



DOI: <https://doi.org/10.52714/dthu.14.04S.2025.1598>

MỐI LIÊN HỆ GIỮA CÁC NGHIỆM CỦA MỘT LỚP PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN NGẪU NHIÊN TRONG KHÔNG GIAN MỘT CHIỀU

Lâm Hoàng Chương^{1*} và Trang Thị Hiền²

¹Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Cần Thơ, Việt Nam

²Phòng quản lý chất lượng, Trường Đại học Cần Thơ, Việt Nam

*Tác giả liên hệ, Email: lhchuong@ctu.edu.vn

Lịch sử bài báo

Ngày nhận: 30/6/2025; Ngày nhận chỉnh sửa: 01/8/2025; Ngày duyệt đăng: 13/8/2025

Tóm tắt

Mục tiêu chính của bài báo là tìm ra mối liên hệ giữa các nghiệm của một lớp phương trình vi phân ngẫu nhiên trong trường hợp có lực ngoài tác động và không có lực ngoài tác động. Ý tưởng quan trọng nhất ở đây là chuyển đổi phương trình vi phân ngẫu nhiên về phương trình vi phân thường để dễ dàng khảo sát tính chất nghiệm hơn. Từ đó kết hợp với công thức Itô để đánh giá giới hạn của các moment bậc 1 và bậc 2 của quá trình khuếch tán từ phương trình vi phân ngẫu nhiên đang xét.

Từ khóa: moment, quá trình khuếch tán, toán tử cực vi.

Trích dẫn: Lâm, H. C., & Trang, T. H. (2025). Mối liên hệ giữa các nghiệm của một lớp phương trình vi phân ngẫu nhiên trong không gian một chiều. *Tạp chí Khoa học Đại học Đồng Tháp*, 14(04S), 353-361. <https://doi.org/10.52714/dthu.14.04S.2025.1598>

Copyright © 2025 The author(s). This work is licensed under a CC BY-NC 4.0 License.

ON THE RELATIONSHIP BETWEEN SOLUTIONS OF A CLASS OF ONE-DIMENSIONAL STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS

Lam Hoang Chuong^{1*} and Trang Thi Hien²

¹*College of Natural Sciences, Can Tho University, Vietnam*

²*Department of Quality Management, Can Tho University, Vietnam*

**Corresponding author, Email: lhchuong@ctu.edu.vn*

Article history

Received: 30/6/2025; Received in revised form: 01/8/2025; Accepted: 13/8/2025

Abstract

The main purpose of this paper is to explore the relationship between the solutions of a class of stochastic differential equations in the cases with and without external forces. The central idea is to transform the stochastic differential equations into ordinary differential equations in order to simplify the analysis of their solution properties. This transformation is then combined with Itô's formula to estimate the bounds of the first and second moments of the diffusion process described by the considered stochastic differential equations.

Keywords: *diffusion process, infinitesimal generator, moment.*

1. Giới thiệu

Xét sự chuyển động của một chất điểm trong không gian một chiều với X_t là vị trí của chất điểm ở thời điểm t ($t \geq 0$). Khi đó $(X_t)_{t \geq 0}$ là một quá trình ngẫu nhiên với không gian trạng thái và thời gian liên tục. Nó còn được gọi là quá trình khuếch tán trong không gian $\mathbb{R}$, với $\mathbb{R}$ là ký hiệu của tập số thực. Trong nghiên cứu này ta giả sử vị trí ban đầu của chất điểm là $X_0 = x$.

Về mặt toán học, quá trình $(X_t)_{t \geq 0}$ được đặc trưng bởi trình vi phân ngẫu nhiên như sau

$$dX_t = \sigma(X_t)dB_t + a(X_t)dt, \quad (1)$$

trong đó $(B_t)_{t \geq 0}$ là chuyển động Brown, $\sigma(x)$ và $a(x)$ lần lượt được gọi là hệ số khuếch tán và hệ số trượt. Một trong những vấn đề được quan tâm đó là sự tồn tại nghiệm của phương trình (1) cùng với tính chất nghiệm của nó. Người ta đã chỉ ra rằng nếu các hệ số $\sigma(x)$ và $a(x)$ liên tục Lipschitz thì phương trình vi phân đã cho tồn tại nghiệm và nghiệm này là nghiệm duy nhất (Ikeda & Watanabe, 1981; Oksendal, 2013). Tuy nhiên, đó chỉ là điều kiện cần vì dù cho điều kiện trên không thỏa thì phương trình (1) vẫn có nghiệm trong một số trường hợp đặc biệt đã được chỉ ra trong tài liệu Ba & Nhan (2024). Trong nghiên cứu này chúng tôi tập trung vào vấn đề thứ hai, đó là tính chất nghiệm của phương trình (1). Chi tiết hơn, chúng tôi xét phương trình (1) với các hệ số $\sigma(x)$ và $a(x)$ là các hàm thỏa mãn tính liên tục Lipschitz để đảm bảo sự tồn tại và duy nhất nghiệm. Sau đó, chúng tôi sẽ đưa ra những kết luận về tính chất nghiệm của chúng.

Chúng ta bắt đầu bằng việc xét phương trình vi phân ngẫu nhiên có dạng

$$dX_t = \sqrt{1 + \frac{1}{X_t^2 + 1}} dB_t + \left[\gamma \left(1 + \frac{1}{X_t^2 + 1} \right) - \frac{X_t}{(X_t^2 + 1)^2} \right] dt,$$

trong đó $(B_t)_{t \geq 0}$ là chuyển động Brown và γ là một hằng số thực. Trong mô hình này γ được xem như là lực ngoài tác động vào sự chuyển động của chất điểm. Trường hợp đặc biệt nếu $\gamma = 0$ thì xem như mô hình không có lực ngoài tác động. Các hệ số $\sigma(x)$ và $a(x)$ lần lượt được xác định bởi

$$\begin{aligned} \sigma^2(x) &= 1 + \frac{1}{x^2 + 1}; \\ a(x) &= \gamma \left(1 + \frac{1}{x^2 + 1} \right) - \frac{x}{(x^2 + 1)^2}. \end{aligned}$$

Dễ dàng thấy rằng đây là các hàm thỏa điều kiện liên tục Lipschitz và do đó phương trình (1) tồn tại nghiệm và nghiệm đó là duy nhất. Trong phần này ta sẽ giới thiệu toán tử cực vi $\mathcal{L}_\gamma$ liên quan đến quá trình $(X_t)_{t \geq 0}$ được cho bởi biểu thức

$$\mathcal{L}_\gamma f(x) = \left[\gamma \left(1 + \frac{1}{x^2 + 1} \right) - \frac{x}{(x^2 + 1)^2} \right] f'(x) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{x^2 + 1} \right) f''(x), \quad (2)$$

trong đó $f(x)$ là một hàm thực, khả vi cấp hai trên $\mathbb{R}$. Trong trường hợp mô hình không có lực ngoài tác động thì toán tử cực vi $\mathcal{L}$ liên quan đến quá trình $(X_t)_{t \geq 0}$ được cho bởi biểu thức

$$\mathcal{L}f(x) = -\frac{x}{(x^2 + 1)^2} f'(x) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{x^2 + 1} \right) f''(x). \quad (3)$$

Bằng cách sử dụng phương pháp moment được giới thiệu trong Billingsley (1995) liên quan đến hội tụ theo phân phối, Chương và cs (2021) đã chỉ ra sự tồn tại của một dạng luật yếu số lớn cho một lớp quá trình khuếch tán có tính chất tương tự. Trong nghiên cứu này chúng ta sẽ chỉ ra mối liên hệ giữa nghiệm của phương trình vi phân ngẫu nhiên có lực ngoài tác động và

không có lực ngoài tác động. Ta có định lý chính như sau

Định lý 1.1. *Với quá trình khuếch tán $(X_t)_{t \geq 0}$ thỏa phương trình (2) và (3) thì các đẳng thức sau được thỏa mãn*

$$\frac{d}{dy} \left[\lim_{t \rightarrow \infty} E_y \left(\frac{X_t}{t} \right) \right] \Big|_{y=0} = \lim_{t \rightarrow \infty} E \left(\frac{X_t}{t} \right)^2 = 1, \quad (4)$$

trong đó E_y và E lần lượt được ký hiệu cho toán tử kỳ vọng trong mô hình có lực ngoài tác động và không có lực ngoài tác động.

Đẳng thức (4) còn được gọi là mối liên hệ Einstein cho chuyển động ngẫu nhiên của chất điểm, một khái niệm trong lý thuyết động lực học được giới thiệu lần đầu trong tài liệu Einstein (1956) và đã được rất nhiều nhà toán học cũng như vật lý quan tâm nghiên cứu (xem thêm ở các tài liệu Gantert & cs., 2012; Lam & Depauw, 2016).

Cấu trúc của bài báo được sắp xếp như sau: Mục 2 nhắc lại công thức Ito và một số tính chất nghiệm của phương trình vi phân thường liên kết với toán tử cực vi của quá trình khuếch tán. Mục 3 sẽ xem xét tính chất nghiệm của phương trình (2) cho mô hình với lực ngoài tác động. Tương tự Mục 4 sẽ xem xét tính chất nghiệm của phương trình (3) cho mô hình không lực ngoài tác động. Cuối cùng là phần kết luận ở Mục 5.

2. Phương pháp nghiên cứu

Khi đề cập đến phương trình vi phân ngẫu nhiên thì người ta thường nhắc đến công thức quan trọng trong Itô (1951), còn được gọi là công thức Itô, được phát biểu lại dưới dạng tính chất như sau:

Tính chất 2.1. *Giả sử X_t là nghiệm của phương trình vi phân ngẫu nhiên (1). Khi đó với mọi hàm $h(x)$ khả vi cấp hai thì phương trình vi phân ngẫu nhiên sau được thỏa*

$$dh(X_t) = h'(X_t)\sigma(X_t)dB_t + \left[h'(X_t)a(X_t) + \frac{1}{2}h''(X_t)\sigma^2(X_t) \right] dt. \quad (5)$$

Vận dụng tính chất này cùng với định nghĩa của toán tử cực vi $\mathcal{L}_\gamma$ ta có một số nhận định sau: nếu hàm số $h(x)$ thỏa phương trình vi phân thường

$$\mathcal{L}_\gamma h(x) = 1$$

thì ta có

$$dh(X_t) = h'(X_t)\sigma(X_t)dB_t + 1dt.$$

Từ đó dẫn đến

$$E[h(X_t)] = t,$$

với mọi $t \geq 0$. Hơn thế nữa, nếu có hàm $l(x)$ thỏa phương trình vi phân thường

$$\mathcal{L}_\gamma l(x) = h(x)$$

thì ta có

$$dl(X_t) = l'(X_t)\sigma(X_t)dB_t + h(X_t)dt.$$

Tương tự, ta cũng có kết quả là $E[l(X_t)] = \frac{t^2}{2}$,

với mọi $t \geq 0$. Các tính chất này sẽ được làm rõ trong các chứng minh ở Mục 3 và Mục 4. Cuối cùng, Định lý 1.1 sẽ được chứng minh bằng cách kết hợp các Mệnh đề 3.1 và 4.1 trong phần tiếp theo.

3. Quá trình khuếch tán khi có lực tác động ngoài

Trong phần ta xét mô hình với lực ngoài tác động $\gamma \neq 0$. Ta có mệnh đề sau liên quan đến giới hạn của moment bậc 1 của quá trình khuếch tán như sau

Mệnh đề 3.1. Với quá trình khuếch tán $(X_t)_{t \geq 0}$ thỏa phương trình (2) thì

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E}_\gamma \left(\frac{X_t}{t} \right) = \gamma. \quad (6)$$

Chứng minh. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $X_0 = 0$. Ta xét phương trình vi phân cấp hai

$$\mathcal{L}_\gamma g_1(x) = 1, \quad (7)$$

với điều kiện $g_1(0) = 0$. Phương trình (7) tương đương với phương trình

$$\left[\gamma \left(1 + \frac{1}{x^2 + 1} \right) - \frac{x}{(x^2 + 1)^2} \right] g_1'(x) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{x^2 + 1} \right) g_1''(x) = 1. \quad (8)$$

Tiến hành giải phương trình (8) ta được một nghiệm là

$$\begin{aligned} g_1(x) &= 2 \int_0^x \frac{v^2 + 1}{v^2 + 2} \times \frac{1}{e^{2\gamma v}} \int_{-\infty}^v e^{2\gamma u} du dv \\ &= \frac{1}{\gamma} \left(x - \int_0^x \frac{1}{v^2 + 2} dv \right). \end{aligned}$$

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{g_1(x)}{x} &= \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} \int_0^x \frac{1}{v^2 + 2} dv \\ &= \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^2 + 2} \\ &= \frac{1}{\gamma} \end{aligned}$$

bằng cách áp dụng quy tắc L'Hopital cho giới hạn của hàm dưới tích phân. Khi đó, với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại một số $N(\varepsilon) > 0$ sao cho với mọi $|x| > N(\varepsilon)$ ta có

$$\left| \frac{g_1(x)}{x} \times \gamma - 1 \right| < \varepsilon. \quad (9)$$

Mặt khác, theo công thức Itô (5) ta có

$$dg_1(X_t) = \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{X_t^2 + 2} \right) \sqrt{1 + \frac{1}{X_t^2 + 1}} dB_t + dt. \quad (10)$$

Từ đó dẫn đến

$$\begin{aligned} g_1(X_t) &= g_1(X_0) + \int_0^t \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{X_s^2 + 2} \right) \sqrt{1 + \frac{1}{X_s^2 + 1}} dB_s + \int_0^t ds \\ &= \int_0^t \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{X_s^2 + 2} \right) \sqrt{1 + \frac{1}{X_s^2 + 1}} dB_s + t. \end{aligned}$$

Lấy kỳ vọng hai vế ta được

$$\mathbf{E}[g_1(X_t)] = t, \quad (11)$$

với mọi $t \geq 0$. Ta có đẳng thức sau

$$\left| \mathbf{E} \left[\frac{X_t}{t} - \gamma \right] \right| = \left| \mathbf{E} \left[\frac{X_t}{t} - \gamma \times \frac{g_1(X_t)}{t} \right] \right|. \quad (12)$$

Nếu giá trị của X_t bị chặn bởi $N(\varepsilon)$, tức là $|X_t| \leq N(\varepsilon)$, thì giá trị của $f(X_t)$ cũng bị chặn bởi hằng số $C(N(\varepsilon))$. Từ đó dẫn đến

$$|X_t - \gamma \times g_1(X_t)| \leq N(\varepsilon) + |\gamma|C(N(\varepsilon)).$$

Do đó, vế phải của (12) tiến về 0 khi t dần ra vô cùng. Ngược lại, nếu $|X_t| > N(\varepsilon)$ thì vế phải của (12) bị chặn bởi

$$\mathbf{E} \left[\left| \frac{X_t}{t} \right| \times \left| 1 - \gamma \times \frac{g_1(X_t)}{t} \right| \right] < \varepsilon \sqrt{\mathbf{E} \left(\frac{X_t^2}{t^2} \right)}. \quad (13)$$

Bất đẳng thức sau cùng được suy ra từ (9) và từ bất đẳng thức Cauchy-Schwartz cho biến ngẫu nhiên. Đến đây, để có kết quả như trong (6) ta cần chỉ ra rằng biểu thức dưới căn bậc hai trong (13) bị chặn.

Lặp lại các bước như trên, ta lại xét phương trình vi phân cấp hai

$$\mathcal{L}_\gamma g_2(x) = g_1(x) \quad (14)$$

với điều kiện $g_2(0) = 0$. Phương trình (14) tương đương với phương trình

$$\left[\gamma \left(1 + \frac{1}{x^2+1} \right) - \frac{x}{(x^2+1)^2} \right] g_2'(x) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{x^2+1} \right) g_2''(x) = \frac{1}{\gamma} \left(x - \int_0^x \frac{1}{v^2+2} dv \right). \quad (15)$$

Tiến hành giải phương trình (15) ta được nghiệm là

$$g_2(x) = \frac{1}{2\gamma^2} (x^2 - 2x) - \frac{1}{2\gamma^2} \ln(x^2 + 2) + \frac{1}{\gamma} \int_0^x \frac{1}{v^2+2} dv - \beta(x),$$

trong đó

$$\beta(x) = \frac{2}{\gamma} \int_0^x \frac{v^2+1}{v^2+2} \times \frac{1}{e^{2\gamma v}} \int_{-\infty}^v e^{2\gamma u} \int_0^u \frac{1}{s^2+2} ds du dv.$$

Vì giá trị của tích phân $\int_0^u \frac{1}{s^2+2} ds$ bị chặn bởi hằng số dương D nên

$$0 \leq |\beta(x)| \leq D \times \left| \frac{2}{\gamma} \int_0^x \frac{v^2+1}{v^2+2} \times \frac{1}{e^{2\gamma v}} \int_{-\infty}^v e^{2\gamma u} du dv \right| = D \times \frac{1}{|\gamma|} |g_1(x)|.$$

Kết hợp với tính chất $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g_1(x)/x = 1/\gamma$ ta được kết quả là $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \beta(x)/x^2 = 0$. Từ đó dẫn đến giới hạn sau

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{g_2(x)}{x^2} &= \frac{1}{2\gamma^2} - \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{1}{\gamma^2 x} - \frac{1}{2\gamma^2 x^2} \ln(x^2 + 2) + \frac{1}{\gamma x^2} \int_0^x \frac{1}{v^2+2} dv \right] \\ &= \frac{1}{2\gamma^2} \end{aligned}$$

bằng cách áp dụng quy tắc L'Hopital cho giới hạn của hàm sau cùng. Khi đó, với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại một số $M(\varepsilon) > 0$ sao cho với mọi $|x| > M(\varepsilon)$ ta có

$$\left| \frac{x^2}{g_2(x)} - 2\gamma^2 \right| < \varepsilon. \quad (16)$$

Mặt khác, theo công thức Itô (5) ta có

$$dg_2(X_t) = g_2'(X_t) \sqrt{1 + \frac{1}{X_t^2 + 1}} dB_t + g_1(X_t) dt.$$

Từ đó dẫn đến

$$\begin{aligned} g_2(X_t) &= g_2(X_0) + \int_0^t g_2'(X_s) \sqrt{1 + \frac{1}{X_s^2 + 1}} dB_s + \int_0^t g_1(X_s) ds \\ &= \int_0^t g_2'(X_s) \sqrt{1 + \frac{1}{X_s^2 + 1}} dB_s + \int_0^t g_1(X_s) ds. \end{aligned}$$

Lấy kỳ vọng hai vế ta được

$$\mathbf{E}[g_2(X_t)] = \int_0^t s ds = \frac{t^2}{2},$$

với mọi $t \geq 0$. Ta có đẳng thức sau

$$\left| \mathbf{E} \left[\frac{X_t^2}{t^2} - \gamma^2 \right] \right| = \left| \mathbf{E} \left[\frac{X_t}{t^2} - \gamma^2 \times \frac{2g_2(X_t)}{t^2} \right] \right|. \quad (17)$$

Nếu giá trị của X_t bị chặn bởi $N(\varepsilon)$, tức là $|X_t| \leq M(\varepsilon)$, thì giá trị của $g_2(X_t)$ cũng bị chặn bởi hằng số $C(M(\varepsilon))$. Từ đó dẫn đến

$$|X_t - \gamma^2 g_2(X_t)| \leq M(\varepsilon) + \gamma^2 C(N(\varepsilon)).$$

Do đó, vế phải của (17) tiến về 0 khi t dần ra vô cùng. Ngược lại, nếu $|X_t| > M(\varepsilon)$ thì vế phải của (17) bị chặn bởi

$$\mathbf{E} \left[\frac{g_2(X_t)}{t^2} \times \left| \frac{X_t^2}{g_2(X_t)} - 2\gamma^2 \right| \right] < \varepsilon.$$

Bất đẳng thức sau cùng được suy ra từ (16) và hàm $g_2(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Cho ε dần về 0 ta được

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E}_\gamma \left(\frac{X_t}{t} \right)^2 = \gamma^2 \quad (18)$$

hay tương đương với $\mathbf{E}_\gamma (X_t/t)^2$ bị chặn. Như vậy Mệnh đề 3.1 đã được chứng minh.

4. Quá trình khuếch tán không có lực tác động ngoài

Ta xét mô hình không lực ngoài tác động $\gamma = 0$. Các bước xây dựng bài toán và chứng minh tương tự phần trước nhưng được điều chỉnh lại một cách thích hợp. Ta có mệnh đề sau liên quan đến giới hạn của moment bậc 2 của quá trình khuếch tán như sau

Mệnh đề 4.1. Với quá trình khuếch tán $(X_t)_{t \geq 0}$ thỏa phương trình (3) thì

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left(\frac{X_t}{t} \right)^2 = 1. \quad (19)$$

Chứng minh. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $X_0 = 0$. Ta xét phương trình vi phân cấp hai

$$\mathcal{L}g(x) = 1, \quad (20)$$

với điều kiện $g(0) = 0$. Phương trình (20) tương đương với phương trình

$$-\frac{x}{(x^2 + 1)^2} g'(x) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{x^2 + 1}\right) g''(x) = 1. \quad (21)$$

Tiến hành giải phương trình (21) ta được một nghiệm là

$$g(x) = x^2 - \ln(x^2 + 2) + \ln 2.$$

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{g(x)}{x^2} &= 1 - \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\ln(x^2 + 2) - \ln 2}{x^2} \\ &= 1 - \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{\ln(x^2 + 2)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

bằng cách áp dụng quy tắc L'Hopital. Khi đó, với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại một số $K(\varepsilon) > 0$ sao cho với mọi $|x| > K(\varepsilon)$ ta có

$$\left| \frac{x}{g(x)} - 1 \right| < \varepsilon. \quad (22)$$

Mặt khác, theo công thức Itô (5) ta có

$$dg(X_t) = \left(2X_t - \frac{2X_t}{\ln(X_t^2 + 1)} \right) \sqrt{1 + \frac{1}{X_t^2 + 1}} dB_t + dt. \quad (23)$$

Từ đó dẫn đến

$$\begin{aligned} g(X_t) &= g(X_0) + \int_0^t \left(2X_s - \frac{2X_s}{\ln(X_s^2 + 1)} \right) \sqrt{1 + \frac{1}{X_s^2 + 1}} dB_s + \int_0^t ds \\ &= \int_0^t \left(2X_s - \frac{2X_s}{\ln(X_s^2 + 1)} \right) \sqrt{1 + \frac{1}{X_s^2 + 1}} dB_s + t. \end{aligned}$$

Lấy kỳ vọng hai vế ta được

$$\mathbf{E}[g(X_t)] = t, \quad (24)$$

với mọi $t \geq 0$. Ta có đẳng thức sau

$$\left| \mathbf{E} \left[\frac{X_t^2}{t} - 1 \right] \right| = \left| \mathbf{E} \left[\frac{X_t^2}{t} - \frac{g(X_t)}{t} \right] \right|. \quad (25)$$

Nếu giá trị của X_t bị chặn bởi $K(\varepsilon)$, tức là $|X_t| \leq K(\varepsilon)$, thì giá trị của $g(X_t)$ cũng bị chặn bởi hằng số $C(K(\varepsilon))$. Từ đó dẫn đến

$$|X_t^2 - g(X_t)| \leq N^2(\varepsilon) + C(K(\varepsilon)).$$

Do đó, vế phải của (25) tiến về 0 khi t dần ra vô cùng. Ngược lại, nếu $|X_t| > K(\varepsilon)$ thì vế phải của (25) bị chặn bởi

$$\mathbf{E} \left[\frac{g(X_t)}{t} \times \left| \frac{X_t^2}{g(X_t)} - 1 \right| \right] < \varepsilon.$$

Bất đẳng thức sau được suy ra từ (22) và hàm $g(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Cho ε dần về 0 ta được vế phải của (25) hội tụ về 0. Như vậy Mệnh đề 4.1 đã được chứng minh.

5. Kết luận

Bài báo đã khảo sát tính chất nghiệm của một lớp phương trình vi phân ngẫu nhiên trong các trường hợp có lực ngoài tác động và không có lực ngoài tác động. Bằng cách vận dụng toán tử cực vi và công thức Itô để thiết lập các moment bậc 1 và bậc 2 của quá trình khuếch tán rồi từ đó chỉ ra được mối liên hệ giữa chúng. Kết quả chỉ ra được trong bài báo cho trường hợp các hệ số khuếch tán và hệ số trượt là các hàm số đặc biệt cụ thể. Vấn đề quan trọng cần nghiên cứu tiếp theo là các điều kiện cho các hệ số này để đảm bảo các kết quả được trình bày vẫn còn đúng.

Tài liệu tham khảo

- Ba, D. T. B., & Nhan, L. H. (2024). Sự tồn tại, tính duy nhất và một số tính chất của nghiệm trong một lớp phương trình vi phân ngẫu nhiên với hệ số trượt không thỏa điều kiện Lipschitz. *Tạp chí Khoa học Đại học Cần Thơ*, 60(CĐ Khoa học tự nhiên), 91-97. <https://doi.org/10.22144/ctujos.2024.331>
- Billingsley, P. (1995). *Probability and Measure* (3rd edition). John Wiley, New York.
- Chương, L. H., Lộc, T. P., Kim, L. M., & Thiện, T. T. (2021). Luật số lớn cho quá trình khuếch tán trong không gian một chiều. *Tạp chí Khoa học Đại học Cần Thơ*, 57(1), 26-29. <https://doi.org/10.22144/ctu.jvn.2021.004>
- Einstein, A. (1956). *Investigations on the theory of the Brownian movement*. Edited with notes by R. F^{ur}th. Translated by A. D. Cowper. Dover Publications, Inc., New York.
- Gantert, N. Mathieu, P., & Piatnitski, A. (2012). Einstein relation for reversible diffusions in random environment. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 65, 187–228. <https://doi.org/10.1002/cpa.20389>
- Ikeda, N., & Watanabe, S. (1981). *Stochastic differential equations and diffusion processes*. Elsevier. [https://doi.org/10.1016/S0924-6509\(08\)70217-4](https://doi.org/10.1016/S0924-6509(08)70217-4)
- Itô, K. (1951). On a formula concerning stochastic differentials. *Nagoya Mathematical Journal*, 3, 55–65. <https://doi.org/10.1017/S0027763000012216>
- Lam, H. C., & Depauw, J. (2016). Einstein relation for reversible random walks in random environment on $\mathbb{Z}$. *Stochastic Processes and their Applications*. 126, 983–996. <https://doi.org/10.1016/j.spa.2015.10.007>
- Oksendal, B. (2013). *Stochastic differential equations: an introduction with applications*. Springer Science & Business Media. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-03185-8>