TẠP CHÍ KHOA HỌC ĐẠI HỌC ĐỒNG THÁP
Dong Thap University Journal of Science
Chuyên san Khoa học Tự nhiên
ISSN 0866-7675 | e-ISSN 2815-567X

DOI: https://doi.org/10.52714/dthu.ns.2564.1875

VỀ MỘT LỚP BÀI TOÁN BIÊN NEUMANN CHO PHƯƠNG TRÌNH ELLIPTIC KIỂU KIRCHHOFF VỚI SỐ MŨ BIẾN THIÊN SUY RỘNG

Nguyễn Thành Chung và Hoàng Thị Thu Hải*

Khoa Toán – Tin, Trường Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng, Việt Nam

**Tác giả liên hệ, Email: hoangthithuhai1998@gmail.com*

Lịch sử bài báo

Ngày nhận: 09/7/2025; Ngày nhận chỉnh sửa: 14/9/2025; Ngày duyệt đăng: 25/9/2025

Tóm tắt

Trong bài báo này, chúng tôi sẽ nghiên cứu một lớp bài toán biên Neumann cho phương trình elliptic kiểu Kirchhoff với biểu thức phi tuyến ở vế phải chứa tích phân. Bằng cách sử dụng nguyên lí biến phân Ekeland và lí thuyết điểm tới hạn trong không gian Sobolev với số mũ biến thiên suy rộng, chúng tôi thiết lập các điều kiện để đảm bảo sự tồn tại nghiệm yếu không tầm thường của bài toán.

Từ khóa: *Bài toán biên Neumann, phương trình elliptic kiểu Kirchhoff, nguyên lí biến phân Ekeland, số mũ biến thiên không đẳng hướng.*

Trích dẫn: Nguyễn, T. C., & Hoàng, T. T. H. (2026). Về một lớp bài toán biên neumann cho phương trình elliptic kiểu Kirchhoff với số mũ biến thiên suy rộng. *Tạp chí Khoa học Đại học Đồng Tháp*, *15*(8), 60-73. https://doi.org/10.52714/dthu.ns.2564.1875

ON A CLASS OF NEUMANN BOUNDARY PROBLEM FOR ELLIPTIC KIRCHHOFF-TYPE EQUATIONS WITH GENERALIZED VARIABLE EXPONENTS

Nguyen Thanh Chung and Hoang Thi Thu Hai*

Faculty of Mathematics and Information Technology,
The University of Danang - University of Science and Education, Vietnam

Corresponding author, Email: hoangthithuhai1998@gmail.com

Article history

Received: 09/7/2025; Received in revised form: 14/9/2025; Accepted: 25/9/2025

Abstract

This paper examines a class of Neumann boundary value problems for Kirchhoff-type elliptic equations whose nonlinear terms on the right-hand side involve integral expressions. It applied Ekeland's variational principle and the critical point theory in Sobolev spaces with generalized variable exponents. Then, the conditions were established to guarantee the existence of a nontrivial weak solution to the problem.

Keywords: *anisotropic variable exponents, Ekeland's variational principle, Kirchhoff-type elliptic equations, Neumann boundary value problems.*

1. Mở đầu

Trong bài báo này, chúng tôi sẽ nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu của bài toán biên Neumann đối với phương trình elliptic kiểu Kirchhoff có dạng

$$\begin{cases} -M(I(u))\left(\sum_{i=1}^{N}\partial_{x_i}\left(\left|\partial_{x_i}u\right|^{p_i(x)-2}\partial_{x_i}u\right)-\sum_{i=1}^{N}|u|^{p_i(x)-2}u\right) \\ \qquad = \lambda\left(\int_\Omega \frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)}\,dx\right)^{\gamma}|u|^{q(x)-2}u, \quad \text{trong } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta}=0 \qquad\qquad \text{trên } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

trong đó $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$ là một miền bị chặn với biên Lipschitz $\partial\Omega$, η là vec-tơ pháp tuyến đơn vị hướng ra ngoài của biên $\partial\Omega$, $\lambda > 0, \gamma \geq 0$ là các tham số thực, $p_i, q: \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ là các hàm liên tục sao cho $2 \leq p_i(x) < N, i \in \{1, \dots, N\}$, $q(x) > 1$ với mọi $x \in \overline{\Omega}$. Hàm Kirchhoff được nghiên cứu trong bài toán (1.1) có dạng $M(t) = a + bt^{\kappa}, t \geq 0$ với $a, \kappa > 0, b \geq 0$, và $I(u)$ được cho bởi công thức

$$I(u) = \sum_{i=1}^{N}\int_\Omega \frac{\left|\partial_{x_i}u\right|^{p_i(x)} + |u|^{p_i(x)}}{p_i(x)}dx.$$

Bài toán (1.1) thường được gọi chung là bài toán không địa phương, phương trình thứ nhất của (1.1) chứa biểu thức tích phân trên Ω nên đẳng thức không xảy ra theo nghĩa hai vế bằng nhau tại mọi điểm của $x \in \Omega$ mà chỉ cần giá trị của biểu thức tích phân thỏa mãn. Một số mô hình trong các hệ vật lí và sinh học có dạng (1.1), trong đó hàm u mô tả một quá trình phụ thuộc vào giá trị trung bình của nó, chẳng hạn như mật độ dân số. Bài toán (1.1) liên quan đến dạng tĩnh của phương trình

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{P_0}{h} + \frac{E}{2L}\int_0^L \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{1.2}$$

được Kirchhoff đề xuất năm 1883 và được gọi là phương trình Kirchhoff. Phương trình (1.2) là sự mở rộng phương trình sóng cổ điển của d'Alembert bằng cách xét đến tác động của sự thay đổi chiều dài trong quá trình dao động. Các tham số trong (1.2) có ý nghĩa như sau: L là chiều dài dây, h là diện tích mặt cắt ngang, E là mô-đun Young của vật liệu, ρ là mật độ khối lượng và P_0 là lực căng ban đầu, chi tiết đọc giả có thể xem tài liệu (Chipot & Lovat, 1997).

Khi $M(t) = 1$ và $\gamma = 0$, bài toán (1.1) đã được nhiều nhà toán học nghiên cứu trong trường hợp p là một hằng số (Baraket & Bisc, 2017 và Chipot & Lovat, 1997) hoặc $p: \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ là một hàm số liên tục (Dai & Hao, 2009, Diening & cs., 2011 và Zuo & Massar, 2024). Rõ ràng, toán tử $p(x)$-Laplace dạng $\Delta_{p(x)}u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u)$ có các tính chất phức tạp hơn so với toán tử p-Laplace, chẳng hạn đây là lớp toán tử không thuần nhất. Việc nghiên cứu các bài toán với số mũ biến thiên rất đáng được quan tâm xuất phát từ các ứng dụng của nó trong toán học cũng như các lĩnh vực khoa học kĩ thuật khác (Diening & cs., 2011).

Mục tiêu chính của chúng tôi là nghiên cứu bài toán biên Neumann đối với phương trình elliptic kiểu Kirchhoff (1.1) trong không gian Sobolev với số mũ biến thiên suy rộng $\mathrm{W}^{1,\vec{p}(x)}(\Omega)$. Đây là lớp không gian hàm được mở rộng từ không gian Sobolev với số mũ biến thiên $\mathrm{W}^{1,p(x)}(\Omega)$, trong đó $\vec{p}(x) = \left(p_1(x), p_2(x), \dots, p_N(x)\right)$, các hàm $p_i(x), i \in \{1,2,\dots,N\}$, là các hàm liên tục trên $\overline{\Omega}$. Cụ thể hơn, toán tử $p(x)$-Laplace được thay thế bằng toán tử vi phân không thuần nhất dạng tổng quát

$$\sum_{i=1}^{N} \partial_{x_i}\left(\left|\partial_{x_i} u\right|^{p_i(x)-2} \partial_{x_i} u\right).$$

Toán tử vi phân nói trên còn được gọi là toán tử elliptic không đẳng hướng bởi giá trị các số mũ $p_i(x)$ khác nhau, $i \in \{1, \ldots, N\}$. Bài toán elliptic không đẳng hướng với điều kiện biên Dirchlet được nghiên cứu đầu tiên bởi Fragalà & cs. (2004), ở đó $p_i(x) = p_i$ là các hằng số. Mihăilescu & cs. (2008) nghiên cứu phát triển cho trường hợp $p_i: \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ là các hàm số liên tục. Trong trường hợp biên Neumann, Boureanu và Rădulescu (2012), và Chao (2009) đã nghiên cứu bài toán (1.1) cho trường hợp $M(t) = 1$ và $\gamma = 0$. Gần đây, Nguyen (2018) đã nghiên cứu một lớp bài toán biên Dirichlet cho phương trình elliptic kiểu Kirchhoff với hàm $M(t) = a + bt^{\kappa}, a, \kappa > 0, b \geq 0$ và $\gamma = 0$. Từ những kết quả đạt được trong các bài báo Chao (2009) và Nguyen (2018), trong bài báo này chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu của bài toán (1.1) với điều kiện biên Neumann và biểu thức phi tuyến ở vế phải chứa tích phân, tức là tham số $\gamma > 0$. Rõ ràng, với sự xuất hiện của toán tử vi phân elliptic không đẳng hướng, bài toán Kirchhoff (1.1) sẽ phức tạp hơn và chưa được nghiên cứu nhiều. Đặc biệt, vế phải của (1.1) liên quan đến các biểu thức tích phân. Các bài toán này có nhiều ứng dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực như động lực học quần thể, sự hình thành các dải trượt trong khoa học vật liệu, sự truyền nhiệt trong môi trường có điện trở, … (xem Gomes & Sanchez, 2005).

Với một số điều kiện nhất định liên quan đến các hàm số mũ p_i, q và các hằng số κ, γ, sử dụng lí thuyết điểm tới hạn (Struwe, 2008) kết hợp với nguyên lí biến phân Ekeland (Ekeland, 1974), chúng tôi chứng minh rằng bài toán (1.1) có ít nhất một nghiệm yếu không tầm thường trong không gian Sobolev với số mũ biến thiên suy rộng $\mathrm{W}^{1,\vec{p}(x)}(\Omega)$.

2. Không gian Sobolev với số mũ biến thiên suy rộng

Trong phần này, chúng tôi sẽ trình bày một số định nghĩa và tính chất cơ bản của không gian Sobolev với số mũ biến thiên suy rộng $\mathrm{W}^{1,\vec{p}(x)}(\Omega)$ với Ω là một miền bị chặn có biên Lipschitz trong $\mathbb{R}^N$, xem Chao (2009), Diening & cs., (2011) và Mihăilescu & cs. (2008). Đặt

$$C_+(\overline{\Omega}) := \left\{p \in C(\overline{\Omega}): \min_{x \in \overline{\Omega}} p(x) > 1\right\}.$$

Với mỗi $p \in C_+(\overline{\Omega})$, ta kí hiệu $p^+ := \sup_{x \in \overline{\Omega}} p(x)$ và $p^- := \inf_{x \in \overline{\Omega}} p(x)$. Với mỗi $p \in C_+(\overline{\Omega})$, ta định nghĩa không gian Lebesgue với số mũ biến thiên

$$\mathrm{L}^{p(x)}(\Omega) := \left\{u: \Omega \to \mathbb{R} \text{ đo được: } \int_{\Omega} |u(x)|^{p(x)} dx < \infty\right\},$$

với *chuẩn Luxemburg* như sau

$$|u|_{p(x)} := \inf\left\{\mu > 0: \int_{\Omega} \left|\frac{u(x)}{\mu}\right|^{p(x)} dx \leq 1\right\}.$$

Ta định nghĩa

$$\mathrm{W}^{1,p(x)}(\Omega) := \left\{u \in \mathrm{L}^{p(x)}(\Omega): |\nabla u| \in \mathrm{L}^{p(x)}(\Omega)\right\},$$

với chuẩn

$$\|u\|_{W^{1,p(x)}(\Omega)} := |u|_{p(x)} + |\nabla u|_{p(x)}. \tag{2.1}$$

Mệnh đề 2.1. (Diening & cs., 2011) *Không gian* $L^{p(x)}(\Omega)$ *và* $W^{1,p(x)}(\Omega)$ *là không gian Banach phản xạ và tách được nếu* $p^- > 1$.

Ta kí hiệu $L^{p'(x)}(\Omega)$ là không gian liên hợp của $L^{p(x)}(\Omega)$, trong đó $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1$. Ta có bất đẳng thức Hölder được phát biểu trong mệnh đề sau.

Mệnh đề 2.2. (Diening & cs., 2011) *Với mỗi* $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ *và* $v \in L^{p'(x)}(\Omega)$*, ta có*

$$\left|\int_\Omega uvdx\right| \le \left(\frac{1}{p^-} + \frac{1}{(p')^-}\right)|u|_{p(x)}|v|'_p(x). \tag{2.2}$$

Mệnh đề 2.3. (Diening & cs., 2011) *Trong không gian* $L^{p(x)}(\Omega)$ *ta xét ánh xạ* $\rho_{p(x)}: L^{p(x)}(\Omega) \to \mathbb{R}$ *xác định bởi công thức*

$$\rho_{p(x)}(u) := \int_\Omega |u|^{p(x)}dx \text{ với mọi } u \in L^{p(x)}(\Omega).$$

Khi đó, với mọi dãy $(u_n) \subset L^{p(x)}(\Omega), u \in L^{p(x)}(\Omega)$ *và* $p^+ < \infty$*, ta có các khẳng định sau đây*

$$\text{Với } u \ne 0, |u|_{p(x)} = \lambda \Leftrightarrow \rho_{p(x)}\left(\frac{u}{\lambda}\right) = 1, \tag{2.3}$$

$$|u|_{p(x)} < 1 (= 1, > 1) \Leftrightarrow \rho_{p(x)}(u) < 1 (= 1, > 1), \tag{2.4}$$

$$|u|_{p(x)} > 1 \Rightarrow |u|_{p(x)}^{p^-} < \rho_{p(x)}(u) < |u|_{p(x)}^{p^+}, \tag{2.5}$$

$$|u|_{p(x)} < 1 \Rightarrow |u|_{p(x)}^{p^+} < \rho_{p(x)}(u) < |u|_{p(x)}^{p^-}, \tag{2.6}$$

$$\lim_{n\to\infty} |u_n|_{p(x)} = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \rho_{p(x)}(u_n) = 0\,, \tag{2.7}$$

$$|u_n|_{p(x)} \to \infty \Leftrightarrow \rho_{p(x)}(u_n) \to \infty. \tag{2.8}$$

Mệnh đề 2.4. (Diening & cs., 2011) *Nếu* $q \in C(\overline{\Omega})$ *và giả sử* $1 \le q(x) < p^*(x)$ *với mọi* $x \in \overline{\Omega}$ *thì phép nhúng*

$$W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p(x)}(\Omega),$$

là liên tục và compact, trong đó $p^*(x) = \frac{Np(x)}{N-p(x)}$ *nếu* $p(x) < N$ *hoặc* $p^*(x) = \infty$ *nếu* $p(x) > N$.

Với $p_i(x) \in C_+(\overline{\Omega})$ và $p_i(x) \ge 2$ với $i = \{1,2,\dots,N\}$, ta biết rằng $|\nabla u|_{p(x)}$ là tương đương với $\sum_{i=1}^N \left|\partial_{x_i} u\right|_{p_{i(x)}}$, và $|u|_{p(x)}$ là tương đương với $N|u|_{p_i(x)}$ nên suy ra $\sum_{i=1}^N \left|\partial_{x_i} u\right|_{p_i(x)} + N|u|_{p_i(x)}$ là chuẩn tương đương với chuẩn (2.1). Tiếp theo, chúng tôi sẽ giới thiệu không gian Sobolev với số mũ biến thiên suy rộng $W^{1,\vec{p}(x)}(\Omega)$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán (1.1). Xét $\vec{p}: \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ là hàm vectơ với $\vec{p}(x) = (p_1(x), p_2(x), \dots, p_N(x))$, ta định nghĩa chuẩn trong không gian $W^{1,\vec{p}(x)}(\Omega)$ như sau

$$\|u\|_{\vec{p}(x)} = \sum_{i=1}^N \left|\partial_{x_i} u\right|_{p_{i(x)}} + \sum_{i=1}^N |u|_{p_i(x)}.$$

Để thuận lợi trong quá trình tính toán, chúng tôi sử dụng các kí hiệu và $P_+^+, P_-^- \in \mathbb{R}^+$ được định nghĩa như sau

$$P_+^+ = \max\{p_1^+, p_2^+, \dots, p_N^+\}, \qquad P_-^- = \min\{p_1^-, p_2^-, \dots, p_N^-\},$$

và kí hiệu $X = \mathrm{W}^{1,\vec{p}(x)}(\Omega)$. Khi đó $\left(\mathrm{W}^{1,\vec{p}(x)}(\Omega), \|.\|_{\vec{p}(x)}\right)$ là một không gian Banach phản xạ và tách được, (Borueanu & Rădulescu, 2012 và Nguyen, 2018).

Mệnh đề 2.6. (Nguyen, 2018) *Nếu $q \in C_+(\overline{\Omega})$ thỏa mãn $q(x) < \frac{NP_-^-}{N-P_-^-}$ với mọi $x \in \overline{\Omega}$ thì phép nhúng $X \hookrightarrow L^{s(x)}(\Omega)$ là liên tục và compact.*

3. Sự tồn tại nghiệm yếu của bài toán (1.1)

Trong phần này, chúng tôi sẽ phát biểu và chứng minh kết quả chính của bài báo về sự tồn tại nghiệm yếu của bài toán (1.1).

Định nghĩa 3.1. Ta nói hàm $u \in X$ được gọi là một nghiệm yếu của bài toán (1.1) nếu nó thỏa mãn

$$\left(a + b\left(I(u)\right)^\kappa\right) \sum_{i=1}^N \int_\Omega \left(\left|\partial_{x_i} u\right|^{p_i(x)-2} \partial_{x_i} u \partial_{x_i} v + |u|^{p_i(x)-2} uv\right) dx$$
$$-\lambda\left(\int_\Omega |u|^{q(x)} dx\right)^\gamma \int_\Omega |u|^{q(x)-2} uv dx = 0. \tag{3.1}$$

với mọi $v \in X$.

Đặc biệt, trong trường hợp $\gamma = 0, \kappa = 1, p_i(x) = 2$ với mọi $i \in \{1, .., N\}$ và $q(x) = q$ là một hằng số, bài toán (1.1) trở thành

$$\begin{cases} -\left(a + b\int_\Omega \dfrac{|\nabla u|^2 + N|u|^2}{2} dx\right)(\Delta u - Nu) = \lambda |u|^{q-2} u & \text{trong } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{trên } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.2}$$

Với mọi $\lambda > 0$, phiếm hàm năng lượng $J_\lambda: X \to \mathbb{R}$ tương ứng với bài toán (1.1) được cho bởi công thức

$$J_\lambda(u) = aI(u) + \frac{b}{\kappa + 1}\left(I(u)\right)^{\kappa+1} - \frac{\lambda}{\gamma + 1}\left(\int_\Omega \frac{1}{q(x)} |u|^{q(x)} dx\right)^{\gamma+1}. \tag{3.3}$$

Từ Mệnh đề 2.6, ta có thể thấy rằng phiếm hàm $J_\lambda \in C^1(X, \mathbb{R})$ và đạo hàm Fréchet của J_λ được cho bởi công thức

$$\langle J_\lambda'(u), v\rangle = \left(a + b\left(I(u)\right)^\kappa\right) \sum_{i=1}^N \int_\Omega \left(\left|\partial_{x_i} u\right|^{p_i(x)-2} \partial_{x_i} u \partial_{x_i} v + |u|^{p_i(x)-2} uv\right) dx$$
$$-\lambda\left(\int_\Omega |u|^{q(x)} dx\right)^\gamma \int_\Omega |u|^{q(x)-2} uv dx,$$

với mọi $v \in X$. Do đó, nghiệm yếu của bài toán (1.1) là điểm tới hạn của phiếm hàm năng lượng J_λ.

Định lí 3.2. *Giả sử hàm $q \in C_+(\overline{\Omega})$ thỏa mãn*

$$1 < q^- < \frac{P_-^-}{\gamma+1} \text{ và } q^+ < \frac{NP_-^-}{(N-P_-^-)(\gamma+1)}. \tag{3.4}$$

Khi đó, tồn tại một hằng số $\lambda^* > 0$ sao cho với mỗi $\lambda \in (0, \lambda^*)$, bài toán (1.1) có ít nhất một nghiệm yếu không tầm thường $u \in X$ sao cho $J_\lambda(u) < 0$.

Nhận xét 3.3. 1) Với điều kiện (3.4), bài toán (1.1) được xét với biểu thức phi tuyến ở vế phải tổng quát, nghĩa là nó có thể dưới tuyến tính hoặc trên tuyến tính. Điều này khác với các kết quả nghiên cứu của Dai & Hao, 2009 và Zuo & Massar, 2024, ở đó các tác giả nghiên cứu bài toá Kirchhoff với biểu thức phi tuyến dưới tuyến tính hoặc trên tuyến tính.

2) Trong trường hợp $q(x) = q$ là một hằng số, ta có $q^- = q^+ = q$, do đó từ điều kiện $1 < q^- < \frac{P_-^-}{\gamma+1}$ ta có $q^+ < \frac{P_-^-}{\gamma+1} < \frac{NP_-^-}{(N-P_-^-)(\gamma+1)}$. Lúc này, rõ ràng biểu thức phi tuyến ở vế phải của bài toán (1.1) có dạng dưới tuyến tính. Kết quả của Định lí 3.2 có thể xem là một mở rộng của Dai & Hao, 2009, Theorem 3.1.

Từ Định lí 3.2, ta có hệ quả sau đây đối với bài toán (3.2).

Hệ quả 3.4. Giả sử $1 < q < 2$. Khi đó, tồn tại hằng số $\lambda^* > 0$ sao cho với mỗi $\lambda \in (0, \lambda^*)$, bài toán (3.2) có ít nhất một nghiệm yếu không tầm thường trong không gian $\mathrm{W}^{1,2}(\Omega)$.

Chúng tôi sẽ áp dụng nguyên lí biến phân Ekeland (Ekeland, 1974) và các kết quả trong lí thuyết điểm tới hạn để chứng minh Định lí 3.2. Trong phần tiếp theo, để chứng minh các bổ đề liên quan, chúng tôi luôn giả thiết rằng các điều kiện của Định lí 3.2 thỏa mãn.

Bổ đề 3.5. *Tồn tại hằng số $\lambda^* > 0$ sao cho với mỗi $\lambda \in (0, \lambda^*)$, có các hằng số $\rho, \alpha > 0$ thỏa mãn $J_\lambda(u) \geq \alpha > 0$ với mọi $u \in X$ thỏa mãn $\|u\|_{\vec{p}(x)} = \rho$.*

Chứng minh. Theo Mệnh đề 2.6 và giả thiết (3.4), ta có không gian X nhúng liên tục vào không gian $\mathrm{L}^{q(x)}(\Omega)$. Do đó, tồn tại hằng số $C_1 > 0$ sao cho

$$|u|_{q(x)} \leq C_1 \|u\|_{\vec{p}(x)}, \ \ \forall u \in X. \tag{3.5}$$

Chọn hằng số $\rho > 0$ sao cho $\rho < \min\left\{1, \frac{1}{C_1}\right\}$. Khi đó, từ bất đẳng thức (3.5) ta có $|u|_{q(x)} < 1$ với mọi $u \in X$ thỏa mãn $\|u\|_{\vec{p}(x)} = \rho$. Hơn nữa, theo công thức (2.6) của Mệnh đề 2.3, ta có

$$\int_\Omega |u|^{q(x)} dx \leq |u|_{q(x)}^{q^-}, \ \ \forall\, u \in X \text{ với } \|u\|_{\vec{p}(x)} = \rho. \tag{3.6}$$

Từ (3.5) và (3.6) suy ra

$$\int_\Omega |u|^{q(x)} dx \leq C_1^{q^-} \|u\|_{\vec{p}(x)}^{q^-}, \tag{3.7}$$

với mọi $u \in X$ với $\|u\|_{\vec{p}(x)} = \rho$. Mặt khác, vì $\|u\|_{\vec{p}(x)} = \rho < 1$, suy ra $\left|\partial_{x_i} u\right|_{p_i(x)} < 1$ và $|u|_{p_i(x)} < 1$ với mọi $i \in \{1, \dots, N\}$.

Đặt

$$\hat{I}(u) := \sum_{i=1}^N \int_\Omega \left(\left|\partial_{x_i} u\right|^{p_i(x)} + |u|^{p_i(x)}\right) dx.$$

Theo công thức (2.6) của Mệnh đề 2.3, ta có

$$\hat{I}(u) \geq \sum_{i=1}^{N}\left(\left|\partial_{x_i}u\right|_{p_i(x)}^{p^+} + |u|_{p_i(x)}^{p^+}\right) \geq \sum_{i=1}^{N}\left(\left|\partial_{x_i}u\right|_{p_i(x)}^{P_+^+} + |u|_{p_i(x)}^{P_+^+}\right)$$

$$\geq \frac{N}{2^{P_+^+-1}}\left(\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(\left|\partial_{x_i}u\right|_{p_{i(x)}} + |u|_{p_i(x)}\right)}{N}\right)^{P_+^+} = \frac{\|u\|_{\vec{p}(x)}^{P_+^+}}{(2N)^{P_+^+-1}}.$$

Khi đó,

$$\begin{aligned}
J_\lambda(u) &= aI(u) + \frac{b}{\kappa+1}\big(I(u)\big)^{\kappa+1} - \frac{\lambda}{\gamma+1}\left(\int_\Omega \frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)}dx\right)^{\gamma+1} \\
&\geq \frac{a}{P_+^+(2N)^{P_+^+-1}}\|u\|_{\vec{p}(x)}^{P_+^+} - \frac{\lambda}{(\gamma+1)(q^-)^{\gamma+1}}\left(C_1^{q^-}\|u\|_{\vec{p}(x)}^{q^-}\right)^{\gamma+1} \\
&\geq \frac{a}{P_+^+(2N)^{P_+^+-1}}\|u\|_{\vec{p}(x)}^{P_+^+} - \frac{\lambda C_1^{(\gamma+1)q^-}}{(\gamma+1)(q^-)^{\gamma+1}}\|u\|_{\vec{p}(x)}^{(\gamma+1)q^-} \\
&= \rho^{(\gamma+1)q^-}\left(\frac{a}{P_+^+(2N)^{P_+^+-1}}\rho^{P_+^+-(\gamma+1)q^-} - \frac{\lambda C_1^{(\gamma+1)q^-}}{(\gamma+1)(q^-)^{\gamma+1}}\right).
\end{aligned}$$

Do đó, nếu ta chọn hằng số

$$\lambda^* := \frac{a(\gamma+1)(q^-)^{\gamma+1}}{P_+^+2^{P_+^+}N^{P_+^+-1}C_1^{(\gamma+1)q^-}}\rho^{P_+^+-(\gamma+1)q^-} > 0, \tag{3.8}$$

thì với mỗi $\lambda \in (0,\lambda^*)$ và $u \in X$ với $\|u\|_{\vec{p}(x)} = \rho$, tồn tại $\alpha = \frac{a\rho^{P_+^+}}{P_+^+2^{P_+^+}N^{P_+^+-1}} > 0$ thỏa mãn $J_\lambda(u) \geq \alpha > 0$. Như vậy, Bổ đề 3.5 được chứng minh.

Bổ đề 3.6. *Tồn tại hàm $\psi \in X$ sao cho $\psi \geq 0, \psi \neq 0$ và $J_\lambda(t\psi) < 0$ với $t > 0$ đủ nhỏ.*

Chứng minh. Theo điều kiện (3.4) ta có $1 < q^- < \frac{P_-^-}{\gamma+1}$. Lấy $\epsilon_0 > 0$ sao cho $q^- + \epsilon_0 < \frac{P_-^-}{\gamma+1}$. Mặt khác, vì $q \in C_+(\overline{\Omega})$ nên tồn tại một tập mở $\Omega_0 \subset \Omega, |\Omega_0| > 0$ sao cho $|q(x) - q^-| < \epsilon_0$ với mọi $x \in \Omega_0$. Do đó, ta có

$$q(x) \leq q^- < \frac{P_-^-}{\gamma+1} \text{ với mọi } x \in \Omega_0.$$

Chọn hàm $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ sao cho $\mathrm{supp}(\psi) \supset \overline{\Omega}_0, \psi(x) = 1$ với mọi $x \in \overline{\Omega}_0$ và thỏa mãn $0 \leq \psi \leq 1$ trên Ω. Theo công thức (3.3) với mỗi $t \in (0,1)$, ta có

$$J_\lambda(t\psi) = aI(t\psi) + \frac{b}{\kappa+1}(I(t\psi))^{\kappa+1} - \frac{\lambda}{\gamma+1}\left(\int_\Omega \frac{1}{q(x)}|t\psi|^{q(x)}dx\right)^{\gamma+1}$$

$$\leq \frac{at^{P_-^-}}{P_-^-}\hat{I}(\psi) + \frac{bt^{P_-^-(\kappa+1)}}{(\kappa+1)(P_-^-)^{\kappa+1}}\left(\hat{I}(\psi)\right)^{\kappa+1} - \frac{\lambda}{(\gamma+1)(q^+)^{\gamma+1}}\left(\int_{\Omega_0} t^{q(x)}|\psi|^{q(x)}dx\right)^{\gamma+1}$$

$$\leq \frac{at^{P_-^-}}{P_-^-}\hat{I}(\psi) + \frac{bt^{P_-^-(\kappa+1)}}{(\kappa+1)(P_-^-)^{\kappa+1}}\left(\hat{I}(\psi)\right)^{\kappa+1} - \frac{\lambda t^{(q^-+\epsilon_0)(\gamma+1)}}{(\gamma+1)(q^+)^{\gamma+1}}\left(\int_{\Omega_0} |\psi|^{q(x)}dx\right)^{\gamma+1}$$

$$\leq t^{P_-^-}\left(\frac{a}{P_-^-}\hat{I}(\psi) + \frac{b}{(\kappa+1)(P_-^-)^{\kappa+1}}\left(\hat{I}(\psi)\right)^{\kappa+1}\right) - \frac{\lambda t^{(q^-+\epsilon_0)(\gamma+1)}}{(\gamma+1)(q^+)^{\gamma+1}}|\Omega_0|^{\gamma+1}.$$

Suy ra $J_\lambda(t\psi) < 0$ với $t < \delta^{\frac{1}{P_-^- - (q^-+\epsilon_0)(\gamma+1)}}$ với

$$0 < \delta < \min\left\{1, \frac{\lambda|\Omega_0|^{\gamma+1}}{(\gamma+1)(q^+)^{\gamma+1}}.\left(\frac{a}{P_-^-}\hat{I}(\psi) + \frac{b}{(\kappa+1)(P_-^-)^{\kappa+1}}\left(\hat{I}(\psi)\right)^{\kappa+1}\right)^{-1}\right\}. \quad (3.9)$$

Thật vậy, ta chỉ cần chứng minh $\hat{I}(\psi) > 0$, tức là có thể chọn được $\delta > 0$ thỏa mãn điều kiện (3.9). Ta có

$$0 < |\Omega_0| = \int_{\Omega_0} |\psi|^{q(x)}dx \leq \int_\Omega |\psi|^{q(x)}dx \leq \int_\Omega |\psi|^{q^-}dx, \quad (3.10)$$

và vì X nhúng liên tục vào $L^{q^-}(\Omega)$ nên tồn tại hằng số $C_2 > 0$ sao cho

$$|\psi|_{q^-} < C_2\|\psi\|_{\vec{p}(x)}.$$

Kết hợp bất đẳng thức này với (3.10) suy ra $\|\psi\|_{\vec{p}(x)} > 0$. Như vậy, $\hat{I}(\psi) > 0$ và Bổ đề 3.6 được chứng minh.

Chứng minh Định lí 3.2. Ta thấy rằng, chuẩn trong không gian X là một phiếm hàm nửa liên tục dưới yếu. Giả sử (u_n) là một dãy hội tụ yếu đến u trong X. Vì phép nhúng từ X vào không gian $L^{q(x)}(\Omega)$ là compact nên dãy (u_n) là một dãy hội tụ mạnh đến u trong không gian $L^{q(x)}(\Omega)$ nghĩa là $|u_n - u|_{q(x)} \to 0$ và $u_n(x) \to u(x)$ hầu khắp nơi trên Ω khi $n \to \infty$. Từ khẳng định (2.7) trong Mệnh đề 2.3, ta có

$$\rho_{p(x)}(u_n - u) = \int_\Omega |u_n - u|^{p(x)}dx \;\to\; 0,$$

khi $n \to \infty$. Do đó, theo Bổ đề 4.3 trong Nguyen và Ho (2022), ta có

$$\int_\Omega |u_n|^{q(x)}dx - \int_\Omega |u|^{q(x)}dx \to \; 0,$$

khi $n \to \infty$. Hơn nữa,

$$\left|\int_\Omega \frac{1}{q(x)}|u_n|^{q(x)}dx - \int_\Omega \frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)}dx\right| \leq \frac{1}{q^-}\left|\int_\Omega |u_n|^{q(x)}dx - \int_\Omega |u|^{q(x)}dx\right|,$$

suy ra

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_{\Omega}\frac{1}{q(x)}|u_n|^{q(x)}dx\right)^{\gamma+1}=\left(\int_{\Omega}\frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)}dx\right)^{\gamma+1}.$$

Nói tóm lại, phiếm hàm J_λ cho bởi công thức (3.3) nửa liên tục dưới yếu trong không gian X.

Kí hiệu $B_\rho(0)$ là hình cầu trong X có tâm tại gốc tọa độ và bán kính ρ. Lấy $\lambda^* > 0$ được xác định như trong Bổ đề 3.5 và $\lambda \in (0,\lambda^*)$. Theo Bổ đề 3.5 ta biết rằng,

$$\inf_{\partial B_\rho(0)} J_\lambda > 0.$$

Mặt khác, theo Bổ đề 3.6, tồn tại hàm $\psi \in X$ sao cho $\psi \geq 0$, $\psi \neq 0$ và $J_\lambda(t\,\psi) < 0$ với $t > 0$ đủ nhỏ. Hơn nữa, với mỗi $u \in B_\rho(0)$, ta có

$$J_\lambda(u) \geq \frac{a}{P_+^+(2N)^{P_+^+-1}}\|u\|_{\vec{p}(x)}^{P_+^+} - \frac{\lambda C_1^{(\gamma+1)q^-}}{(\gamma+1)(q^-)^{\gamma+1}}\|u\|_{\vec{p}(x)}^{(\gamma+1)q^-},$$

suy ra

$$-\infty < \underline{c} := \inf_{B_\rho(0)} J_\lambda < 0.$$

Bây giờ, ta lấy $0 < \epsilon < \inf_{\partial B_\rho(0)} J_\lambda - \inf_{B_\rho(0)} J_\lambda$. Áp dụng nguyên lí biến phân Ekeland (Ekeland, 1974) cho phiếm hàm $J_\lambda : \overline{B_\rho(0)} \to \mathbb{R}$, tồn tại $u_\epsilon \in B_\rho(0)$ sao cho

$$J_\lambda(u_\epsilon) < \inf_{B_\rho(0)} J_\lambda + \epsilon,$$

$$J_\lambda(u_\epsilon) < J_\lambda(u) + \epsilon\|u-u_\epsilon\|_{\vec{p}(x)},\ \ u \neq u_\epsilon.$$

Khi đó,

$$J_\lambda(u_\epsilon) \leq \inf_{B_\rho(0)} J_\lambda + \epsilon \leq \inf_{B_\rho(0)} J_\lambda + \epsilon < \inf_{\partial B_\rho(0)} J_\lambda,$$

suy ra rằng $u_\epsilon \in B_\rho(0)$.

Tiếp theo, với mỗi hằng số $\lambda \in (0,\lambda^*)$, ta xét phiếm hàm $K_\lambda : X \to \mathbb{R}$ xác định bởi công thức $K_\lambda(u) := J_\lambda(u) + \epsilon\|u-u_\epsilon\|_{\vec{p}(x)}$. Rõ ràng, ta thấy u_ϵ là một điểm cực tiểu của phiếm hàm K_λ nên ta có

$$\frac{K_\lambda(u_\epsilon+tv)-K_\lambda(u_\epsilon)}{t} \geq 0,$$

với mọi $t > 0$ đủ nhỏ và với mọi $v \in B_1(0)$. Từ đó, suy ra

$$\frac{J_\lambda(u_\epsilon+tv)-J_\lambda(u_\epsilon)}{t} + \epsilon\|v\|_{\vec{p}(x)} \geq 0.$$

Cho $t \to 0^+$ ta nhận được $\langle J_\lambda'(u_\epsilon), v\rangle + \epsilon\|v\|_{\vec{p}(x)} \geq 0$ mọi $v \in B_1(0)$. Thay hàm v bởi hàm $-v \in B_1(0)$, ta nhận được $\|J_\lambda'(u_\epsilon)\| \leq \epsilon$. Điều này có nghĩa là tồn tại một dãy hàm $\{u_n\} \subset B_\rho(0)$ sao cho

$$J_\lambda(u_n) \to \underline{c},\quad J_\lambda'(u_n) \to 0 \text{ trong } X^* \text{ khi } n \to \infty, \tag{3.11}$$

ở đây X^* được hiểu là không gian đối ngẫu của không gian X.

Rõ ràng, $\{u_n\} \subset B_\rho(0)$ là dãy bị chặn trong X. Hơn nữa X là không gian Banach phản xạ nên tồn tại một dãy con của dãy $\{u_n\}$, để đơn giản chúng ta vẫn kí hiệu là $\{u_n\}$, sao cho $\{u_n\}$ hội tụ yếu về một hàm u nào đó trong X. Theo Mệnh đề 2.6, không gian X nhúng compact trong $L^{q(x)}(\Omega)$, nghĩa là dãy $\{u_n\}$ hội tụ mạnh đến u trong $L^{q(x)}(\Omega)$. Khi đó, sử dụng bất đẳng thức Hölder (2.2) với $u = |u_n|^{q(x)-1} \in L^{q'(x)}(\Omega)$ và $v = u_n - u \in L^{q(x)}(\Omega)$, ta có

$$\left|\int_\Omega |u_n|^{q(x)-2} u_n(u_n - u)dx\right| \le \left||u_n|^{q(x)-1}\right|_{q'(x)} |u_n - u|_{q(x)},$$

trong đó $q'(x) = \frac{q(x)}{q(x)-1}$ là số mũ liên hợp của $q(x)$. Do dãy $\{u_n\}$ bị chặn trong X và dựa vào Mệnh đề 2.6, ta suy ra $\{u_n\}$ bị chặn trong $L^{q(x)}(\Omega)$. Khi đó, dãy $\{|u_n|^{q(x)-1}\}$ bị chặn trong $L^{q'(x)}(\Omega)$.

Vì dãy $\{u_n\}$ hội tụ mạnh đến u trong $L^{q(x)}(\Omega)$, nghĩa là $|u_n - u|_{q(x)} \to 0$ khi $n \to \infty$, nên ta được

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |u_n|^{q(x)-2} u_n(u_n - u)dx = 0.$$

Vì $\{u_n\}$ là dãy bị chặn trong $L^{q(x)}(\Omega)$, nên kết hợp với đẳng thức trên ta suy ra

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_\Omega |u_n|^{q(x)} dx\right)^\gamma \int_\Omega |u_n|^{q(x)-2} u_n(u_n - u)dx = 0. \tag{3.12}$$

Hơn nữa, theo (3.11) ta có $J'_\lambda(u_n) \to 0$ trong X^* khi $n \to \infty$, nghĩa là với mọi $v \in X$ ta có $\langle J'_\lambda(u_n), v\rangle \to 0$. Với $v = u_n - u$, ta có

$$\lim_{n\to\infty} \langle J'_\lambda(u_n), u_n - u\rangle$$

$$= \lim_{n\to\infty} \Big(a + b\big(I(u_n)\big)^\kappa\Big) \sum_{i=1}^N \int_\Omega \Big(\left|\partial_{x_i} u_n\right|^{p_i(x)-2} \partial_{x_i} u_n(\partial_{x_i} u_n - \partial_{x_i} u) + |u_n|^{p_i(x)-2} u_n(u_n - u)\Big) dx - \lambda \lim_{n\to\infty} \left(\int_\Omega |u_n|^{q(x)} dx\right)^\gamma \int_\Omega |u_n|^{q(x)-2} u_n(u_n - u)dx = 0.$$

Kết hợp đẳng thức này với (3.12), suy ra

$$\lim_{n\to\infty} \Big(a + b\big(I(u_n)\big)^\kappa\Big) \sum_{i=1}^N \int_\Omega \Big(\left|\partial_{x_i} u_n\right|^{p_i(x)-2} \partial_{x_i} u_n(\partial_{x_i} u_n - \partial_{x_i} u) + |u_n|^{p_i(x)-2} u_n(u_n - u)\Big) dx = 0. \tag{3.13}$$

Ta sẽ chứng minh

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^N \int_\Omega \Big(\left|\partial_{x_i} u_n\right|^{p_i(x)-2} \partial_{x_i} u_n(\partial_{x_i} u_n - \partial_{x_i} u) + |u_n|^{p_i(x)-2} u_n(u_n - u)\Big) dx = 0. \tag{3.14}$$

Để chứng minh đẳng thức (3.14), trước hết ta cần chứng minh dãy số $\{S_n\}$ xác định bởi công thức

$$S_n := I(u_n), \text{với } n = 1,2,\ldots$$

bị chặn. Thật vậy, vì $\{u_n\}$ là một dãy bị chặn trong X, nghĩa là tồn tại một hằng số $C_3 > 0$ sao cho

$$\|u_n\|_{\vec{p}(x)} = \sum_{i=1}^{N} \left|\partial_{x_i} u_n\right|_{p_{i(x)}} + \sum_{i=1}^{N} |u_n|_{p_i(x)} \leq C_3, \text{với mọi } n \in \mathbb{N}^*.$$

Kết hợp công thức trên và các khẳng định (2.9) và (2.10) của Mệnh đề 2.5, với mọi $i \in \{1, \ldots, N\}$, ta có

$$\begin{aligned} 0 \leq I(u_n) &\leq \frac{1}{P_-^-} \int_\Omega \left(\left|\partial_{x_i} u_n\right|^{p_i(x)} + |u_n|^{p_i(x)} \right) dx \\ &\leq \frac{1}{P_-^-} \max\left\{ \left|\partial_{x_i} u_n\right|_{p_i(x)}^{p^+} + |u_n|_{p_i(x)}^{p^+}, \left|\partial_{x_i} u_n\right|_{p_i(x)}^{p^-} + |u_n|_{p_i(x)}^{p^-} \right\} \leq \frac{1}{P_-^-} \max\left\{ C_3^{p^+}, C_3^{p^-} \right\}, \end{aligned}$$

suy ra

$$0 \leq S_n = I(u_n) \leq \frac{N}{P_-^-} \max\left\{ C_3^{p^+}, C_3^{p^-} \right\}, \quad \text{với } n = 1, 2, \ldots.$$

Suy ra, $\{S_n\}$ là một dãy số bị chặn. Do $M(t) = a + bt^\kappa$ là một hàm số liên tục trên $[0, \infty)$ nên ta có dãy số $\{\tilde{S}_n\}$ xác định bởi

$$\tilde{S}_n = a + b(I(u_n))^\kappa, \text{với } n = 1, 2, \ldots$$

bị chặn. Hơn nữa, theo định nghĩa ta có $\tilde{S}_n \geq a > 0$, với $n = 1, 2, \ldots$, từ đó ta nhận được đẳng thức (3.14).

Mặt khác, theo chứng minh trên, ta có dãy (u_n) hội tụ yếu về hàm u trong X nghĩa là

$$\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \left(\left|\partial_{x_i} u\right|^{p_i(x)-2} \partial_{x_i} u (\partial_{x_i} u_n - \partial_{x_i} u) + |u|^{p_{i(x)}-2} u(u_n - u) \right) dx = 0. \tag{3.15}$$

Từ (3.14) và (3.15) ta có

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \Bigg(&\left(\left|\partial_{x_i} u_n\right|^{p_i(x)-2} \partial_{x_i} u_n - \left|\partial_{x_i} u\right|^{p_i(x)-2} \partial_{x_i} u \right) \left(\partial_{x_i} u_n - \partial_{x_i} u \right) \\ &+ \left(|u_n|^{p_i(x)-2} u_n - |u|^{p_i(x)-2} u \right)(u_n - u) \Bigg) dx = 0. \end{aligned}$$

Tiếp theo, ta sử dụng bất đẳng thức dưới đây (Mihăilescu & cs., 2008)

$$(|\xi|^{r-2}\xi - |\psi|^{r-2}\psi)(\xi - \psi) \geq 2^{-r}|\xi - \psi|^r, \quad \xi, \psi \in \mathbb{R}^N, \tag{3.16}$$

với mọi $r \geq 2$. Với $\xi = \partial_{x_i} u_n,\ \psi = \partial_{x_i} u$ và $r = p_i(x) \geq 2$, $i = 1, 2, \ldots, N$, áp dụng bất đẳng thức (3.16) ta có

$$\left(\left|\partial_{x_i} u_n\right|^{p_i(x)-2} \partial_{x_i} u_n - \left|\partial_{x_i} u\right|^{p_i(x)-2} \partial_{x_i} u \right) \left(\partial_{x_i} u_n - \partial_{x_i} u \right) \geq 2^{-p_i(x)} \left|\partial_{x_i} u_n - \partial_{x_i} u\right|^{p_i(x)},$$

và với $\xi = u_n,\ \psi = u$ và $r = p_i(x) \geq 2$, $i = 1, 2, \ldots, N$, áp dụng bất đẳng thức (3.16) ta có

$$\left(|u_n|^{p_i(x)-2} u_n - |u|^{p_i(x)-2} u \right)(u_n - u) \geq 2^{-p_i(x)} |u_n - u|^{p_i(x)}.$$

Cộng vế theo vế hai bất đẳng thức trên, ta được

$$\left(\left|\partial_{x_i}u_n\right|^{p_i(x)-2}\partial_{x_i}u_n-\left|\partial_{x_i}u\right|^{p_i(x)-2}\partial_{x_i}u\right)\left(\partial_{x_i}u_n-\partial_{x_i}u\right)$$
$$+\left(|u_n|^{p_i(x)-2}u_n-|u|^{p_i(x)-2}u\right)(u_n-u)$$
$$\geq 2^{-p_i(x)}\left(\left|\partial_{x_i}u_n-\partial_{x_i}u\right|^{p_i(x)}+|u_n-u|^{p_i(x)}\right).$$

Lấy tích phân hai vế của bất đẳng thức trên theo x trên miền Ω, sau đó và cộng các bất đẳng thức thu được theo $i=1,\dots,N$ suy ra

$$\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega\left(\left(\left|\partial_{x_i}u_n\right|^{p_i(x)-2}\partial_{x_i}u_n-\left|\partial_{x_i}u\right|^{p_i(x)-2}\partial_{x_i}u\right)\left(\partial_{x_i}u_n-\partial_{x_i}u\right)\right.$$
$$\left.+\left(|u_n|^{p_i(x)-2}u_n-|u|^{p_i(x)-2}u\right)(u_n-u)\right)dx$$
$$\geq\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega 2^{-p_i(x)}\left(\left|\partial_{x_i}u_n-\partial_{x_i}u\right|^{p_i(x)}+|u_n-u|^{p_i(x)}\right)dx$$
$$\geq 2^{-N}\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega\left(\left|\partial_{x_i}u_n-\partial_{x_i}u\right|^{p_i(x)}+|u_n-u|^{p_i(x)}\right)dx. \qquad (3.17)$$

Từ các công thức (3.15) và (3.17) ta có

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega\left(\left|\partial_{x_i}u_n-\partial_{x_i}u\right|^{p_i(x)}+|u_n-u|^{p_i(x)}\right)dx=0.$$

Sử dụng khẳng định (2.7) của Mệnh đề 2.3 và định nghĩa chuẩn trong không gian X, suy ra dãy $\{u_n\}$ hội tụ mạnh đến u trong X. Do đó, theo (3.11) ta suy ra

$$J_\lambda(u)=\underline{c}<0=J_\lambda(0),\quad J'_\lambda(u)=0,$$

nghĩa là u chính là một nghiệm yếu không tầm thường của bài toán (1.1). Như vậy, Định lí 3.2 được chứng minh.

Tài liệu tham khảo

Baraket, S., & Bisci, G. M. (2017). Multiplicity results for elliptic Kirchhoff-type problems. *Advances in Nonlinear Analysis, 6*(1), 85–93. https://doi.org/10.1515/anona-2015-0168

Boureanu, M., & Rădulescu, V. D. (2012). Anisotropic Neumann problems in Sobolev spaces with variable exponent. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 75*, 4471–4482. https://doi.org/10.1016/j.na.2011.09.033

Chao, J. (2009). An eigenvalue of an anisotropic quasilinear elliptic equation with variable exponent and Neumann boundary condition. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 71*, 4507–4514. https://doi.org/10.1016/j.na.2009.03.020

Chipot, M., & Lovat, B. (1997). Some remarks on nonlocal elliptic and parabolic problems. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 30*(7), 4619–4627. https://doi.org/10.1016/S0362-546X(97)00169-7

Dai, G., & Hao, R. (2009). Existence of solutions for a p(x)-Kirchhoff-type equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 359*, 275–284. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2013.02.025

Diening, L., Hästö, P., & Růžička, M. (2011). *Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents* (Vol. 2017). Springer.

Ekeland, I. (1974). On the variational principle. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 47*, 324-353. https://doi.org/10.1016/0022-247X(74)90025-0

Fragalà, I., Gazzola, F., & Kawohl, B. (2004). Existence and nonexistence results for anisotropic quasilinear equations. *Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse Non Linéaire, 21*, 715–734. https://doi.org/10.1016/j.anihpc.2003.12.001

Gomes J. M., & Sanchez L. (2005). On a variational approach to some non-local boundary value problems, *Applicable Analysis*, 84(9), 909-925. https://doi.org/10.1080/00036810500048202

Mihăilescu, M., Pucci, P., & Rădulescu, V. D. (2008). Eigenvalue problems for anisotropic quasilinear elliptic equations with variable exponent. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 340*, 687–698. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.09.015

Nguyen, T. C. (2018). Multiple solutions for an anisotropic elliptic equation of Kirchhoff type in bounded domain. *Results in Nonlinear Analysis, 1*(3), 116–127. https://doi.org/10.5269/bspm.45963

Nguyen, T. C., & Ho, N. K. (2022). On a p(·)-biharmonic problem of Kirchhoff type involving critical growth. *Applied Analysis*, *101*(16), 5700–5726. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2024.128765

Struwe, M. (2008). *Variational methods: Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems (4th ed.)*. Springer-Verlag.

Zuo, J., & Massar, M. (2024). On a double phase problem of Kirchhoff-type with variable exponent. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series S, 17*(12), 3368–3383. https://doi.org /10.3934/dcdss.2024039