampling recovery, nonlinear adaptive sampling recovery.*

1. Giới thiệu

Bài toán khôi phục tín hiệu là một bài toán quan trọng trong lĩnh vực xử lý tín hiệu, xử lý ảnh và thị giác máy tính, vì trong thực tế không có một loại máy nào có thể cho ta thông tin chính xác của tín hiệu. Khi đó tín hiệu được mô hình hóa như một hàm số một biến hay nhiều biến.

Chúng ta nghiên cứu bài toán nền tảng về khôi phục hàm số từ hữu hạn giá trị lấy mẫu: khôi phục gần đúng hàm số f từ n giá trị lấy mẫu. Trên cơ sở thông tin này chúng ta xây dựng một phương pháp để khôi phục. Trong cách tiếp cận truyền thống thì giá trị lấy mẫu và phương pháp khôi phục là không thích nghi với hàm số, nghĩa là các điểm lấy mẫu và phương pháp khôi phục được chọn giống nhau cho mọi hàm số. Bài báo này nghiên cứu một trong những phương pháp khôi phục không thích nghi đó là phương pháp tuyến tính cho lớp hàm số thuộc không gian Besov. Lý thuyết sóng nhỏ được hình thành và phát triển trong những năm 90 của thế kỷ trước, là một trong những công cụ biểu diễn hiệu quả trong bài toán khôi phục và xấp xỉ hàm số từ giá trị lấy mẫu, vì vậy để nghiên cứu bài toán khôi phục hàm số ta sẽ sử dụng các biểu diễn sóng nhỏ giả nội suy bởi các B-spline (Chui, 1992; DeVore and Lorentz, 1993). Phương pháp tuyến tính là phương pháp truyền thống và mặc dù có nhiều cách tiếp cận cho bài toán khôi phục hàm số nhưng phương pháp tuyến tính vẫn luôn được quan tâm nghiên cứu bởi ưu điểm của nó, có thể kể đến các công trình nghiên cứu của Temlyakov (1985,1993), Dinh (2011a, 2016), Nguyen và Mai (2018).

Bài báo nghiên cứu khôi phục và xấp xỉ cho lớp hàm số thuộc không gian Besov với độ trơn hỗn hợp $B_{p,\theta}^a$, $a = (a_1, a_2, \dots, a_d) \in \mathbb{R}_+^d$ bằng phương pháp tuyến tính. Dinh (2016) đã nghiên cứu khôi phục và xấp xỉ hàm số bằng phương pháp tuyến tính cho lớp hàm số thuộc không gian Besov $B_{p,\theta}^a$ khi $a_1 < a_2 \leq \dots \leq a_d$, xây dựng phương pháp tuyến tính và đánh giá tiệm cận tốc độ hội tụ của phương pháp

$$r_n \left(U_{p,\theta}^a, L_q(\mathbb{I}^d) \right) \asymp n^{-a_1 + (1/p - 1/q)_+}.$$

Dinh (2011a) nghiên cứu cho trường hợp $\alpha = a_1 = a_2 = \dots = a_d$, xây dựng phương pháp tuyến tính để khôi phục và xấp xỉ hàm số trong không gian Besov $B_{p,\theta}^{\alpha \mathbf{1}}$, với $0 < p, \theta, q \leq \infty$ và $\alpha > 1/p$. Hơn nữa ta có

$$r_n \left(U_{p,\theta}^{\alpha \mathbf{1}}, L_q(\mathbb{I}^d) \right) \asymp n^{-\alpha + (1/p - 1/q)_+} \log_2^{(d-1)b} n,$$

với $b = b(p, q, \alpha, \theta) > 0$.

Trong bài báo này sẽ nghiên cứu khôi phục xấp xỉ hàm số trong không gian Besov $B_{p,\theta}^a$ với $0 < \alpha = a_1 = a_2 = \dots = a_s = a_{s+1} < a_{s+2} \leq \dots \leq a_d, 0 \leq s \leq d-1$. Chúng ta đạt được kết quả mới là xây dựng phương pháp tuyến tính và đánh giá cận trên tốc độ hội tụ của phương pháp

$$r_n \left(U_{p,\theta}^a, L_q(\mathbb{I}^d) \right) \ll n^{-(\alpha - (1/p - 1/q)_+)} \log_2^{s(\alpha - (1/p - 1/q)_+)} n.$$

Nhận thấy rằng khi $s = d - 1, s = 0$ ta được các đánh giá cận trên ở (Dinh, 2011a; Dinh, 2016).

2. Kiến thức chuẩn bị

Các ký hiệu sau đây sẽ được sử dụng trong bài báo: $A_n(f) \ll B_n(f)$ nếu $A_n(f) \leq C \cdot B_n(f)$, C là một hằng số độc lập với n và f ; $A_n(f) \asymp B_n(f)$ nếu $A_n(f) \ll B_n(f)$ và $B_n(f) \ll A_n(f)$; Cho $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}_+^d$: $x_+ = \max(0, x)$, $2^k = (2^{k_1}, \dots, 2^{k_d})$, $|k|_1 = \sum_{i=1}^d k_i$, $k \geq k'$ nếu $k_j \geq k'_j$, $\forall j = 1, \dots, d$; $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^d$; $\mathbb{I} = [0, 1]$.

Ta nhắc lại định nghĩa không gian Besov $B_{p,\theta}^a$ (Nguyen, 2019; Dinh, 2001).

Định nghĩa 1. Cho f là một hàm số thuộc không gian $L_q(\mathbb{I}^d)$, e là tập con bất kỳ của $[d] := \{1, 2, \dots, d\}$, toán tử sai phân bậc (l, e) của hàm số nhiều biến xác định trên $\mathbb{I}^d$ ký hiệu là $\Delta_h^{l,e}$ và được xác định bởi

$$\Delta_h^{l,e} := \prod_{i \in e} \Delta_{h_i}^l, \quad \Delta_h^{l,\emptyset} = I,$$

ở đây toán tử $\Delta_{h_i}^l$ là toán tử sai phân tương ứng với hàm số khi xem f là hàm số một biến của biến x_i với các biến còn lại cố định. Đặt

$$\omega_l^e(f, t)_p := \sup_{|h_i| < t_i, i \in e} \|\Delta_h^{l,e} f\|_p, \quad t \in \mathbb{I}^d$$

là môđun tron hỗn hợp bậc (l, e) của f . Đặc biệt, $\omega_l^\emptyset(f, t)_p = \|f\|_p$. Cho $0 < p, \theta \leq \infty, a = (a_1, a_2, \dots, a_d) \in \mathbb{R}_+^d$. Chúng ta xây dựng nửa chuẩn $|f|_{B_{p,\theta}^{a,e}}$ của hàm số $f \in L_p(\mathbb{I}^d)$ như sau:

$$|f|_{B_{p,\theta}^{a,e}} := \begin{cases} \left(\int_{\mathbb{I}^d} \left\{ \prod_{i \in e} t_i^{-a_i} \omega_l^e(f, t)_p \right\}^\theta \prod_{i \in e} t_i^{-1} dt \right)^{1/\theta}, & \theta < \infty \\ \sup_{t \in \mathbb{I}^d} \left\{ \prod_{i \in e} t_i^{-a_i} \omega_l^e(f, t)_p \right\}, & \theta = \infty \end{cases}$$

Trường hợp đặc biệt, $|f|_{B_{p,\theta}^{a,\emptyset}} = \|f\|_p$, ở đây l là một số tự nhiên thỏa mãn $l > \max_{1 \leq i \leq d} a_i$.

Định nghĩa nửa chuẩn này không phụ thuộc vào l , nói cách khác các giá trị khác nhau của l xác định các nửa chuẩn tương đương. Không gian $B_{p,\theta}^a$ là tập hợp tất cả các hàm số $f \in L_p(\mathbb{I}^d)$ sao cho chuẩn Besov sau đây là hữu hạn

$$\|f\|_{B_{p,\theta}^a} := \sum_{e \subset [d]} |f|_{B_{p,\theta}^{a,e}}.$$

Ký hiệu $U_{p,\theta}^a = \{f \in B_{p,\theta}^a: \|f\|_{B_{p,\theta}^a} \leq 1\}$ là hình cầu đơn vị của không gian $B_{p,\theta}^a$.

Định nghĩa 2. Ký hiệu N_r là B-spline chuẩn tắc bậc r với các nút tại các điểm $0, 1, \dots, r$ được xác định như sau: N_1 là hàm đặc trưng trên nửa khoảng $[0, 1)$; với $r \geq 2$, N_r được định nghĩa bởi tích chập

$$N_r(x) := \int_{-\infty}^{\infty} N_{r-1}(x-y)N_1(y)dy.$$

Đặt $M_r(x) := N_r(x + r/2)$ được gọi là B-spline trung tâm bậc r . Định nghĩa 2 có thể xem trong các tài liệu (Chui, 1992; DeVore & Lorentz, 1993).

3. Biểu diễn B-spline giả nội suy qua giá trị lấy mẫu

Chúng ta định nghĩa B - spline sóng nhỏ

$$M_{k,s}(x) := M(2^k x - s)$$

cho một số không âm k và $s \in \mathbb{Z}$. Ký hiệu $\mathbf{M}$ là tập hợp tất cả $M_{k,s}$ không triệt tiêu trên $\mathbb{I}$. Cho $\lambda = \{\lambda(j)\}_{j \in P(\mu)}$ là dãy chặn hữu hạn, tức là $\lambda(j) = \lambda(-j)$, ở đây $P(\mu) := \{j \in \mathbb{Z}: |j| \leq \mu\}$ và $\mu \geq r - 1$. Chúng ta định nghĩa toán tử tuyến tính Q tác động lên hàm f xác định trên $\mathbb{R}$ bởi

$$Q(f, x) := \sum_{s \in \mathbb{Z}} \Lambda(f, s)M(x - s), \quad (1)$$

ở đây

$$\Lambda(f, s) := \sum_{j \in P(\mu)} \lambda(j)f(s - j). \quad (2)$$

Khi đó, từ định nghĩa của B-spline suy ra toán tử Q bị chặn trên $C(\mathbb{R})$ và

$$\|Q(f)\|_{C(\mathbb{R})} \leq \|\Lambda\| \|f\|_{C(\mathbb{R})},$$

trong đó $\|\Lambda\| = \sum_{j \in P(\mu)} |\lambda(j)|$.

Ký hiệu $\mathcal{P}_{2r-1}$ là tập hợp các đa thức đại số có bậc không vượt quá $2r - 1$. Toán tử Q được xác định từ (1 - 2) được gọi là toán tử giả nội suy trong $C(\mathbb{R})$ nếu toán tử này tái tạo lại $\mathcal{P}_{2r-1}$, tức là

$$Q(p) = p, p \in \mathcal{P}_{2r-1}.$$

Giả sử Q là một toán tử giả nội suy từ (1 – 2), cho $h > 0$ và một hàm f xác định trên $\mathbb{R}$, chúng ta xác định toán tử $Q(\cdot; h)$ bởi

$$Q(f; h) := \sigma_h \circ Q \circ \sigma_{1/h}(f),$$

ở đây $\sigma_h(f, x) = f(x/h)$. Từ định nghĩa của $Q(f; h)$, ta có

$$Q(f, x; h) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Lambda(f, k; h) M(h^{-1}x - k),$$

với

$$\Lambda(f, k; h) = \sum_{j \in P(\mu)} \lambda(j) f(h(k - j)).$$

Toán tử $Q(\cdot; h)$ có các tính chất tương tự như toán tử Q , cũng được gọi là một toán tử giả nội suy trên $C(\mathbb{R})$. Nhưng $Q(\cdot; h)$ không được định nghĩa cho f trên $\mathbb{I}$, do đó chưa khôi phục được hàm số f với các điểm lấy mẫu trong $\mathbb{I}$. Một cách tiếp cận được Dinh đề xuất trong (Dinh, 2009; Dinh, 2011b) để xây dựng toán tử giả nội suy cho một hàm số trên $\mathbb{I}$ là mở rộng nó bằng các đa thức nội suy Lagrange.

Cho một số nguyên không âm k , đặt $x_j = j2^{-k}, j \in \mathbb{Z}$. Nếu f là một hàm số trên $\mathbb{I}$, ký hiệu $U_k(f)$ và $V_k(f)$ lần lượt là các đa thức nội suy Lagrange tại $2r$ điểm bên trái $x_0, x_1, \dots, x_{2r-1}$ và $2r$ điểm bên phải $x_{2^k-2r+1}, x_{2^k-2r+3}, \dots, x_{2^k}$ trên đoạn $\mathbb{I}$ được xác định bởi:

$$U_k(f, x) := f(x_0) + \sum_{s=1}^{2r-1} \frac{2^{sk} \Delta_{2^{-k}}^s f(x_0)}{s!} \prod_{j=0}^{s-1} (x - x_j)$$

$$V_k(f, x) := f(x_{2^k-2r+1}) + \sum_{s=1}^{2r-1} \frac{2^{sk} \Delta_{2^{-k}}^s f(x_{2^k-2r+1})}{s!} \prod_{j=0}^{s-1} (x - x_{2^k-2r+1+j}).$$

Ký hiệu $\bar{f}_k$ là hàm số mở rộng của f trên $\mathbb{R}$ và được xác định bởi:

$$\bar{f}_k(x) = \begin{cases} U_k(f, x), & x < 0 \\ f(x), & 0 \leq x \leq 1 \\ V_k(f, x), & x > 1. \end{cases}$$

Nếu f liên tục trên $\mathbb{I}$ thì $\bar{f}_k$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Giả sử Q là một toán tử giả nội suy (1 – 2) trên $C(\mathbb{R})$. Chúng ta xây dựng toán tử Q_k xác định bởi

$$Q_k(f, x) := Q(\bar{f}_k, x; 2^{-k}), x \in \mathbb{I}$$

với hàm f trên $\mathbb{I}$. Khi đó,

$$Q_k(f, x) = \sum_{s \in J(k)} a_{k,s}(f) M_{k,s}(x), \forall x \in \mathbb{I},$$

trong đó

$$J(k) := \{s \in \mathbb{Z}, -r < s < 2^k + r\}$$

và

$$a_{k,s}(f) := \Lambda(\bar{f}_k, s; 2^{-k}) = \sum_{|j| \leq \mu} \lambda(j) \bar{f}_k(2^{-k}(s - j)).$$

Chúng ta nhận thấy Q_k cũng là toán tử giả nội suy trên $\mathcal{C}(\mathbb{I})$.

Cho $k \in \mathbb{Z}_+^d$, ta định nghĩa toán tử hỗn hợp Q_k :

$$Q_k := \prod_{i=1}^d Q_{k_i} \quad (3)$$

ở đây các toán tử một biến Q_{k_i} được áp dụng tương tự cho hàm số một biến khi xem f là hàm số một biến x_i và các biến còn lại cố định. Ta cũng định nghĩa d-biến B-spline $M_{k,s}$ như sau

$$M_{k,s}(x) := \prod_{i=1}^d M_{k_i, s_i}(x_i). \quad (4)$$

Chúng ta xây dựng toán tử nhiều biến Q_k được xác định bởi

$$Q_k(f, x) = \sum_{s \in J(k)} a_{k,s}(f) M_{k,s}(x), \forall x \in \mathbb{I}^d$$

ở đây

$$J(k) := \{s \in \mathbb{Z}^d, -r < s_i < 2^{k_i+k_0} + r, i = 1, 2, \dots, d\}$$

là tập hợp các giá trị của s sao cho $M_{k,s}$ không đồng nhất bằng 0 trên $\mathbb{I}^d$. Chú ý rằng

$$a_{k,s}(f) = a_{k_1, s_1} \left(\left(a_{k_2, s_2} \left(\dots a_{k_d, s_d}(f) \right) \right) \right) \quad (5)$$

với các hàm hệ số a_{k_i, s_i} được áp dụng tương tự cho hàm số một biến khi xem f là hàm số một biến x_i với các biến còn lại cố định.

Tương tự như toán tử Q và $Q(\cdot; h)$, thì toán tử Q_k là tuyến tính bị chặn trên $\mathcal{C}(\mathbb{I}^d)$ và tái tạo $\mathcal{P}_{2r-1}$. Đặc biệt, chúng ta có:

$$\|Q_k(f)\|_{C(\mathbb{R}^d)} \leq C\|\Lambda\|\|f\|_{C(\mathbb{R}^d)} \quad (6)$$

với mỗi $f \in C(\mathbb{I}^d)$, hằng số C không phụ thuộc k và

$$Q_k(\varphi^*) = \varphi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{P}_{2r-1},$$

trong đó φ^* là hạn chế của φ trên $\mathbb{I}^d$. Toán tử nhiều biến Q_k được gọi là toán tử giả nội suy trên $C(\mathbb{I}^d)$.

Cho $k \in \mathbb{Z}_+$, đặt $q_k := Q_k - Q_{k-1}$ với quy ước $Q_{-1}(f) = 0$, chúng ta có

$$Q_k = \sum_{k' \leq k} q_{k'}.$$

Bổ đề 1. Giả sử $f \in C(\mathbb{I}^d)$. Khi đó, ta có

$$\|f - Q_k(f)\|_\infty \leq C\omega_{2r}(f, 2^{-k})_\infty. \quad (7)$$

Do đó

$$\|f - Q_k(f)\|_\infty \rightarrow 0, k \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Bất đẳng thức (7) được suy ra từ (2.29)-(2.31) trong (Dinh, 2011b) và bất đẳng thức (6).

Cho bất kỳ $f \in C(\mathbb{I}^d)$, từ (8) suy ra f có thể biểu diễn thành chuỗi

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} q_k(f), \quad (9)$$

với

$$q_k(f) = \sum_{s \in J(k)} c_{k,s}(f) M_{k,s},$$

chuỗi này hội tụ theo chuẩn trong $L_\infty(\mathbb{I}^d)$, $c_{k,s}$ là các phiếm hàm hệ số của f , được xác định như sau. Đầu tiên xác định $c_{k,s}$ cho hàm số một biến:

$$\begin{aligned} c_{k,s}(f) &:= a_{k,s}(f) - a'_{k,s}(f), k \geq 0, \\ a'_{k,s}(f) &:= 2^{-2r+1} \sum_{(m,j) \in C_r(k,s)} \binom{2r}{j} a_{k-1,m}(f), k > 0, a'_{0,s}(f) := 0, \end{aligned}$$

ở đây

$$C_r(k, s) := \{(m, j) : 2m + j - r = s, m \in J(k-1), 0 \leq j \leq 2r\},$$

với $k > 0$, $C_r(0, s) := \{0\}$. Trong trường hợp hàm nhiều biến, chúng ta xác định $c_{k,s}$ tương tự như (5), tức là $c_{k,s}(f) = c_{k_1,s_1} \left(\left(c_{k_2,s_2} \left(\dots c_{k_d,s_d}(f) \right) \right) \right)$, với các hàm hệ số c_{k_i,s_i} áp dụng cho hàm số một biến khi xem f là hàm số với biến x_i với các biến còn lại cố định.

Cho $k \in \mathbb{Z}_+^d$, ký hiệu $\Sigma(k)$ là không gian sinh bởi các B-splines $M_{k,s} \in J(k)$. Nếu $0 < p \leq \infty$ thì $g \in \Sigma(k)$ được biểu diễn bởi

$$g = \sum_{s \in J(k)} a_s M_{k,s}$$

và đẳng thức sau (Dinh, 2011b)

$$\|g\|_p \asymp 2^{-|k|_1/p} \|\{a_s\}\|_{p,k}, \quad (10)$$

với

$$\|\{a_s\}\|_{p,k} := \left(\sum_{s \in J(k)} |a_s|^p \right)^{1/p},$$

với vế phải thay bằng supremum khi $p = \infty$.

Chúng ta cần bất đẳng thức về chuẩn trong $L_p(D)$ như sau: Nếu τ là số thỏa mãn $0 < \tau \leq \min(p, 1)$ thì với dãy hàm bất kỳ $\{f_k\} \subset L_p(D)$ ta có bất đẳng thức

$$\left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} f_k \right\|_{p,D}^\tau \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \|f_k\|_{p,D}^\tau. \quad (11)$$

Định lý sau đây được chứng minh trong (Dinh, 2016).
Định lý 1. Cho $0 < p, \theta \leq \infty$ và $a \in \mathbb{R}_+^d$. Khi đó ta có
 (i) Nếu $1/p < \alpha < 2r$ thì một hàm số $f \in B_{p,\theta}^a$ có thể biểu diễn thành chuỗi (9) và

$$B_2(f) := \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}_+^d} \{2^{(a,k)} \|q_k(f)\|_p\}^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll \|f\|_{B_{p,\theta}^a}. \quad (12)$$

(ii) Nếu $0 < \alpha < \min(2r, 2r - 1 + 1/p)$ và g là một hàm số được biểu diễn bởi

$$g = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^d} g_k = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^d} \sum_{s \in J(k)} c_{k,s} M_{k,s}$$

sao cho

$$B_4(g) := \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}_+^d} \{2^{(a,k)} \|g_k\|_p\}^\theta \right)^{1/\theta} < \infty,$$

thì $g \in B_{p,\theta}^a$ và $\|g\|_{B_{p,\theta}^a} \ll B_4(g)$.

(iii) Nếu $1/p < \alpha < \min(2r, 2r - 1 + 1/p)$ thì một hàm số f xác định trên $\mathbb{I}^d$ thuộc $B_{p,\theta}^a$ khi và chỉ khi f có thể biểu diễn thành chuỗi có dạng (9) thỏa mãn điều kiện (12). Hơn nữa, chuẩn $\|f\|_{B_{p,\theta}^a}$ là tương đương với chuẩn $B_2(f)$.

4. Khôi phục và xấp xỉ hàm số bằng phương pháp tuyến tính

Giả sử $L_q(\mathbb{I}^d)$ là một không gian với chuẩn tích phân $\|\cdot\|_q$ thông thường cho trường hợp $0 < q < \infty$ và không gian $C(\mathbb{I}^d)$ các hàm liên tục với chuẩn $\max\|\cdot\|_\infty$ cho $q = \infty$ theo nghĩa: $\forall f, g \in L_q(\mathbb{I}^d)$ ta có $\|f + g\|_q \leq C(\|f\|_q + \|g\|_q)$, với hằng số $C = C(p) > 0$.

Chúng ta xét bài toán khôi phục xấp xỉ hàm số xác định trên $\mathbb{I}^d = [0,1]^d$. Hàm số cần khôi phục thuộc tập hợp $W \subset L_q(\mathbb{I}^d)$, $0 < q \leq \infty$.

Để khôi phục hàm số f được xác định trên $\mathbb{I}^d$ từ các giá trị lấy mẫu $f(x^1), \dots, f(x^n)$, chúng ta định nghĩa phương pháp tuyến tính dựa trên giá trị lấy mẫu sau đây

Định nghĩa 3. Cho $X_n = \{x^j\}_{j=1}^n$ là n điểm của $\mathbb{I}^d$, $\Phi_n = \{\varphi_j\}_{j=1}^n$ là họ n hàm số thuộc không gian $L_q(\mathbb{I}^d)$. Ta định nghĩa phương pháp tuyến tính

$$L_n(X_n, \Phi_n, f) := \sum_{j=1}^n f(x^j) \varphi_j. \quad (13)$$

Cho $W \subset L_q(\mathbb{I}^d)$. Chúng ta nghiên cứu tính tối ưu của phương pháp tuyến tính có dạng (13) để khôi phục hàm số $f \in W$ từ n giá trị lấy mẫu bằng đại lượng sau

$$\varrho_n(W, L_q(\mathbb{I}^d)) := \inf_{X_n, \Phi_n} \sup_{f \in W} \|f - L_n(X_n, \Phi_n, f)\|_q.$$

Định nghĩa 3 có thể xem trong (Nguyen & Mai, 2018).

Cho số nguyên không âm m , đặt $K(\xi) := \{(k, s) : k \in \Delta_\xi, s \in I^d(k)\}$, ở đây $I^d(k) = \{s \in \mathbb{Z}_+^d : 0 \leq s_i \leq 2^{k_i}\}$ và ký hiệu $M(\xi)$ là tập hợp gồm các B-splines $M_{k,s}$, $k \in \Delta_\xi, s \in J(k)$.

Tập hợp $G(\xi) := \{2^{-k}s : (k, s) \in K(\xi)\}$ các điểm thuộc $\mathbb{I}^d$ được gọi là lưới Smolyak (Nikol'skii, 1975).

Chúng ta định nghĩa toán tử R_Δ của các hàm số $f \in B_{p,\theta}^a$ bởi

$$R_\Delta(f) := \sum_{k \in \Delta_\xi} q_k(f) = \sum_{k \in \Delta_\xi} \sum_{s \in J(k)} c_{k,s}(f) M_{k,s}.$$

Bổ đề sau đây được suy ra từ Bổ đề 3.1 trong (Dinh, 2016).

Bổ đề 2. Toán tử R_Δ xác định một phương pháp tuyến tính có dạng (13) trên lưới $G(\xi)$. Cụ thể,

$$R_\Delta(f) = L_n(X_n, \Phi_n, f) = \sum_{(k,s) \in K(\xi)} f(2^{-k}s) \psi_{k,s}$$

ở đây $X_n := G(\xi)$, $\Phi_n := \{\psi_{k,s}\}_{(k,s) \in K(\xi)}$, $n := |G(\xi)| = \sum_{k \in \Delta_\xi} 2^{|k|_1}$

và $\psi_{k,s}$ được xác định là tổ hợp tuyến tính của không quá NB-splines $M_{k,s} \in M(\xi)$ với N độc lập với k, j, ξ và f .

Để chứng minh kết quả chính của bài báo, ta cần thêm bổ đề sau.

Bổ đề 3. Cho ξ là một số tự nhiên, ký hiệu $\Delta_\xi := \{k \in \mathbb{Z}_+^d : (a - (1/p - 1/q)_+, k) \leq \xi\}$. Khi đó tồn tại các hằng số dương C_1 và C_2 sao cho

$$C_2 2^{\xi/(\alpha - (1/p - 1/q)_+)} \xi^s \leq \sum_{k \in \Delta_\xi} 2^{|k|_1} \leq C_1 2^{\xi/(\alpha - (1/p - 1/q)_+)} \xi^s. \quad (14)$$

Xem chứng minh Bổ đề 3 trong (Nguyen, 2021; Dinh, 2000).

Định lý sau đây là kết quả chính và mới của bài báo, ở đó chúng ta xây dựng được phương pháp tuyến tính $R_\Delta(f)$, đánh giá tiệm cận tốc độ hội tụ của phương pháp để khôi phục hàm số thuộc không gian Besov $B_{p,\theta}^a$, $a \in \mathbb{R}_+^d$.

Định lý 2. Cho $0 < p, q, \theta \leq \infty$. Giả sử với mỗi $n \in \mathbb{Z}_+$, ξ là số tự nhiên lớn nhất thỏa mãn

$$|G(\xi)| \leq n. \quad (15)$$

Khi đó R_Δ xác định phương pháp tuyến tính lấy mẫu tối ưu cho $\mathcal{Q}_n := \mathcal{Q}_n(U_{p,\theta}^a, L_q)$ như sau

$$R_\Delta(f) = L_n(X_n^*, \Phi_n^*, f) = \sum_{(k,s) \in K(\xi)} f(2^{-k}s) \psi_{k,s} \quad (16)$$

trong đó $X_n^* := G(\xi) = \{2^{-k}s : (k, s) \in K(\xi)\}$, $\Phi_n^* := \{\psi_{k,s}\}_{(k,s) \in K(\xi)}$ và ta có

$$Q_n \ll \sup_{f \in U_{p,\theta}^a} \|f - R_\Delta(f)\|_q \ll n^{-(\alpha-(1/p-1/q)_+)} \log_2^{s(\alpha-(1/p-1/q)_+)} n. \quad (17)$$

Chứng minh. Đánh giá cận trên. Theo Bổ đề 3 và do ξ là số tự nhiên lớn nhất thỏa mãn (15) nên ta có

$$|G(\xi)| = 2^{\xi/(\alpha-(1/p-1/q)_+)} \xi^s \asymp n. \quad (18)$$

Từ đó suy ra tồn tại các hằng số dương C_1, C_2 sao cho: $C_1 n \leq 2^{\xi/(\alpha-(1/p-1/q)_+)} \xi^s \leq C_2 n$. Ta có $\log_2 C_1 + \log_2 n \leq \xi/(\alpha-(1/p-1/q)_+) + s \log_2 \xi \leq \log_2 C_2 + \log_2 n$.

Do đó

$$\frac{\log_2 C_1}{\xi} + \frac{\log_2 n}{\xi} \leq \frac{1}{(\alpha-(1/p-1/q)_+)} + s \frac{\log_2 \xi}{\xi} \leq \frac{\log_2 C_2}{\xi} + \frac{\log_2 n}{\xi},$$

cho $n \rightarrow \infty$ thì $\xi \rightarrow \infty$, ta được $\xi \asymp \log_2 n$ và do đó

$$2^{-\xi} \asymp n^{-(\alpha-(1/p-1/q)_+)} \log_2^{s(\alpha-(1/p-1/q)_+)} n. \quad (19)$$

Chúng ta lấy tùy ý $\xi \in \mathbb{Z}_+$, $f \in U_{p,\theta}^a$. Ta đi chứng minh cho

$$\sup_{f \in U_{p,\theta}^a} \|f - R_\Delta(f)\|_q \ll 2^{-\xi} \quad (20)$$

Xét $p \geq q$. Xuất phát từ bất đẳng thức $\|f\|_q \leq \|f\|_p$ dẫn đến chứng minh cho trường hợp này với $q = p$. Nếu $\theta \leq \min(p, 1)$, sử dụng Định lý 1 và (11), chúng ta nhận được

$$\begin{aligned} \|f - R_\Delta(f)\|_p &\ll \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}_+^d \setminus \Delta_\xi} \|q_k(f)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \\ &\ll \|f\|_{B_{p,\theta}^a} \sup_{k \in \mathbb{Z}_+^d \setminus \Delta_\xi} 2^{-(a,k)} \\ &\ll 2^{-\xi} \end{aligned}$$

Nếu $\theta > \min(p, 1)$, đặt $\tau = \min(p, 1)$.

$$\begin{aligned} \|f - R_{\Delta_\xi}(f)\|_p^\tau &\ll \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^d \setminus \Delta_\xi} \|q_k(f)\|_p^\tau \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^d \setminus \Delta_\xi} \{2^{(a,k)} \|q_k(f)\|_p\}^\tau \{2^{-(a,k)}\}^\tau \end{aligned} \quad (21)$$

Tồn tại $\theta^* > 0$ sao cho $1/\theta + 1/\theta^* = 1/\tau$. Từ (21) và Áp dụng bất đẳng thức Holder ta có

$$\|f - R_{\Delta_\xi}(f)\|_p \ll \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}_+^d \setminus \Delta_\xi} \{2^{(a,k)} \|q_k(f)\|_p\}^\theta \right)^{1/\theta} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}_+^d \setminus \Delta_\xi} \{2^{-(a,k)}\}^{\theta^*} \right)^{1/\theta^*} \\ \ll 2^{-\xi}$$

Xét trường hợp $p < q < \infty$. Cho $f \in B_{p,\theta}^a$, bởi Bổ đề 5.3 trong (Dinh, 2011a) chúng ta có

$$\|f - R_{\Delta_\xi}(f)\|_q^q \ll \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^d \setminus \Delta_\xi} \{2^{(1/p-1/q)|k|_1} \|q_k(f)\|_p\}^q$$

Nếu $\theta \leq q$, thì

$$\|f - R_{\Delta_\xi}(f)\|_q \ll \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}_+^d \setminus \Delta_\xi} \{2^{(1/p-1/q)|k|_1} \|q_k(f)\|_p\}^\theta \right)^{1/\theta} \\ \ll \|f\|_{B_{p,\theta}^a} \sup_{k \in \mathbb{Z}_+^d \setminus \Delta_\xi} 2^{(1/p-1/q)|k|_1} 2^{-(a,k)} \\ \ll 2^{-\xi}$$

Nếu $\theta > q$ thì

$$\|f - R_{\Delta_\xi}(f)\|_q^q \ll \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^d \setminus \Delta_\xi} \{2^{(1/p-1/q)|k|_1} \|q_k(f)\|_p\}^q \\ = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^d \setminus \Delta_\xi} \{2^{-(a,k)} 2^{(1/p-1/q)|k|_1}\}^q \{\|q_k(f)\|_p 2^{(a,k)}\}^q$$

Hơn nữa, có một số q^* thỏa mãn $1/q = 1/\theta + 1/q^*$. Áp dụng bất đẳng thức Hölder, chúng ta có

$$\|f - R_{\Delta_\xi}(f)\|_q \ll \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}_+^d \setminus \Delta_\xi} \{2^{-(a,k)} 2^{(1/p-1/q)|k|_1}\}^q \{\|q_k(f)\|_p 2^{(a,k)}\}^q \right)^{1/q} \\ \ll \|f\|_{B_{p,\theta}^a} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}_+^d \setminus \Delta_\xi} \{2^{-(a,k)} 2^{(1/p-1/q)|k|_1}\}^{q^*} \right)^{1/q^*} \\ \ll 2^{-\xi}.$$

Từ (18) và $R_\Delta(f)$ được xác định bởi (16), nhận thấy rằng số giá trị lấy mẫu trong $R_\Delta(f)$ là $|G(\xi)| = n$. Ngoài ra từ (19), (20) và các trường hợp đã xét $p \geq q$, $p < q < \infty$ ta có

$$\sup_{f \in U} \|f - R_{\Delta}(f)\|_q \ll n^{-(\alpha - (1/p - 1/q)_+)} \log_2^{s(\alpha - (1/p - 1/q)_+)} n.$$

Đánh giá cận trên (17) được hoàn thành.

6. Kết luận

Bài báo nghiên cứu khôi phục và xấp xỉ hàm số bằng phương pháp tuyến tính cho lớp hàm số thuộc không gian Besov $B_{p,\theta}^a$ với độ trơn hỗn hợp, xây dựng và đánh giá cận trên tốc độ hội tụ của phương pháp qua đại lượng đặc trưng. Kết quả mới của bài báo là mở rộng và tổng quát một số kết quả trong (Dinh, 2011a; Dinh, 2016).

Tài liệu tham khảo

- Chui, C. K. (1992). An Introduction to Wavelets, *Academic Press, New York*.
- DeVore, R. A., & Lorentz G. G. (1993). Constructive approximation, *Springer, Berlin*.
- Dinh, D. (2000), Continuous algorithms in n -term approximation and nonlinear widths. *J. Approx. Theory*, 102, 217-242.
- Dinh, D. (2001). Non-linear approximations using sets of finite cardinality or finite pseudo-dimension. *J. Complexity*, 17, 467-492.
- Dinh, D. (2009). Non-linear sampling recovery based on quasi-interpolant wavelet representations. *Adv. in Comput. Math.*, 30, 375-401.
- Dinh, D. (2011a). B-spline quasi-interpolant representations and sampling recovery of functions with mixed smoothness. *J. Complex.*, 27, 541-567.
- Dinh, D. (2011b). Optimal adaptive sampling recovery, *Adv. in Comput. Math.*, 34, 1-41.
- Dinh, D. (2016). Sampling and cubature on sparse grids based on a B-spline quasi-interpolation. *Found. Comp. Math.*, 16, 1193-1240.
- Nguyen, C. M., & Mai, T. X. (2018). Quasi-interpolation representation and sampling recovery of multivariate functions. *Acta Math. Vietnamica*, 43, 373-389.
- Nguyen, C. M. (2019). Nonlinear approximations of functions having mixed smoothness. *J. Comput. Sci. Cybern.*, 35, 119-134.
- Nguyen, C. M. (2021). Adaptive sampling recovery and nonlinear approximations of multivariate functions in Besov-type spaces. *Southeast Asian Bull. Math.*, 45, 461-482.
- Nikol'skii, S. (1975). Approximation of Functions of Several Variables and Embedding Theorems. *Springer Verlag, Berlin*.
- Temlyakov, V. (1993). Approximation of periodic functions. *Nova Science Publishers, Inc., New York*.
- Temlyakov, V. (1985). Approximation recovery of periodic functions of several variables. *Mat. Sb.*, 128, 256-268.