



DOI: <https://doi.org/10.52714/dthu.14.04S.2025.1614>

TỒN TẠI NGHIỆM CHO BÀI TOÁN TỐI ƯU HÀM KHOẢNG VỚI THỨ TỰ TỪ ĐIỂN

**Dương Thị Kim Nhân, Trần Thị Như Ý, Võ Thị Trúc My,
Bùi Ngọc Anh Thư và Đinh Ngọc Quý***

Bộ môn Toán, Khoa Khoa học Tự nhiên, Đại học Cần Thơ, Việt Nam

**Tác giả liên hệ, Email: dnquy@ctu.edu.vn*

Lịch sử bài báo

Ngày nhận: 28/6/2025; Ngày nhận chỉnh sửa: 16/8/2025; Ngày duyệt đăng: .../8/2025

Tóm tắt

Trong bài báo này, chúng tôi cung cấp hai khái niệm nghiệm cho bài toán tối ưu với hàm mục tiêu có giá trị khoảng dựa trên cấu trúc sắp xếp theo thứ tự từ điển. Đây là các thứ tự toàn phần để sắp xếp các khoảng nên kỳ vọng sẽ có nhiều ứng dụng và ý nghĩa trong thực tế. Dưới các thiết lập này, chúng tôi đưa ra các kết quả về sự tồn tại nghiệm cho bài toán tối ưu hàm khoảng được quan tâm.

Từ khóa: *hàm có giá trị khoảng, thứ tự từ điển, tối ưu hàm khoảng.*

Trích dẫn: Dương, T. K. N., Trần, T. N. Y., Võ, T. T. M., Bùi, N. A. T., & Đinh, N. Q. (2025). Tồn tại nghiệm cho bài toán tối ưu hàm khoảng với thứ tự từ điển. *Tạp chí Khoa học Đại học Đồng Tháp*, 14(04S), 453-466. <https://doi.org/10.52714/dthu.14.04S.2025.1614>

Copyright © 2025 The author(s). This work is licensed under a CC BY-NC 4.0 License.

EXISTENCE RESULTS FOR THE INTERVAL LEXICOGRAPHIC OPTIMIZATION PROBLEM

**Duong Thi Kim Nhan, Tran Thi Nhu Y, Vo Thi Truc My,
Bui Ngoc Anh Thu, and Dinh Ngoc Quy***

Department Mathematics, College of Natural Sciences, Can Tho University, Vietnam

**Corresponding author, Email: dnquy@ctu.edu.vn*

Article history

Received: 28/6/2025; Received in revised form: 16/8/2025; Accepted: .../8/2025

Abstract

In this paper, we provide two solution concepts for optimization problems with interval-valued objective functions based on lexicographic ordering structures. These lexicographic orderings are total orders, so they have many practical applications and significance. Under these settings, we present results on the existence of solutions for the optimization problem of interest.

Keywords: *interval optimization, interval-valued function, lexicographic order.*

1. Giới thiệu

Giải tích hàm khoảng đóng vai trò quan trọng trong nhiều lĩnh vực của toán học ứng dụng, đặc biệt trong lĩnh vực mờ hóa, thống kê ... (Moore, 1966). Như chúng ta đã biết, thứ tự thông thường " $\leq$ " là một thứ tự toàn phần trên $\mathbb{R}$, nghĩa là, đối với bất kỳ hai số thực nào trong $\mathbb{R}$, chúng ta có thể xác định thứ tự của chúng mà không gặp khó khăn. Tuy nhiên, đối với bất kỳ hai khoảng đóng nào trong $\mathbb{R}$, không có một thứ tự tự nhiên giữa tập hợp tất cả các khoảng đóng trong $\mathbb{R}$, và chúng ta phải định nghĩa một thứ tự để xác định thứ tự của chúng. Ishibuchi & Tanka (1990) đã giới thiệu cấu trúc sắp xếp thứ tự từng phần cho các khoảng. Với hai khoảng đóng $A = [\underline{a}; \bar{a}]$ và $B = [\underline{b}; \bar{b}]$ trong $\mathbb{R}$ thì $A \preceq B$ nếu và chỉ nếu $\underline{a} \leq \underline{b}$ và $\bar{a} \leq \bar{b}$. Trên cơ sở đó, Wu (2007, 2008a, 2008b) đã đề xuất các điều kiện tối ưu dạng Karush-Kuhn-Tucker, đưa ra các định lý đối ngẫu mạnh và yêu cầu bài toán tối ưu hàm khoảng. Bên cạnh đó, bạn đọc có thể tham khảo thêm nhiều kết quả về điều kiện tồn tại nghiệm cho bài toán tối ưu hàm khoảng dựa trên thứ tự từng phần giữa các khoảng (Wolf, 2000; Stefanini, 2009; Chalco-Cano & cs., 2013; Singh & cs., 2016; Zhang & cs., 2018; Ahmad & cs., 2019; Ghosh, 2017; Ghosh & cs., 2018; Ghosh & cs., 2019; Ghosh & cs., 2020a; Ghosh & cs., 2020b).

Các công trình trước đây, nghiên cứu về bài toán tối ưu hàm khoảng các tác giả chủ yếu tập trung vào thứ tự từng phần, điều này có thể gây khó khăn trong việc so sánh các khoảng. Cụ thể, trong thực tế với dự báo ngưỡng nhiệt độ của ngày Thứ Hai từ $20^{\circ}C$ đến $33^{\circ}C$ và ngày Thứ Ba từ $27^{\circ}C$ đến $30^{\circ}C$ thì dựa trên thứ tự từng phần " $\preceq$ " đã đề xuất thì ta không thể đưa ra quyết định nên được chọn ngày Thứ Hai hay ngày Thứ Ba để đi dã ngoại thì sẽ tốt hơn vì hai khoảng $[20; 33]$ và $[27; 30]$ là không so sánh được với nhau. Chính vì vậy, việc quan tâm và đề xuất các thứ tự toàn phần để sắp xếp các khoảng sẽ giúp chúng ta thuận lợi hơn trong việc loại bỏ sự không rõ ràng này và dễ dàng để đưa ra quyết định phương án tối ưu. Điều này sẽ có tiềm năng ứng dụng rộng rãi hơn trong thực tế.

Tối ưu hóa từ điển là một dạng của tối ưu hóa đa mục tiêu. Cụ thể với hai mục tiêu khác nhau, người ra quyết định có thể xếp hạng sao cho mục tiêu f_1 là quan trọng nhất, mục tiêu f_2 là quan trọng tiếp theo hoặc ngược lại. Điều này tạo ra một thứ tự từ điển tương tự như cách các từ được sắp xếp trong từ điển - bạn so sánh chữ cái đầu tiên trước, sau đó đến chữ cái thứ hai chỉ khi các chữ cái đầu tiên giống nhau. Thứ tự từ điển là một thứ tự toàn phần nên có rất nhiều ứng dụng và ý nghĩa trong thực tế. Cụ thể như trong phân bổ tài nguyên y tế thì tính mạng bệnh nhân được đặt lên hàng đầu trước khi tiết kiệm chi phí, trong chính sách môi trường thì việc đáp ứng tiêu chuẩn ô nhiễm được đặt trước hiệu quả kinh tế... Trong bài báo này, chúng tôi cung cấp hai khái niệm nghiệm cho bài toán tối ưu hóa với hàm mục tiêu có giá trị khoảng dựa trên cấu trúc sắp xếp theo thứ tự từ điển. Đối với hai khái niệm nghiệm này, hai mối quan hệ thứ tự toàn phần giữa hai khoảng đóng trong $\mathbb{R}$ sẽ được đề xuất. Dưới các thiết lập này, chúng tôi đưa ra các kết quả về sự tồn tại nghiệm cho bài toán tối ưu hóa với hàm mục tiêu có giá trị khoảng.

2. Kiến thức chuẩn bị

Trong bài báo này, nếu không có gì đặc biệt, chúng ta luôn quy ước $\mathfrak{T}$ là tập hợp các khoảng đóng bị chặn của $\mathbb{R}$:

$$\mathfrak{T} = \{[a, b]: a \leq b; a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Trong trường hợp *khoảng suy biến* chỉ có duy nhất một phần tử, ký hiệu $a = [a, a]$.

Cho hai khoảng $A = [\underline{a}; \bar{a}] \in \mathfrak{T}$, $B = [\underline{b}; \bar{b}] \in \mathfrak{T}$ và $\in \mathbb{R}$. Khi đó, phép cộng và phép nhân vô hướng trong $\mathfrak{T}$ được định nghĩa bởi:

$$A + B =: [\underline{a} + \underline{b}; \bar{a} + \bar{b}].$$

$$\lambda A := \begin{cases} [\lambda \underline{a}; \lambda \bar{a}] & \text{nếu } \lambda \geq 0, \\ [\lambda \bar{a}; \lambda \underline{a}] & \text{nếu } \lambda < 0. \end{cases}$$

Trước tiên, chúng ta nhắc lại các định nghĩa về tính nửa liên tục của hàm thực.

Định nghĩa 2.1. (Aubin & Ekeland, 1984) Cho (X, d) là không gian mêtric và hàm thực $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. Khi đó f được gọi là *nửa liên tục dưới* (lsc) tại điểm $x_0 \in X$ khi và chỉ khi

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq f(x_0).$$

Ta nói rằng f thỏa mãn một tính chất nào đó trên tập $A \subseteq X$ nếu f thỏa mãn tính chất đó tại mọi điểm của A . Nếu $A = X$ thì ta bỏ qua cụm từ “trên X ” trong cách phát biểu.

Mệnh đề 2.1. (Aubin & Ekeland, 1984) Cho X là không gian metric và hàm thực $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. Khi đó các khẳng định sau là tương đương:

- (i) Hàm f là hàm nửa liên tục dưới trên X ;
- (ii) Tập trên đồ thị $\text{epi } f = \{(x, a) \in X \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq a\}$ là tập đóng trong $X \times \mathbb{R}$;
- (iii) Tập mức dưới $\text{lev}_{\leq a} f = \{x \in X \mid f(x) \leq a\}$ là tập đóng trong X với mọi $a \in \mathbb{R}$.

Tiếp theo chúng ta sẽ nhắc lại mở rộng về tính nửa liên tục cho hàm có giá trị khoảng.

Định nghĩa 2.2. (Zhang & Huang, 2022) Cho khoảng $A = [\underline{a}; \bar{a}] \in \mathfrak{I}$ và $B = [\underline{b}; \bar{b}] \in \mathfrak{I}$. Ta xét quan hệ giữa hai khoảng trong $\mathfrak{I}$ dưới đây:

$$A \preccurlyeq B \text{ nếu và chỉ nếu } \underline{a} \leq \underline{b} \text{ và } \bar{a} \leq \bar{b}.$$

Khi đó, dễ dàng kiểm tra quan hệ $\preccurlyeq$ là một quan hệ thứ tự từng phần trong $\mathfrak{I}$. Khi A nhỏ hơn B theo thứ tự $\preccurlyeq$ thì ta có thể nói B lớn hơn A và ký hiệu là $B \succcurlyeq A$.

Định nghĩa 2.3. (Zhang & Huang, 2022) Cho (X, d) là không gian mêtric và $F: X \rightarrow \mathfrak{I}$ là hàm có giá trị khoảng. Khi đó, hàm F được gọi là *nửa liên tục dưới* (lsc) trên X nếu với mọi khoảng đóng $A \in \mathfrak{I}$ thì tập mức dưới theo thứ tự khoảng $\{x \in X : f(x) \preccurlyeq A\}$ là tập đóng.

Mệnh đề 2.2. (Zhang & Huang, 2022) Cho X là không gian mêtric và hàm có giá trị khoảng $F: X \rightarrow \mathfrak{I}$ với $F(x) = [\underline{f}(x), \bar{f}(x)]$, $\forall x \in X$. Khi đó, F là nửa liên tục dưới trên X khi và chỉ khi cả hai hàm $\underline{f}$ và $\bar{f}$ đều là hàm nửa liên tục dưới trên X .

Trong trường hợp hàm có giá trị khoảng F suy biến thành hàm thực (hàm khoảng có ảnh là khoảng suy biến đơn phần tử) thì định nghĩa nửa liên tục dưới của hàm có giá trị khoảng trùng với định nghĩa nửa liên tục dưới của hàm thực.

Dưới đây là định lý Weierstrass cổ điển, một định lý nền tảng cho phép khảo sát sự tồn tại nghiệm của bài toán tối ưu hàm thực.

Định lý 2.3. (Định lý Weierstrass) Cho (X, d) là không gian mêtric, $D \subset X$ là tập compact và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm thực. Khi đó nếu f là hàm nửa liên tục dưới trên D thì tập $\text{argmin}_{x \in D} f(x)$ là compact khác rỗng, trong đó $\text{argmin}_{x \in D} f(x) := \{\bar{x} \in X : f(\bar{x}) \leq f(x), \forall x \in D\}$.

Định lý 2.4. (Điều kiện bức) Cho hàm thực $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Nếu f nửa liên tục dưới và thỏa mãn điều kiện bức (tức là $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$) thì tập $\text{argmin}_{x \in X} f(x)$ là đóng khác rỗng.

3. Thứ tự từ điển giữa các khoảng

Trong mục này chúng tôi giới thiệu hai định nghĩa sắp thứ tự từ điển cho các khoảng đóng trong $\mathbb{R}$.

Định nghĩa 3.1. Cho khoảng $A = [\underline{a}; \overline{a}] \in \mathfrak{T}$ và khoảng $B = [\underline{b}; \overline{b}] \in \mathfrak{T}$. Ta xét quan hệ thứ tự từ điển dưới giữa hai khoảng trong $\mathfrak{T}$ dưới đây:

$$A \leq_{lex}^l B \text{ nếu và chỉ nếu } \begin{cases} \underline{a} < \underline{b} \\ \underline{a} = \underline{b} \\ \overline{a} \leq \overline{b} \end{cases}$$

Mệnh đề 3.1. Quan hệ $\leq_{lex}^l$ là một quan hệ thứ tự toàn phần trong $\mathfrak{T}$.

Chứng minh

Chúng ta lần lượt khảo sát các tính chất phản xạ, bắc cầu, phản xứng và tính toàn phần của quan hệ thứ tự được đề xuất.

- Quan hệ $\leq_{lex}^l$ có tính phản xạ. Thật vậy, xét khoảng $A = [\underline{a}; \overline{a}]$, ta có

$$\begin{cases} \underline{a} = \underline{a} \\ \overline{a} \leq \overline{a} \end{cases} \Rightarrow A \leq_{lex}^l A.$$

- Quan hệ $\leq_{lex}^l$ có tính phản đối xứng. Thật vậy, xét hai khoảng $A = [\underline{a}; \overline{a}] \in \mathfrak{T}$ và $B = [\underline{b}; \overline{b}] \in \mathfrak{T}$ thỏa $A \leq_{lex}^l B$ và $B \leq_{lex}^l A$. Khi đó, ta có:

$$\begin{cases} A \leq_{lex}^l B \\ B \leq_{lex}^l A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{a} < \underline{b} \\ \underline{a} = \underline{b} \\ \overline{a} \leq \overline{b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{a} < \underline{b} < \underline{a} \text{ (vô lý)} \\ \underline{a} = \underline{b} \\ \overline{a} \leq \overline{b} \leq \overline{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{a} = \underline{b} \\ \overline{a} = \overline{b} \end{cases} \Rightarrow A = B.$$

- Quan hệ $\leq_{lex}^l$ có tính bắc cầu. Xét ba khoảng $A = [\underline{a}; \overline{a}] \in \mathfrak{T}$, $B = [\underline{b}; \overline{b}] \in \mathfrak{T}$ và $C = [\underline{c}; \overline{c}] \in \mathfrak{T}$ thỏa $A \leq_{lex}^l B$ và $B \leq_{lex}^l C$. Khi đó, ta có:

$$\begin{cases} A \leq_{lex}^l B \\ B \leq_{lex}^l C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{a} < \underline{b} \\ \underline{a} = \underline{b} \\ \overline{a} \leq \overline{b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{a} < \underline{b} < \underline{c} \\ \underline{a} = \underline{b} < \underline{c} \\ \overline{a} \leq \overline{b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{a} < \underline{c} \\ \underline{a} = \underline{c} \\ \overline{a} \leq \overline{c} \end{cases} \Rightarrow A \leq_{lex}^l C.$$

- Quan hệ $\leq_{lex}^l$ có tính toàn phần. Thật vậy, lấy bất kỳ hai khoảng $A = [\underline{a}; \overline{a}] \in \mathfrak{T}$ và $B = [\underline{b}; \overline{b}] \in \mathfrak{T}$. Khi đó, do tính chất toàn phần của thứ tự trên $\mathbb{R}$, với hai số thực $\underline{a}$, $\underline{b}$ ta có các trường hợp sau:

+ Trường hợp $\underline{a} < \underline{b}$ thì ta có $A \leq_{lex}^l B$.

+ Trường hợp $\underline{a} > \underline{b}$ thì ta có $B \leq_{lex}^l A$.

+ Trường hợp $\underline{a} = \underline{b}$: khi đó do tính chất toàn phần của thứ tự trên $\mathbb{R}$ nên với hai số thực $\overline{a}$, $\overline{b}$ ta có nếu $\overline{a} \leq \overline{b}$ thì suy ra $A \leq_{lex}^l B$, còn nếu $\overline{b} < \overline{a}$ thì ta có $B \leq_{lex}^l A$.

Vậy quan hệ $\leq_{lex}^l$ được xét là một quan hệ thứ tự toàn phần. ■

Định nghĩa 3.2. Cho khoảng $A = [\underline{a}; \overline{a}] \in \mathfrak{T}$ và $B = [\underline{b}; \overline{b}] \in \mathfrak{T}$. Ta xét quan hệ thứ tự từ điển trên giữa hai khoảng trong $\mathfrak{T}$ dưới đây:

$$A \leq_{lex}^u B \text{ nếu và chỉ nếu } \begin{cases} \overline{a} < \overline{b} \\ \overline{a} = \overline{b}, \\ \underline{a} < \underline{b} \end{cases}$$

Bảng lập luận tương tự như Mệnh đề 3.1 ta có mệnh đề dưới đây.

Mệnh đề 3.2. Quan hệ $\leq_{lex}^u$ là một quan hệ thứ tự toàn phần trong $\mathfrak{T}$.

Cho X là không gian metric và $F: X \rightarrow \mathfrak{T}$ là hàm có giá trị khoảng. Ta khảo sát các bài toán tối ưu với hàm mục tiêu có giá trị khoảng dưới đây:

- **(IOP1):** Tìm $\bar{x} \in X$ sao cho nếu

$$F(x) \leq F(\bar{x}) \text{ thì } F(x) = F(\bar{x}).$$

- **(IOP2):** Tìm $\bar{x} \in X$ sao cho $\forall x \in X$

$$F(\bar{x}) \leq_{lex}^l F(x).$$

- **(IOP3):** Tìm $\bar{x} \in X$ sao cho $\forall x \in X$

$$F(\bar{x}) \leq_{lex}^u F(x).$$

Lần lượt ký hiệu các tập nghiệm của các bài toán trên là $S(F, \leq)$, $S(F, \leq_{lex}^l)$ và $S(F, \leq_{lex}^u)$. Trong trường hợp hàm có giá trị khoảng F suy biến thành hàm thực thì $S(F, \leq_{lex}^l) = S(F, \leq_{lex}^u) = S(F, \leq)$.

Mệnh đề 3.3. Cho X là không gian metric và $F: X \rightarrow \mathfrak{T}$ là hàm có giá trị khoảng. Khi đó, ta có:

- (i) $S(F, \leq_{lex}^u) \subset S(F, \leq)$.
- (ii) $S(F, \leq_{lex}^l) \subset S(F, \leq)$.

Chứng minh

(i) Giả sử $\bar{x} \in S(F, \leq_{lex}^u)$, ta sẽ chứng minh $\bar{x} \in S(F, \leq)$. Thật vậy, theo định nghĩa ta có:

$$F(\bar{x}) \leq_{lex}^u F(x), \forall x \in X.$$

Điều này tương đương, với mọi $x \in X$:

$$\begin{cases} \overline{f}(\bar{x}) < \overline{f}(x) \\ \overline{f}(\bar{x}) = \overline{f}(x), \\ \underline{f}(\bar{x}) \leq \underline{f}(x) \end{cases} \quad (3.1)$$

Giả sử tồn tại $x \in X$ thoả $F(x) \leq F(\bar{x})$, ta có:

$$\begin{cases} \underline{f}(x) \leq \underline{f}(\bar{x}) \\ \overline{f}(x) \leq \overline{f}(\bar{x}). \end{cases}$$

Kết hợp với (3.1) ta được:

$$\begin{cases} \underline{f}(x) = \underline{f}(\bar{x}) \\ \bar{f}(x) = \bar{f}(\bar{x}). \end{cases}$$

Từ đó suy ra $F(\bar{x}) = F(x)$. Vậy $\bar{x} \in S(F, \leq)$, kéo theo $S(F, \leq_{lex}^u) \subset S(F, \leq)$.

(ii) Giả sử $\bar{x} \in S(F, \leq_{lex}^l)$, ta sẽ chứng minh $\bar{x} \in S(F, \leq)$. Thật vậy theo định nghĩa ta có:

$$F(\bar{x}) \leq_{lex}^l F(x), \forall x \in X.$$

Điều này tương đương, với mọi $x \in X$:

$$\begin{cases} \underline{f}(\bar{x}) < \underline{f}(x) \\ \begin{cases} \underline{f}(\bar{x}) = \underline{f}(x) \\ \bar{f}(\bar{x}) \leq \bar{f}(x) \end{cases} \end{cases}. \quad (3.2)$$

Giả sử tồn tại $x \in X$ thoả $F(x) \leq F(\bar{x})$ ta có:

$$\begin{cases} \underline{f}(x) \leq \underline{f}(\bar{x}) \\ \bar{f}(x) \leq \bar{f}(\bar{x}). \end{cases}$$

Kết hợp với (3.2) ta được:

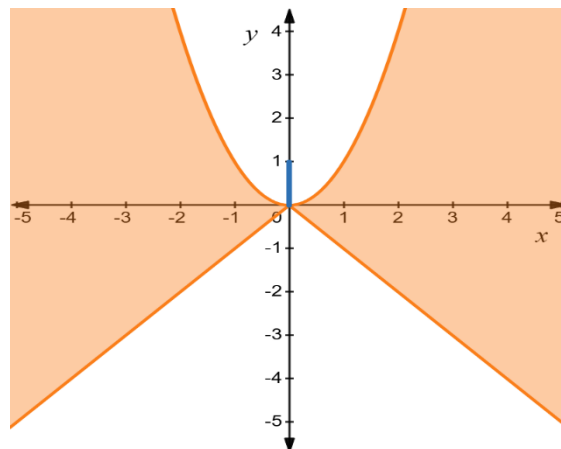
$$\begin{cases} \underline{f}(x) = \underline{f}(\bar{x}) \\ \bar{f}(x) = \bar{f}(\bar{x}). \end{cases}$$

Từ đó suy ra $F(\bar{x}) = F(x)$. Vậy $\bar{x} \in S(F, \leq)$, kéo theo $S(F, \leq_{lex}^l) \subset S(F, \leq)$. ■

Các tập nghiệm $S(F, \leq_{lex}^u)$ và $S(F, \leq_{lex}^l)$ là không so sánh được với nhau. Dưới đây là một số ví dụ cụ thể chỉ ra điều này.

Ví dụ 3.1. Cho hàm có giá trị khoảng $F: [-5, 5] \rightarrow \mathfrak{I}$ được xác định bởi:

$$F(x) = \begin{cases} [-|x|, x^2], & x \in \{[-5, 5] / \{0\}\} \\ [0, 1], & x = 0 \end{cases}.$$

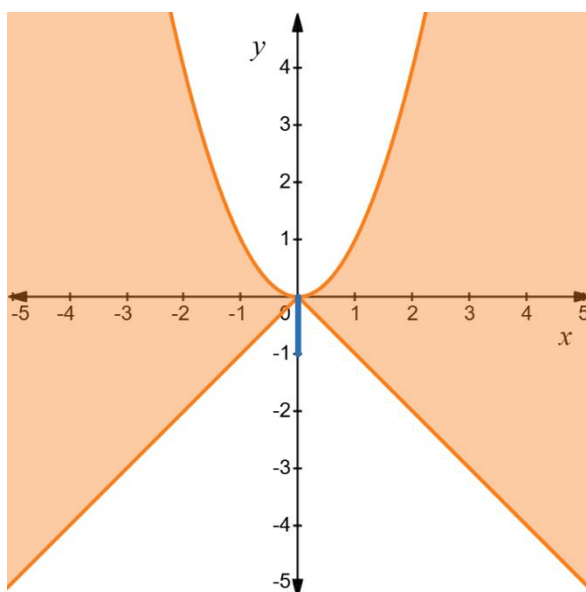


Hình 1. Đồ thị hàm khoảng của Ví dụ 3.1

Khi đó, tính toán trực tiếp ta được $S(F, \leq_{lex}^u) = \emptyset$, $S(F, \leq_{lex}^l) = \{-5, 5\}$ và $S(F, \leq) = [-5, 5] \setminus \{0\}$.

Ví dụ 3.2. Cho hàm có giá trị khoảng $F: [-5, 5] \rightarrow \mathfrak{T}$ được xác định bởi:

$$F(x) = \begin{cases} [-|x|, x^2,], & x \in \{[-5, 5] \setminus \{0\}\} \\ [-1, 0], & x = 0 \end{cases}.$$



Hình 2. Đồ thị hàm khoảng của Ví dụ 3.2

Khi đó, tính toán trực tiếp ta được $S(F, \leq_{lex}^u) = \{0\}$, $S(F, \leq_{lex}^l) = \{-5, 5\}$ và $S(F, \leq) = [-5, -1] \cup [1, 5] \cup \{0\}$.

Mệnh đề 3.4. Cho X là không gian metric và $F: X \rightarrow \mathfrak{T}$ là hàm có giá trị khoảng với $F(x) = [\underline{f}(x), \bar{f}(x)]$, $\forall x \in X$. Khi đó, nếu $\argmin_{x \in X} \bar{f}(x) = \emptyset$ thì $S(F, \leq_{lex}^u) = \emptyset$.

Chứng minh

Giả sử $S(F, \leq_{lex}^u) \neq \emptyset$, $\exists \bar{x} \in S_u$ suy ra $\bar{f}(\bar{x}) \leq_{lex}^u \bar{f}(x)$, $\forall x \in D$. Điều này tương đương:

$$\begin{cases} \bar{f}(\bar{x}) < \bar{f}(x) \\ \bar{f}(\bar{x}) = \bar{f}(x) \\ \underline{f}(\bar{x}) \leq \underline{f}(x) \end{cases}.$$

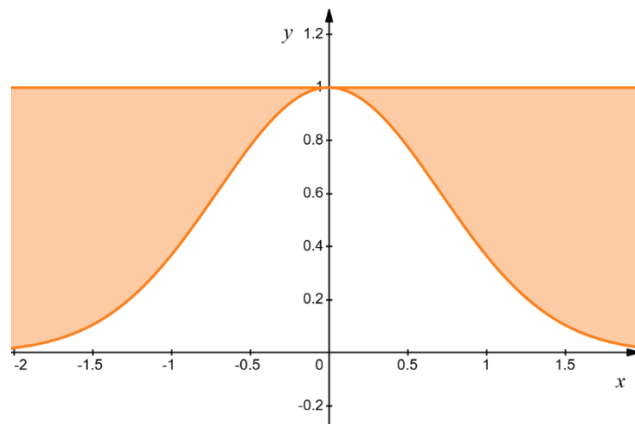
Nói cách khác ta luôn có $\bar{f}(\bar{x}) \leq \bar{f}(x)$, $\forall x \in D$, suy ra $\bar{x} \in \argmin_{x \in X} \bar{f}(x)$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết ban đầu $\argmin_{x \in X} \bar{f}(x) = \emptyset$. Vậy ta có $S(F, \leq_{lex}^u) = \emptyset$. ■

Bằng việc chứng minh tương tự Mệnh đề 3.4, ta có kết quả dưới đây.

Mệnh đề 3.5. Cho X là không gian metric và $F: X \rightarrow \mathfrak{T}$ là hàm có giá trị khoảng với $F(x) = [\underline{f}(x), \bar{f}(x)]$, $\forall x \in X$. Khi đó, nếu $\argmin_{x \in X} \underline{f}(x) = \emptyset$ thì $S(F, \leq_{lex}^l) = \emptyset$.

Dưới đây là các ví dụ chỉ ra chiều ngược lại của các Mệnh đề 3.4 và Mệnh đề 3.5 là không đúng.

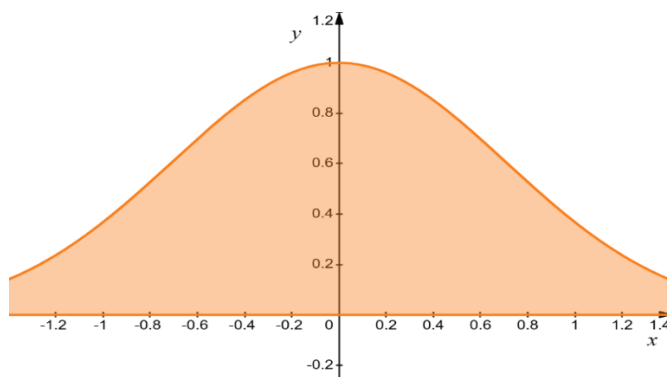
Ví dụ 3.3. ($\operatorname{argmin}_{x \in X} \bar{f}(x) \neq \emptyset$ mà $S(F, \leq_{lex}^u) = \emptyset$) Cho hàm có giá trị khoảng $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{T}$ được xác định bởi $F(x) = [e^{-x^2}, 1]$, $\forall x \in \mathbb{R}$.



Hình 3. Đồ thị hàm khoảng của Ví dụ 3.3

Tính toán trực tiếp ta có $\operatorname{argmin}_{x \in X} \bar{f}(x) = \mathbb{R}$, trong khi $S(F, \leq_{lex}^u) = \emptyset$.

Ví dụ 3.4. ($\operatorname{argmin}_{x \in D} \underline{f}(x) \neq \emptyset$ mà $S(F, \leq_{lex}^l) = \emptyset$) Cho hàm có giá trị khoảng $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{T}$ được xác định bởi $F(x) = [0, e^{-x^2}]$, $\forall x \in \mathbb{R}$.



Hình 4. Đồ thị hàm khoảng của Ví dụ 3.4

Tính toán trực tiếp ta có $\operatorname{argmin}_{x \in D} \underline{f}(x) = \mathbb{R}$, trong khi $S(F, \leq_{lex}^l) = \emptyset$.

4. Kết quả tồn tại nghiệm cho bài toán tối ưu hàm khoảng

Trong mục này chúng ta đưa ra các kết quả tồn tại nghiệm cho bài toán tối ưu hàm khoảng với thứ tự từ điển trên và thứ tự từ điển dưới của các khoảng được đề xuất trong Mục 3.

Định lý 4.1. Cho (X, d) là không gian metric compact và $F: X \rightarrow \mathfrak{T}$ là hàm có giá trị khoảng, với $F(x) = [\underline{f}(x), \bar{f}(x)]$. Khi đó, nếu F là nửa liên tục dưới thì cả ba bài toán (IOP1)-(IOP3) đều có nghiệm.

Chứng minh

Xét bài toán (OP2). Theo giả thiết, F là hàm khoảng nửa liên tục dưới trên X , nên theo Mệnh đề 2.2, ta có cả hai hàm $\underline{f}(x)$ và $\overline{f}(x)$ đều là các hàm nửa liên tục dưới trên X . Vì X là compact và $\underline{f}(x)$ là hàm nửa liên tục dưới trên X , nên theo Định lý Weierstrass (Định lý 2.3), ta có tập nghiệm $\arg \min_{x \in X} \underline{f}(x)$ là tập compact khác rỗng.

Đặt $\Omega := \arg \min_{x \in X} \underline{f}(x)$. Vì Ω là compact khác rỗng và $\overline{f}(x)$ là hàm nửa liên tục dưới trên Ω , nên theo Định lý Weierstrass tập nghiệm $\arg \min_{x \in \Omega} \overline{f}(x)$ cũng là tập compact khác rỗng.

Lấy $\bar{x} \in \arg \min_{x \in \Omega} \overline{f}(x)$. Ta chứng minh $\bar{x} \in S(F, \leq_{lex}^l)$, tức là

$$F(\bar{x}) \leq_{lex}^l F(x), \forall x \in X.$$

Thật vậy, lấy tùy ý $x \in X$. Khi đó, vì $\bar{x} \in \arg \min_{x \in \Omega} \overline{f}(x)$ nên $\bar{x} \in \Omega$, tức $\bar{x} \in \arg \min_{x \in X} \underline{f}(x)$. Suy ra $\underline{f}(\bar{x}) \leq \underline{f}(x)$. Mặt khác, nếu $\underline{f}(x) = \underline{f}(\bar{x})$, thì $x \in \arg \min_{x \in X} \underline{f}(x)$, tức $x \in \Omega$. Do $\bar{x} \in \arg \min_{x \in \Omega} \overline{f}(x)$ nên $\overline{f}(\bar{x}) \leq \overline{f}(x)$. Vậy, với mọi $x \in X$ ta luôn có:

$$\begin{cases} \underline{f}(\bar{x}) < \underline{f}(x) \\ \underline{f}(\bar{x}) = \underline{f}(x) \\ \overline{f}(\bar{x}) \leq \overline{f}(x) \end{cases}.$$

Nên $\bar{x} \in S(F, \leq_{lex}^l)$. Tức bài toán (IOP2) có nghiệm.

Xét bài toán (OP3). Theo giả thiết, F là hàm khoảng nửa liên tục dưới trên X , nên theo Mệnh đề 2.2, ta có cả hai hàm $\underline{f}(x)$ và $\overline{f}(x)$ đều là các hàm nửa liên tục dưới trên X . Vì X là compact và $\overline{f}(x)$ là hàm nửa liên tục dưới trên X , nên theo Định lý Weierstrass, ta có tập nghiệm $\arg \min_{x \in X} \overline{f}(x)$ là tập compact khác rỗng.

Đặt $\Omega := \arg \min_{x \in X} \overline{f}(x)$. Vì Ω là compact khác rỗng và $\underline{f}(x)$ là hàm nửa liên tục dưới trên Ω , nên theo Định lý Weierstrass tập nghiệm $\arg \min_{x \in \Omega} \underline{f}(x)$ là tập compact khác rỗng.

Lấy $\bar{x} \in \arg \min_{x \in \Omega} \underline{f}(x)$. Ta chứng minh $\bar{x} \in S(F, \leq_{lex}^u)$, tức là

$$F(\bar{x}) \leq_{lex}^u F(x), \forall x \in X.$$

Thật vậy, lấy tùy ý $x \in X$. Vì $\bar{x} \in \arg \min_{x \in X} \overline{f}(x)$ nên $\overline{f}(\bar{x}) \leq \overline{f}(x)$. Mặt khác, nếu $\overline{f}(x) = \overline{f}(\bar{x})$ thì $x \in \arg \min_{x \in X} \overline{f}(x)$, tức là $x \in \Omega$. Dựa vào $\bar{x} \in \arg \min_{x \in \Omega} \underline{f}(x)$ nên $\underline{f}(\bar{x}) \leq \underline{f}(x)$. Vậy với mọi $x \in X$ ta luôn có:

$$\begin{cases} \overline{f}(\bar{x}) < \overline{f}(x) \\ \overline{f}(\bar{x}) = \overline{f}(x) \\ \underline{f}(\bar{x}) \leq \underline{f}(x) \end{cases}.$$

Suy ra $\bar{x} \in S(F, \leq_{lex}^u)$. Tức bài toán (IOP3) có nghiệm.

Vì $S(F, \leq_{lex}^l) \subset S(F, \leq)$ và $S(F, \leq_{lex}^u) \subset S(F, \leq)$ nên kéo theo $S(F, \leq) \neq \emptyset$. Tức bài toán (IOP1) có nghiệm. ■

Dưới đây là các ví dụ chỉ ra sự cốt yếu của giả thiết compact của tập X và tính nửa liên tục dưới của hàm khoảng F .

Ví dụ 4.1. Xét các hàm có giá trị khoảng $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{I}$ được cho trong Ví dụ 3.3 và Ví dụ 3.4. Khi đó, ta có F là hàm khoảng nửa liên tục dưới (kể cả liên tục) trên $\mathbb{R}$. Tuy nhiên trong trường hợp này, $\mathbb{R}$ không compact (vì $\mathbb{R}$ chỉ đóng nhưng không bị chặn) nên mọi giả thiết của Định lý 4.1 đều thỏa mãn trừ giả thiết X compact. Tính toán trực tiếp dễ thấy $S(F, \leq_{lex}^l) = S(F, \leq_{lex}^u) = S(F, \leq) = \emptyset$.

Ví dụ 4.2. Cho hàm có giá trị khoảng $F: (0,1] \rightarrow \mathfrak{I}$ được xác định bởi:

$$F(x) = [x, x + 1], \forall x \in (0,1].$$

Khi đó, ta có F là hàm khoảng nửa liên tục dưới (kể cả liên tục) trên $\mathbb{R}$. Tuy nhiên trong trường hợp này, $(0,1]$ không compact (vì $(0,1]$ là bị chặn nhưng không đóng) nên mọi giả thiết của Định lý 4.1 đều thỏa mãn trừ giả thiết X compact. Tính toán trực tiếp dễ thấy $S(F, \leq_{lex}^l) = S(F, \leq_{lex}^u) = S(F, \leq) = \emptyset$.

Ví dụ 4.3. Cho hàm có giá trị khoảng $F: [0,1] \rightarrow \mathfrak{I}$ được xác định bởi $F(x) = [x, x + 1], \forall x \in (0,1]$ và $F(1) = \{2\}$. Khi đó, ta có $X = [0,1]$ là tập compact. Tuy nhiên, hàm khoảng F không nửa liên tục dưới tại 0 nên mọi giả thiết của Định lý 4.1 đều thỏa mãn trừ giả thiết nửa liên tục dưới của hàm mục tiêu. Tính toán trực tiếp dễ thấy $S(F, \leq_{lex}^l) = S(F, \leq_{lex}^u) = S(F, \leq) = \emptyset$.

Dưới đây, chúng ta sẽ đưa ra các kết quả tồn tại nghiệm cho bài toán tối ưu hàm khoảng cho trường hợp tập ràng buộc không compact trong không gian hữu hạn chiều.

Định lý 4.2. Cho $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathfrak{I}$ là hàm có giá trị khoảng, với $F(x) = [\underline{f}(x), \bar{f}(x)]$. Khi đó, nếu F là hàm nửa liên tục dưới và hàm $\underline{f}$ thỏa điều kiện bức thì bài toán (IOP2) có nghiệm.

Chứng minh

Theo giả thiết, F là hàm khoảng nửa liên tục dưới, nên theo Mệnh đề 2.2, ta có cả hai hàm $\underline{f}(x)$ và $\bar{f}(x)$ đều là các hàm nửa liên tục dưới. Vì $\underline{f}$ là hàm nửa liên tục dưới và thỏa điều kiện bức nên theo Định lý 2.4, ta có tập nghiệm $\arg \min_{x \in X} \underline{f}(x)$ là tập khác rỗng. Mặt khác, nhận xét rằng:

$$\arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} \underline{f}(x) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \{x \in \mathbb{R}^n: \underline{f}(x) \leq \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \underline{f}(x) + \frac{1}{n}\}.$$

Do $\underline{f}$ là hàm nửa liên tục dưới nên tập mức dưới $\{x \in \mathbb{R}^n: \underline{f}(x) \leq \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \underline{f}(x) + \frac{1}{n}\}$ đóng, kéo theo $\arg \min_{x \in X} \underline{f}(x)$ là tập đóng. Bên cạnh đó, từ tính bức suy ra tập $\arg \min_{x \in X} \underline{f}(x)$ cũng bị chặn. Dựa vào tính đóng và bị chặn trong không gian hữu hạn chiều nên $\arg \min_{x \in X} \underline{f}(x)$ là tập compact.

Đặt $\Omega := \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} \underline{f}(x)$. Vì Ω là compact khác rỗng và $\bar{f}(x)$ là hàm nửa liên tục dưới trên Ω , nên theo Định lý Weierstrass tập nghiệm $\arg \min_{x \in \Omega} \bar{f}(x)$ cũng là tập compact khác rỗng.

Lấy $\bar{x} \in \arg \min_{x \in \Omega} \bar{f}(x)$. Ta chứng minh $\bar{x} \in S(F, \leq_{lex}^l)$, tức là

$$F(\bar{x}) \leq_{lex}^l F(x), \forall x \in X.$$

Thật vậy, lấy tùy ý $x \in X$. Khi đó, vì $\bar{x} \in \arg \min_{x \in \Omega} \bar{f}(x)$ nên $\bar{x} \in \Omega$, tức $\bar{x} \in \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} \underline{f}(x)$. Suy ra $\underline{f}(\bar{x}) \leq \underline{f}(x)$. Mặt khác, nếu $\underline{f}(x) = \underline{f}(\bar{x})$, thì $x \in \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} \underline{f}(x)$, tức $x \in \Omega$. Do $\bar{x} \in \arg \min_{x \in \Omega} \bar{f}(x)$ nên $\bar{f}(\bar{x}) \leq \bar{f}(x)$. Vậy, với mọi $x \in X$ ta luôn có:

$$\begin{cases} \underline{f}(\bar{x}) < \underline{f}(x) \\ \underline{f}(\bar{x}) = \underline{f}(x) \\ \bar{f}(\bar{x}) \leq \bar{f}(x) \end{cases}.$$

Nên $\bar{x} \in S(F, \leq_{lex}^l)$. Tức bài toán (IOP2) có nghiệm. ■

Bằng lập luận tương tự như chứng minh của Định lý 4.2, ta cũng có kết quả tồn tại nghiệm cho bài toán (IOP3) trong trường hợp tập ràng buộc không compact trong không gian hữu hạn chiều dựa vào điều kiện bức cho ánh xạ biên trên của hàm khoảng F .

Định lý 4.3. Cho $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathfrak{I}$ là hàm có giá trị khoảng, với $F(x) = [\underline{f}(x), \bar{f}(x)]$. Khi đó, nếu F là hàm nửa liên tục dưới và hàm $\bar{f}$ thỏa điều kiện bức thì bài toán (IOP3) có nghiệm.

Hệ quả 4.4. Cho $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathfrak{I}$ là hàm có giá trị khoảng, với $F(x) = [\underline{f}(x), \bar{f}(x)]$. Khi đó, nếu F là hàm nửa liên tục dưới và hàm $\underline{f}$ thỏa điều kiện bức thì cả ba bài toán (IOP1), (IOP2) và (IOP3) đều có nghiệm.

Chứng minh

Với mọi $x \in \mathbb{R}^n$, ta có $\underline{f}(x) \leq \bar{f}(x)$, nên từ giả thiết hàm $\underline{f}$ thỏa điều kiện bức ta suy ra hàm $\bar{f}$ cũng thỏa điều kiện bức. Do đó áp dụng Định lý 4.2 và Định lý 4.3 ta suy ra hai bài toán (IOP2) và (IOP3) có nghiệm. Dựa vào Mệnh đề 3.3, kéo theo bài toán (IOP1) cũng có nghiệm. ■

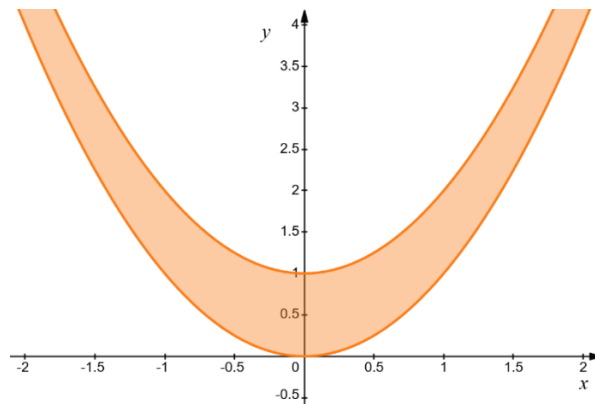
Nhận xét 4.4. Điều kiện bức của ánh xạ biên trong Định lý 4.2 và Định lý 4.3 là cốt yếu. Thật vậy, trong Ví dụ 3.3 ta cũng có tập $S(F, \leq_{lex}^l) = \emptyset$. Nguyên nhân là mọi giả thiết của Định lý 4.2 đều thỏa mãn trừ giả thiết điều kiện bức của hàm $\underline{f}$ vì $\lim_{||x|| \rightarrow +\infty} e^{-x^2} = 0$. Tương tự, trong Ví dụ 3.4 ta cũng có tập $S(F, \leq_{lex}^u) = \emptyset$. Nguyên nhân là mọi giả thiết của Định lý 4.3 đều thỏa mãn trừ giả thiết hàm $\bar{f}$ thỏa điều kiện bức.

Dưới đây là ví dụ chỉ ra sự tiện lợi của Định lý 4.2, Định lý 4.3 và Hệ quả 4.4 so với Định lý 4.1 trong việc chỉ ra sự tồn tại nghiệm của các bài toán tối ưu hàm khoảng trong không gian hữu hạn chiều.

Ví dụ 4.4. Cho hàm có giá trị khoảng $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{I}$ được xác định bởi:

$$F(x) = [x^2, x^2 + 1], \forall x \in \mathbb{R}.$$

Khi đó, ta có F là hàm khoảng nửa liên tục dưới (kể cả liên tục) trên $\mathbb{R}$. Trong trường hợp này, $\mathbb{R}$ không compact nên Định lý 4.1 không áp dụng được. Tuy nhiên, trong ví dụ này, mọi giả thiết trong Định lý 4.2, Định lý 4.3 và Hệ quả 4.4 đều thỏa mãn. Đó đó, suy ra cả ba tập nghiệm $S(F, \leq_{lex}^l)$, $S(F, \leq_{lex}^u)$, $S(F, \leq)$ đều khác rỗng. Tính toán trực tiếp ta có $S(F, \leq_{lex}^l) = S(F, \leq_{lex}^u) = S(F, \leq) = \{0\}$.



Hình 5. Đồ thị hàm khoảng của Ví dụ 4.3

5. Kết luận

Trong bài báo này, chúng tôi đưa ra các kết quả tồn tại nghiệm cho bài toán tối ưu hàm khoảng với thứ tự được khảo sát là thứ tự từ điển trên và dưới của các khoảng. Đây là các thứ tự có tính toàn phần nên có rất nhiều lợi thế trong ứng dụng. Các kết quả đưa ra là mới. Nhiều ví dụ cụ thể được đưa ra để so sánh và minh họa cho các kết quả thu được.

Lời cảm ơn: Đề tài này được tài trợ bởi Đại học Cần Thơ, Mã số: TSV2025-09.

Tài liệu tham khảo

- Ahmad, I., Jayswal, A., Al-Homidan, S., & Banerjee, J. (2019). Sufficiency and duality in intervalvalued variational programming. *Neural Computing and Applications*, 31, 4423–4433. <https://doi.org/10.1007/s00521-017-3307-y>
- Aubin, J. P., & Ekeland, I. (1984). *Applied Nonlinear Analysis*. Wiley, NewYork.
- Chalco-Cano, Y., Rufian-Lizana, A., Román-Flores, H., & Jiménez-Gamero, M.D. (2013). Calculus for interval-valued functions using generalized Hukuhara derivative and applications. *Fuzzy Sets and Systems*, 219, 49–6. <https://doi.org/10.1016/j.fss.2012.12.004>
- Ghosh, D. (2017). Newton method to obtain efficient solutions of the optimization problems with interval-valued objective functions. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 53, 709–731. <https://doi.org/10.1007/s12190-016-0990-2>
- Ghosh, D., Bhuiya, S.K., & Patra, L.K. (2018). A saddle point characterization of efficient solutions for interval optimization problems. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 58, 193–217. <https://doi.org/10.1007/s12190-017-1140-1>
- Ghosh, D., Chauhan, R.S., Mesiar, R., & Debnath, A.K., (2020a). Generalized Hukuhara Gâteaux and Fréchet derivatives of interval-valued functions and their application in optimization with interval-valued functions. *Information Sciences*, 510, 317–340. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2019.09.023>
- Ghosh, D., Debnath, A.K., & Pedrycz, W. (2020b). A variable and a fixed ordering of intervals and their application in optimization with interval-valued functions. *International Journal of Approximate Reasoning*, 121, 187–205. <https://doi.org/10.1016/j.ijar.2020.03.004>

- Ghosh, D., Singh, A., Shukla, K.K., & Manchanda, K. (2019). Extended Karush-Kuhn-Tucker condition for constrained interval optimization problems and its application in support vector machines. *Information Sciences*, 504, 276–292. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2019.07.017>
- Ishibuchi, H., & Tanaka, H. (1990). Multiobjective programming in optimization of the interval objective function. *European Journal of Operational Research*, 48, 219–225. [https://doi.org/10.1016/0377-2217\(90\)90375-L](https://doi.org/10.1016/0377-2217(90)90375-L)
- Moore, R.E., (1966). *Interval Analysis*. New Jersey, Englewood Cliffs, Prentice-Hall.
- Stefanini, L., & Bede, B. (2009). Generalized Hukuhara differentiability of interval-valued functions and interval differential equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 71, 1311–1328. <https://doi.org/10.1016/j.na.2008.12.005>
- Singh, D., Dar, B.A., & Kim, D. (2016). KKT optimality conditions in interval valued multiobjective programming with generalized differentiable functions. *European Journal of Operational Research*, 254, 29–39. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2016.03.042>
- Wu, H.C., (2007). The Karush-Kuhn-Tucker optimality conditions in an optimization problem with interval-valued objective function. *European Journal of Operational Research*, 176, 46–59. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2005.09.007>
- Wu, H.C., (2008a). On interval-valued nonlinear programming problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 338, 299–316. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.05.023>
- Wu, H.C. (2008b). Wolfe duality for interval-valued optimization. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 138, 497–509. <https://doi.org/10.1007/s10957-008-9396-0>
- Zhang, C., & Huang, N. (2022). On Ekeland's variational principle for interval-valued functions with applications. *Fuzzy Sets and Systems*, 436, 152–174. <https://doi.org/10.1016/j.fss.2021.10.003>
- Zhang, Z., Wang, X., & Lu, J. (2018). Multi-objective immune genetic algorithm solving nonlinear interval-valued programming. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 67, 235–245. <https://doi.org/10.1016/j.engappai.2017.10.004>