



DOI: <https://doi.org/10.52714/dthu.14.05S.2025.1639>

PHÁT TRIỂN NĂNG LỰC MÔ HÌNH HÓA TOÁN HỌC CHO HỌC SINH LỚP 12 THÔNG QUA DẠY HỌC CHỦ ĐỀ XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

Võ Xuân Mai¹ và Lê Ngọc Oanh^{2*}

¹Khoa Sư phạm Toán - Tin, Trường Sư phạm, Trường Đại học Đồng Tháp, Việt Nam

²Học viên cao học, Trường Đại học Đồng Tháp, Việt Nam

*Tác giả liên hệ, Email: oanhln95@gmail.com

Lịch sử bài báo

Ngày nhận: 28/8/2025; Ngày nhận chỉnh sửa: 30/9/2025; Ngày duyệt đăng: 01/10/2025

Tóm tắt

Trong bối cảnh đổi mới giáo dục phổ thông theo định hướng phát triển năng lực và chương trình môn Toán năm 2018 với sự thay đổi lớn về mạch kiến thức Thống kê và Xác suất, chủ đề Xác suất có điều kiện ở toán lớp 12 được quy định là một nội dung hoàn toàn mới so với chương trình năm 2006. Bởi vì sự ứng dụng trong đời sống thực tiễn, khoa học và công nghệ, dạy học chủ đề này là một cơ hội tiêu biểu cho việc phát triển năng lực mô hình hóa toán học. Nghiên cứu chỉ ra các biểu hiện của năng lực mô hình hóa toán học của học sinh lớp 12 thông qua dạy học chủ đề Xác suất có điều kiện, từ đó đề xuất các biện pháp sư phạm nhằm phát triển năng lực này trong quá trình học tập môn Toán ở trường phổ thông. Kết quả nghiên cứu cho thấy học sinh được thể hiện cụ thể thông qua biểu hiện thiết lập được mô hình toán học, giải quyết mô hình đó và đưa ra kết quả. Đồng thời cho thấy học sinh có sự hứng thú và phát triển được các kỹ năng cần thiết khi vận dụng kiến thức toán học vào giải quyết vấn đề trong thực tế cuộc sống.

Từ khóa: Biện pháp sư phạm, Năng lực mô hình hóa toán học, Xác suất có điều kiện.

Trích dẫn: Võ, X. M., & Lê, N. O. (2025). Phát triển năng lực mô hình hóa toán học cho học sinh lớp 12 thông qua dạy học chủ đề xác suất có điều kiện. *Tạp chí Khoa học Đại học Đồng Tháp*, 14(05S), 27-38. <https://doi.org/10.52714/dthu.14.05S.2025.1639>

Copyright © 2025 The author(s). This work is licensed under a CC BY-NC 4.0 License.

DEVELOPING MATHEMATICAL MODELING COMPETENCE OF GRADE 12 STUDENTS THROUGH TEACHING THE TOPIC OF CONDITIONAL PROBABILITY

Vo Xuan Mai¹ and Le Ngoc Oanh^{2*}

*¹Faculty of Mathematics - Information Teacher Education,
School of Education, Dong Thap University, Cao Lanh 870000, Vietnam*

²Post – graduate student, Dong Thap University, Cao Lanh 870000, Vietnam

**Corresponding author, Email: oanhln95@gmail.com*

Article history

Received: 28/8/2025; Received in revised form: 30/9/2025; Accepted: 01/10/2025

Abstract

In the context of Vietnam's 2018 Mathematics curriculum reform, Conditional Probability is introduced in Grade 12 as a new topic compared to the 2006 curriculum. Given its wide applications in science, technology, and daily life, this topic provides a valuable context for developing students' mathematical modeling competence. This study explores how grade 12 students demonstrate that competence through learning Conditional Probability and proposes pedagogical measures to foster it. The findings show that students are able to construct mathematical models, solve them, and interpret results, while also developing interest and essential skills to apply mathematics to real-world problems.

Keywords: *Conditional probability, Mathematical modeling competence, Pedagogical interventions.*

1. Đặt vấn đề

Ban Chấp hành Trung ương Đảng Cộng Sản Việt Nam (2013) đã xác định một trong các quan điểm chỉ đạo quan trọng về đổi mới căn bản, toàn diện giáo dục và đào tạo là: “Chuyển mạnh quá trình giáo dục từ chủ yếu trang bị kiến thức sang phát triển toàn diện phẩm chất và năng lực người học. Học đi đôi với hành, lý luận gắn với thực tiễn; giáo dục nhà trường kết hợp với giáo dục gia đình và giáo dục xã hội ...”. Với định hướng này, chương trình giáo dục phổ thông (GDPT) môn Toán (Bộ Giáo dục và Đào tạo [Bộ GD&ĐT], 2018b) đã đặc biệt chú trọng tính ứng dụng của Toán học vào thực tiễn, gắn với xu thế phát triển kinh tế - xã hội. Tất cả các môn học trong nhà trường đều có vai trò nhất định trong việc hình thành và phát triển năng lực đặc thù. Trong đó, năng lực mô hình hóa toán học (MHHTH) có ý nghĩa quan trọng trong dạy học môn Toán ở trường phổ thông. Trước hết, năng lực này giúp học sinh (HS) biết cách chuyển các tình huống thực tiễn thành những mô hình toán học thông qua việc thiết lập công thức, phương trình, biểu đồ hoặc xác suất, từ đó rèn luyện khả năng phân tích, tư duy logic và giải quyết vấn đề. Đồng thời, năng lực MHHTH góp phần làm cho việc học toán trở nên gần gũi và thiết thực hơn, bởi HS có thể thấy rõ giá trị ứng dụng của toán học trong đời sống cũng như trong các lĩnh vực khoa học và kỹ thuật.

Trong bối cảnh đó, Thống kê và Xác suất là một trong ba mạch kiến thức chính được xây dựng trong chương trình GDPT môn Toán, cũng là mạch kiến thức có sự thay đổi lớn nhất so với chương trình trước đó. Vì vậy, thời lượng và nội dung của mạch kiến thức này được chú trọng và quan tâm nhiều hơn chiếm khoảng 14% thời lượng môn Toán. Đặc biệt, chủ đề Xác suất có điều kiện (XSCĐK) ở chương trình toán lớp 12 là một chủ đề mới hoàn toàn và được áp dụng bắt đầu từ năm học 2024 – 2025 này. Chủ đề XSCĐK là cầu nối quan trọng giữa toán học thuần túy với toán học ứng dụng và các lĩnh vực chuyên ngành khác như kinh tế tài chính, sinh học, y học... Các nghiên cứu của Blum & Ferri (2009) và Kaiser (2017) đã chỉ ra việc sử dụng mô hình toán học kết nối các khái niệm xác suất trừu tượng như XSCĐK với bối cảnh thực tế, giúp việc học trở nên ý nghĩa và làm sâu sắc thêm sự hiểu biết về bản chất các khái niệm toán học đối với HS. Bên cạnh đó, nhiều kết quả cho thấy rằng việc tổ chức dạy học theo hướng phát triển năng lực MHHTH góp phần nâng cao năng lực tư duy, kỹ năng giải quyết vấn đề và khả năng kết nối tri thức của HS (Ferri, 2006; Stillman, 2011). Tuy có nhiều kết quả trong nước liên quan phát triển năng lực MHHTH trong các nội dung toán học, cũng như việc vận dụng quy trình MHHTH trong dạy học xác suất của Nguyễn (2023), dạy học tích hợp trong chủ đề xác suất của Nguyễn & Phan (2019), nhưng các nghiên cứu về phát triển năng lực MHHTH trong chủ đề XSCĐK vẫn còn đang là khoảng trống. Vì vậy, bài báo này hướng đến mục tiêu đề xuất một số biện pháp nhằm phát triển năng lực MHHTH cho HS lớp 12 thông qua chủ đề XSCĐK.

2. Kết quả nghiên cứu

2.1. Năng lực mô hình hóa toán học

Theo Chương trình GDPT tổng thể (Bộ GD&ĐT, 2018a), “Năng lực là thuộc tính cá nhân được hình thành, phát triển nhờ tố chất sẵn có và quá trình học tập, rèn luyện, cho phép con người huy động tổng hợp các kiến thức, kỹ năng và các thuộc tính cá nhân như hứng thú, niềm tin, ý chí, ... thực hiện thành công một loại hoạt động nhất định, đạt kết quả mong muốn trong những điều kiện cụ thể”. Chương trình này đã xác định mục tiêu hình thành và phát triển cho HS các năng lực cốt lõi bao gồm các năng lực chung và các năng lực đặc thù:

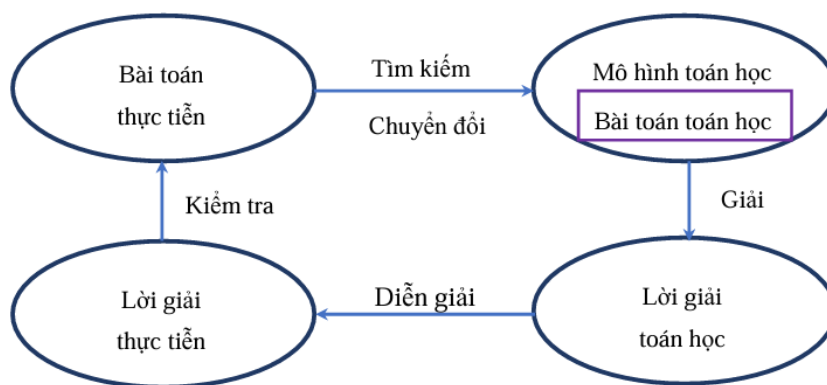
- Những năng lực chung được hình thành, phát triển thông qua tất cả các môn học và hoạt động giáo dục: năng lực tự chủ và tự học, năng lực giao tiếp và hợp tác, năng lực giải quyết vấn đề và sáng tạo;
- Những năng lực đặc thù được hình thành, phát triển chủ yếu thông qua một số môn

học và hoạt động giáo dục nhất định: năng lực ngôn ngữ, năng lực tính toán, năng lực khoa học, năng lực công nghệ, năng lực tin học, năng lực thẩm mỹ, năng lực thể chất.

Trong nghiên cứu này, năng lực toán học được quan niệm theo chương trình GDPT môn Toán (Bộ GD&ĐT, 2018b) gồm các thành tố cốt lõi: “Năng lực tư duy và lập luận toán học; năng lực mô hình hóa toán học; năng lực giải quyết vấn đề toán học; năng lực giao tiếp toán học; năng lực sử dụng phương tiện, công cụ học toán”. Với năm thành tố của năng lực toán học thì các thành tố đều có vai trò vị trí như nhau, mặc dù cách trình bày, thể hiện các biểu hiện của các thành tố là rất khác nhau.

Theo Swetz & Hartzler (1991): “Mô hình toán học là một cấu trúc toán học (đồ thị, bảng biểu, phương trình, hệ phương trình, biểu thức đại số, hàm số, ...) gồm các kí hiệu và các quan hệ toán học biểu diễn, mô tả các đặc điểm của một tình huống, một hiện tượng hay một đối tượng nghiên cứu”. Theo Edwards & Hamson (2001), “MHHTH là quá trình chuyển đổi một vấn đề thực tiễn sang một vấn đề toán học bằng cách thiết lập và giải quyết mô hình toán học, thể hiện và đánh giá lời giải trong ngữ cảnh thực tiễn, cải tiến mô hình nếu cách giải quyết không thể chấp nhận”. Cụ thể hơn, MHHTH là toàn bộ quá trình chuyển đổi vấn đề thực tiễn sang vấn đề toán học và ngược lại. Còn theo Lê (2014), “Quá trình MHHTH là quá trình thiết lập một mô hình toán học cho vấn đề ngoài toán học, giải quyết vấn đề trong mô hình đó, rồi thể hiện và đánh giá lời giải trong ngữ cảnh thực tế, cải tiến mô hình nếu cách giải quyết không thể chấp nhận”.

Quy trình MHHTH của Nguyễn (2016) gồm bốn bước: (1) Chuyển bài toán thực tiễn sang bài toán toán học. (2) Sử dụng công cụ toán học để tìm lời giải bài toán. (3) Sử dụng kết quả thu được ở bước 2 để diễn giải thành lời giải thực tiễn. (4) So sánh, đối chiếu lời giải với bài toán thực tiễn ban đầu xem có hợp lý hay không. Quy trình MHHTH thể hiện qua sơ đồ 1.



Sơ đồ 1. Quy trình MHHTH của Nguyễn (2016)

Theo Blum & Niss (2007) định nghĩa: “Năng lực MHHTH là khả năng thực hiện đầy đủ các giai đoạn của quá trình mô hình hóa trong một tình huống cho trước”. Theo Nguyễn (2013), “Năng lực MHHTH được cho là sự sẵn sàng của một ai đó để thực hiện tất cả các phần của quy trình MHHTH trong một tình huống nhất định”.

Trong nghiên cứu này, năng lực MHHTH được thống nhất theo chương trình GDPT môn Toán (Bộ GD&ĐT, 2018b), năng lực MHHTH được thể hiện qua việc các giai đoạn của một quy trình MHHTH để giải quyết một vấn đề, tình huống thực tiễn, gồm:

- Xác định được mô hình toán học (gồm công thức, phương trình, bảng biểu, đồ thị, ...) cho tình huống xuất hiện trong bài toán thực tiễn.
- Giải quyết được những vấn đề toán học trong mô hình được thiết lập.

- Thể hiện và đánh giá được lời giải trong ngữ cảnh thực tế và cải tiến được mô hình nếu cách giải quyết không phù hợp.

Đối với HS trung học phổ thông cần giải thích được tính đúng đắn của lời giải (những kết luận thu được từ các tính toán là có ý nghĩa, phù hợp với thực tiễn hay không). Đặc biệt, nhận biết được cách đơn giản hóa, cách điều chỉnh những yêu cầu thực tiễn (xấp xỉ, bổ sung thêm giả thiết, tổng quát hóa, ...) để đưa đến những bài toán giải được.

Theo quan điểm của Nguyễn (2011) cho rằng: “Phát triển năng lực cũng cần thực hiện dạy học trong hoạt động và bằng hoạt động. Dạy học phát triển năng lực MHHTH phải thực hiện dạy HS các hoạt động MHHTH theo nghĩa các hoạt động trong quá trình MHHTH”. Vì vậy, trên cơ sở phân tích các biểu hiện năng lực MHHTH của HS và quy trình MHHTH, chúng tôi cho rằng năng lực MHHTH được hình thành, phát triển và thể hiện thông qua việc HS thực hiện thành thạo các bước trong quy trình mô hình hóa.

2.2. Biểu hiện năng lực mô hình hóa toán học của học sinh thông qua dạy học chủ đề Xác suất có điều kiện

Theo Bộ GD&ĐT (2018b), nội dung và yêu cầu cần đạt của chủ đề Xác suất có điều kiện được thể hiện qua bảng 1.

Bảng 1. Nội dung và yêu cầu cần đạt của chủ đề Xác suất có điều kiện

Nội dung	Yêu cầu cần đạt
Xác suất có điều kiện	Nhận biết được khái niệm về xác suất có điều kiện. Giải thích được ý nghĩa của xác suất có điều kiện trong những tình huống quen thuộc.
Các quy tắc tính xác suất	Mô tả được công thức xác suất toàn phần, công thức Bayes thông qua bảng dữ liệu thống kê 2×2 và sơ đồ hình cây. Sử dụng được công thức Bayes để tính xác suất có điều kiện và vận dụng vào một số bài toán thực tiễn.

Trên cơ sở nghiên cứu lý luận, các biểu hiện của năng lực MHHTH của HS cấp trung học phổ thông và nội dung, yêu cầu cần đạt chủ đề Xác suất có điều kiện, chúng tôi đề xuất một số biểu hiện năng lực MHHTH của HS trong chủ đề này như sau:

- Biểu hiện 1: Thiết lập được mô hình toán học liên quan xác suất có điều kiện gồm các công thức và quy tắc tính xác suất, sơ đồ hình cây, sơ đồ Ven, bảng thống kê... để mô tả tình huống đặt ra trong một số bài toán thực tiễn.

- Biểu hiện 2: HS giải quyết được các vấn đề toán học trong mô hình toán học được thiết lập.

- Biểu hiện 3: HS lý giải được tính đúng đắn của lời giải bài toán liên quan đến XSCĐK, đánh giá được lời giải trong thực tế và cải tiến mô hình nếu cách giải quyết không phù hợp.

2.3. Một số biện pháp phát triển năng lực mô hình hóa toán học cho học sinh lớp 12 thông qua dạy học chủ đề Xác suất có điều kiện

2.3.1. Biện pháp 1: Rèn luyện cho học sinh biểu diễn, thiết lập mô hình toán học dưới dạng sơ đồ hình cây, bảng dữ liệu thống kê 2×2 và sơ đồ Venn để diễn đạt tình huống thực tiễn trong chủ đề Xác suất có điều kiện

a. Mục đích của biện pháp

Mục đích của biện pháp nhằm tạo cơ hội để HS thường xuyên tiếp xúc với các mô hình toán học đặc trưng trong chủ đề XSCĐK. Sơ đồ hình cây, bảng dữ liệu thống kê 2x2 và sơ đồ Ven là một công cụ khá hữu ích để giúp HS giải toán xác suất và thống kê do các dữ kiện bài toán được trực quan hóa. Điểm cơ bản trong việc sử dụng sơ đồ hình cây, bảng dữ liệu 2x2 và sơ đồ Venn để giải toán là HS phải hiểu rõ nội dung bài toán, biết phân tích để lập được bảng dữ liệu hoặc sơ đồ hình cây, đồng thời biểu diễn chính xác số liệu đã cho, từ đó suy luận và tìm ra câu trả lời cho tình huống thực tiễn. Do vậy, sử dụng sơ đồ hình cây, bảng dữ liệu 2x2 và biểu đồ Ven trong dạy học chủ đề XSCĐK có nhiều cơ hội để phát triển cho HS lớp 12 năng lực MHHTH.

b. Cách thức thực hiện biện pháp

- GV tìm những tình huống trong thực tiễn gắn với kiến thức toán học cần hoạt động trong quá trình dạy học.

- Định hướng cho HS sử dụng ngôn ngữ toán học viết lại các giả thiết, kết luận của bài toán từ tình huống thực tế đó. Từ đó GV hướng dẫn HS phân tích giả thiết và lựa chọn sử dụng sơ đồ hình cây hoặc bảng số liệu thống kê 2x2 hoặc sơ đồ Ven phù hợp để mô hình toán học tình huống đó. GV cho HS quan sát rồi rút ra nhận định chung của các vấn đề được nêu ra. Từ đó hình thành dấu hiệu bản chất của khái niệm, công thức,...

- GV cần chú ý sử dụng đa dạng các tình huống thực tiễn hằng ngày, trong các hoạt động xã hội hoặc liên môn các ngành khoa học khác.

c. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Bảng 2 thống kê tình trạng nhiễm Covid-19 chủng mới được nhập viện tại một trong 21 bệnh viện ở 18 tiểu bang của Mỹ từ ngày 26 tháng 12 năm 2021 đến ngày 30 tháng 6 năm 2022. Chọn ngẫu nhiên một bệnh nhân nhiễm Covid-19 được nhập viện. Kí hiệu các biến cố như sau:

A₁: “Bệnh nhân được tiêm vắc xin Pfizer”;

A₂: “Bệnh nhân được tiêm vắc xin Moderna”;

A₃: “Bệnh nhân được tiêm vắc xin Janssen”;

B: “Bệnh nhân có tình trạng sức khỏe đã được kiểm soát”.

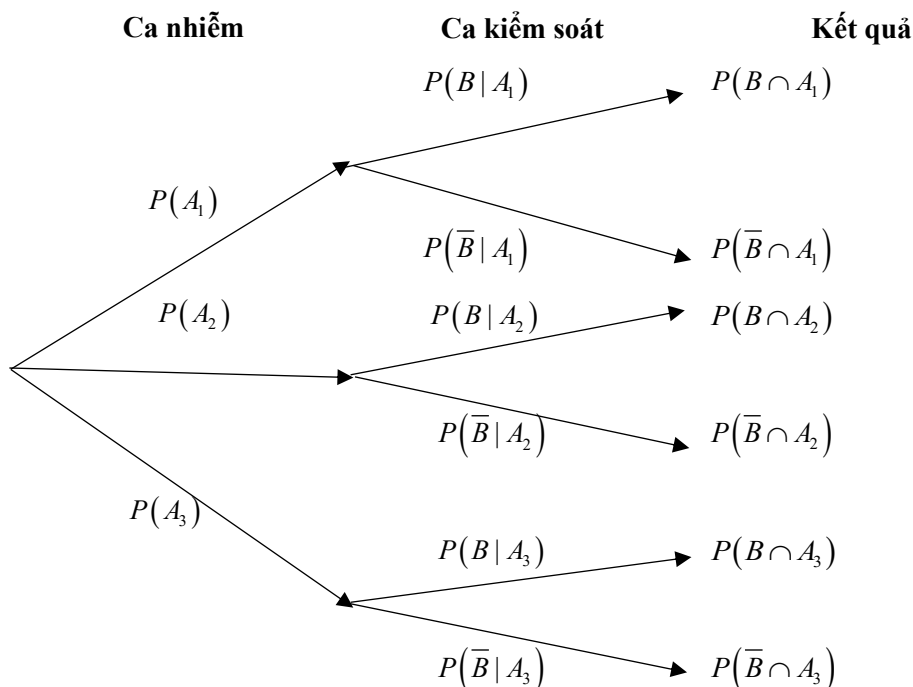
Bảng 2. Bảng thống kê tình trạng nhiễm Covid – 19

	Số ca nhiễm	Số ca đã được kiểm soát
<i>Pfizer</i>	867	468
<i>Moderna</i>	503	201
<i>Janssen</i>	134	61
Tổng	1504	703

GV định hướng cho HS sử dụng ngôn ngữ toán học: Từ các dữ kiện của bài toán, HS cần diễn đạt tình huống thực tiễn sang ngôn ngữ toán học qua các kí hiệu toán học, đặc biệt sơ đồ hình cây. GV chia nhóm và yêu cầu HS thảo luận và sử dụng kí hiệu để mô tả đúng các xác suất xảy ra, đồng thời điền các giá trị xác suất thích hợp vào sơ đồ hình cây. Chẳng hạn, xác suất bệnh nhân có tình trạng sức khỏe đã được kiểm soát với điều kiện được tiêm vắc xin

Pfizer được kí hiệu là gì? Xác suất được đặt vào vị trí thích hợp nào trong sơ đồ hình cây? Tương tự cho các xác suất có điều kiện còn lại.

Kết quả quá trình HS thảo luận nhóm và sử dụng kí hiệu mô tả đúng xác suất hoàn thành sơ đồ hình cây.



Sơ đồ 2. Sơ đồ hình cây HS trình bày trong ví dụ 1

Phân tích cơ hội phát triển năng lực MHHTH: Qua ví dụ trên, HS được luyện tập thành thạo hơn việc xác định và phân biệt xác suất của các biến cố, sử dụng kí hiệu chính xác để mô tả đúng xác suất của biến cố. Việc chuyển đổi từ ngôn ngữ tự nhiên trong tình huống thực tiễn thành ngôn ngữ toán học (kí hiệu, công thức, sơ đồ, ...) là một bước quan trọng để xây dựng mô hình toán học chính xác, đây là một biểu hiện của năng lực MHHTH của HS (biểu hiện 1).

2.3.2. Biện pháp 2: Rèn luyện cho học sinh lựa chọn và đánh giá mô hình toán học phù hợp để giải quyết các bài toán tính xác suất

a. Mục đích của biện pháp

Biện pháp giúp HS thiết lập nhiều mô hình toán học khác nhau, lựa chọn được mô hình toán học tối ưu trong các mô hình toán học được thiết lập từ những tình huống thực tiễn có liên quan đến chủ đề XSCĐK. Việc lựa chọn đúng mô hình toán học ngay từ đầu sẽ giúp HS tìm ra lời giải dễ dàng và nhanh chóng. Hơn nữa, biện pháp giúp HS xem lại kết quả của việc giải quyết mô hình toán học, từ đó điều chỉnh mô hình toán học phù hợp hơn.

b. Cách thức thực hiện biện pháp

GV tổ chức cho HS đánh giá lời giải bài toán trong mô hình toán học được thiết lập, điều chỉnh mô hình toán học với thực tiễn qua việc thực hiện các hoạt động:

- GV lựa chọn tình huống thực tiễn có liên quan đến chủ đề XSCĐK, GV rèn luyện cho HS thiết lập được các mô hình toán học khác nhau cho cùng một tình huống thực tiễn.

- HS phân tích lựa chọn mô hình phù hợp với năng lực trình độ của HS để giải quyết vấn đề toán học trong mô hình toán học.

- GV lựa chọn một số tình huống thực tế khi học sinh giải quyết gặp khó khăn, tổ chức cho HS đánh giá, điều chỉnh và cải tiến mô hình.

c. Ví dụ minh họa

Ví dụ 2. Trong Đề thi thử tốt nghiệp THPT năm 2025 môn Toán – Lần 2, Sở Giáo dục và Đào tạo Bình Phước có bài toán sau: Khảo sát 200 người xem bộ phim hoạt hình về thể loại trinh thám vừa được phát hành cho thấy 140 người xem là trẻ em và 60 người xem là người lớn. Trong số các trẻ em đến xem phim có 50% yêu thích bộ phim và khẳng định sẽ đi xem tiếp phần 2; 30% yêu thích bộ phim nhưng sẽ không xem tiếp phần 2; 20% còn lại không thích bộ phim và không xem tiếp phần 2. Trong số những người lớn đi xem phim có 20% yêu thích bộ phim và khẳng định sẽ đi xem tiếp phần 2; 10% yêu thích bộ phim nhưng sẽ không đi xem tiếp phần 2; 70% còn lại không thích bộ phim và không xem tiếp phần 2. Gọi

A là biến cố “Người được chọn là trẻ em”;

B là biến cố “Người được chọn yêu thích bộ phim”;

C là biến cố “Người được chọn sẽ đi xem tiếp phần 2”.

Chọn ngẫu nhiên 1 người đã xem phim. Biết rằng người đó sẽ xem tiếp phần 2 của bộ phim, tính xác suất để người đó là trẻ em?

GV tổ chức cho HS thiết lập được các mô hình toán học khác nhau cho cùng một tình huống thực tiễn: GV tổ chức lớp học thành các nhóm để lựa chọn mô hình toán học phù hợp để giải quyết bài toán trên.

GV phân công nhóm HS phân tích lựa chọn mô hình phù hợp: GV chia thành hai nhiệm vụ học tập được phân công phù hợp cho các nhóm. Nhiệm vụ thứ nhất giải quyết bài toán bằng công thức Bayes (Mô hình 1), nhiệm vụ thứ hai giải quyết bài toán bằng lập bảng thống kê (Mô hình 2). Các nhóm trình bày, so sánh kết quả và đánh giá mô hình toán học đã sử dụng.

Kết quả mong đợi của HS cần đưa ra 2 lời giải như sau:

• *Lời giải cho mô hình 1 :*

Ta có $P(A) = 0,7; P(\bar{A}) = 0,3$.

$$P((B \cap C) | A) = 0,5; P((B \cap \bar{C}) | A) = 0,3; P((\bar{B} \cap \bar{C}) | A) = 0,2.$$

$$P((B \cap C) | \bar{A}) = 0,2; P((B \cap \bar{C}) | \bar{A}) = 0,1; P((\bar{B} \cap \bar{C}) | \bar{A}) = 0,7.$$

$$\text{Áp dụng công thức Bayes ta có: } P(A|C) = \frac{P(A).P(C|A)}{P(C)}.$$

$$\text{Mà } P(C|A) = 1 - P(\bar{C}|A) = 1 - 0,5 = 0,5, \quad P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - 0,59 = 0,41.$$

$$\text{Vậy xác suất để người đó là trẻ em là } P(A|C) = \frac{0,7 \cdot 0,5}{0,41} = \frac{35}{41}.$$

• *Lời giải cho mô hình 2 :*

Biết người đó sẽ xem tiếp phần 2 của bộ phim, do đó xác suất để người đó là trẻ em là

$P(A|C)$. Xác định các dữ liệu từ bài toán, HS thiết lập được bảng dữ liệu thống kê ở bảng 3.

Từ bảng 3, ta có kết quả: Số người lớn và trẻ em xem tiếp phần 2 là: $70 + 12 = 82$ (người). Số trẻ em xem tiếp phần 2 là 70 (người). Do đó $P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{70}{82} = \frac{35}{41}$.

Bảng 3. Bảng thống kê người xem yêu thích bộ phim

	Yêu thích bộ phim và xem tiếp $(B \cap C)$	Yêu thích và không xem tiếp $(B \cap \bar{C})$	Không yêu thích và không xem tiếp $(\bar{B} \cap \bar{C})$	Tổng số
Trẻ em (A)	70	42	28	140
Người lớn ($\bar{A}$)	12	6	42	60
Tổng số	82	48	70	200

GV tổ chức cho các nhóm tranh luận nhận xét lời giải của nhóm, lời giải đó đúng hay sai? Lời giải nào tối ưu nhất? Từ đó rút ra kinh nghiệm cho mô hình của mình.

Đối với lời giải 1, HS thiết lập ra mô hình 1 bằng cách sử dụng các kí hiệu để biểu diễn các xác suất đề cho và sau đó sử dụng công thức Bayes để tính xác suất cần tìm. Điều này yêu cầu các em linh hoạt chuyển đổi từ tình huống thực tế sang một mô hình toán học và thành thạo sử dụng các công thức xác suất để giải quyết mô hình toán học đã lập.

Nhận xét về lời giải 2, HS thiết lập mô hình toán học bằng cách biểu diễn dưới dạng bảng dữ liệu thống kê. Khi đó, việc tính xác suất người được chọn là trẻ em (biết rằng người đó xem tiếp phần 2) trở nên đơn giản hơn: đó chính là tỉ số giữa số trẻ em xem tiếp phần 2 và tổng số người xem tiếp phần 2.

Phân tích cơ hội phát triển năng lực MHHTH: Qua ví dụ trên, HS thiết lập được 2 mô hình toán học khác nhau từ một tình huống thực tiễn, từ đó lựa chọn mô hình phù hợp, tối ưu, HS lý giải tốt tính đúng đắn của lời giải và có sự đánh giá cũng như lựa chọn mô hình thích hợp và điều chỉnh mô hình khi cần thiết. Đây là các biểu hiện của năng lực MHHTH của HS (biểu hiện số 2 và 3).

2.3.3. Biện pháp 3: Rèn luyện cho học sinh tự sáng tạo bài toán thực tế và giải bài toán mô hình hóa tương tự trong chủ đề Xác suất có điều kiện

a. Mục đích của biện pháp

Biện pháp này giúp HS thấy được mối liên hệ giữa toán học và thực tiễn. Từ đó các em có thể tự đặt ra các bài toán chứa tình huống thực tiễn tương tự. Hơn nữa, các bài toán chứa đựng yếu tố thực tiễn được sáng tạo từ mô hình toán học sẽ giúp HS giải quyết dễ dàng hơn. Năng lực MHHTH, nói một cách đơn giản, được hình thành và phát triển thông qua việc giải quyết các bài toán thực tiễn. Do đó, việc cho HS tự tạo ra các bài toán chứa yếu tố thực tiễn là một trong những biện pháp để phát triển năng lực MHHTH cho HS.

b. Cách thức thực hiện biện pháp

- GV hướng dẫn HS các cấu trúc câu để mô tả các xác suất của biến cố (Xem bảng 4).

- GV lựa chọn và đưa ra các mô hình toán học đã có liên quan đến chủ đề XSCĐK.
- GV hướng dẫn HS tự đặt ra các tình huống thực tiễn tương ứng với mô hình toán học đã xác định và giải quyết mô hình toán học đó.

Bảng 4. Bảng cấu trúc gọi tên biến cố

Kí hiệu toán học	Phát biểu bằng lời	Bài toán thực tiễn
$P(A B)$	Xác suất để A biết rằng (khi) B xảy ra Trong B, xác suất để A xảy ra	Xác suất để HS được chọn giỏi môn Toán biết rằng HS đó giỏi môn Lý
$P(A \cap B)$	Xác suất để A và B cùng xảy ra	Xác suất để HS được chọn giỏi môn Toán và giỏi môn Lý
$P(A \cup B)$	Xác suất để ít nhất A hoặc B xảy ra Xác suất để A hoặc B xảy ra	Xác suất để HS được chọn ít nhất giỏi một trong hai môn Toán và Lý.

c. Ví dụ minh họa

Ví dụ 3. Cho bảng số liệu thống kê sau:

Bảng 5. Bảng số liệu thống kê trong ví dụ 3

	A	$\bar{A}$
B	460	40
$\bar{B}$	140	260

Tính $P(B|\bar{A})$. Dựa vào bảng dữ liệu trên, các em hãy:

- Tự tạo ra một bài toán có tình huống thực tế tương ứng với bảng trên.
- Giải quyết bài toán thực tế đặt ra.

GV lựa chọn và đưa ra mô hình toán học: GV gợi ý HS liên hệ đến những tình huống thực tế quen thuộc (như chọn nam/nữ, chọn màu sắc, ...) và từ đó phát triển thành các tình huống mới.

GV hướng dẫn HS tự đặt ra các tình huống thực tiễn: GV chia lớp thành 3 nhóm thảo luận tạo ra bài toán thực tế tương ứng. HS tạo ra các bài toán từ mô hình toán trên:

Bài toán 1. Nhiều học sinh tin rằng việc duy trì thói quen dậy sớm học bài giúp tinh thần tỉnh táo, tiếp thu kiến thức tốt hơn và dễ đạt kết quả cao trong học tập. Để kiểm chứng điều này, một cuộc khảo sát được thực hiện trên 900 học sinh. Kết quả cho thấy trong số 600 em thường xuyên dậy sớm có 460 em đạt điểm cao; trong số 300 em còn lại chỉ có 40 em đạt điểm cao. Tính xác suất để một học sinh được chọn ngẫu nhiên đạt điểm cao, biết rằng học sinh đó không dậy sớm.

Bài toán 2. Theo chương trình giáo dục phổ thông 2018, thí sinh thi tốt nghiệp THPT phải thi 4 môn trong đó 2 môn bắt buộc là toán và văn; 2 môn tự chọn (2 môn trong số các

môn còn lại được học ở lớp 12). Để có thể chuẩn bị cho kì thi tốt nghiệp THPT nhà trường đã khảo sát để xếp phòng cho học sinh ôn thi đạt hiệu quả nhất. Theo khảo sát của toàn bộ học sinh khối 12, 2 môn tự chọn được chọn nhiều nhất là anh với 600 nguyện vọng và hoá với 300 nguyện vọng, biết rằng trong đó không học sinh nào chọn hai môn tự chọn gồm cả hóa và anh. Trong số các nguyện vọng chọn anh có 460 nguyện vọng của học sinh nữ và 260 học sinh nam chọn hoá. Chọn 1 học sinh trong các học sinh được lấy khảo sát chọn hoá hoặc anh, tính xác suất học sinh được chọn là nữ, biết rằng học sinh đó chọn môn hóa.

Bài toán 3. Năm 2024 vừa rồi, Trường Đại học Bà Rịa – Vũng Tàu tuyển sinh với chỉ tiêu 600 HS, biết rằng có tổng cộng 900 em HS đặt nguyện vọng vào trường. Trong số tất cả những em đậu vào trường thì có 460 em xét tuyển bằng hình thức thi THPT quốc gia, còn lại xét vào trường bằng phương pháp xét học bạ. Bên cạnh đó, trong số những em không đậu thì có 260 em xét bằng phương thức xét học bạ, còn lại bằng kết quả thi THPT quốc gia. Chọn ngẫu nhiên 1 em đặt nguyện vọng vào trường. Tính xác suất để em được chọn xét tuyển bằng hình thức thi THPT quốc gia biết rằng em đó không thi đậu vào trường.

Phân tích cơ hội phát triển năng lực MHHTH: Qua ví dụ trên, HS đã biết vận dụng các yếu tố thực tiễn quen thuộc kết hợp với số liệu trong bảng thống kê và sơ đồ hình cây để xây dựng nên một bài toán xác suất có nội dung gắn với thực tiễn từ mô hình toán học cho trước. Quá trình này không chỉ giúp HS giảm bớt khó khăn khi đối diện với các tình huống thực tế liên quan đến xác suất, mà còn thể hiện khả năng chuyển đổi linh hoạt giữa ngôn ngữ toán học và ngôn ngữ đời sống. Vận dụng mô hình toán học để lý giải, dự đoán và giải quyết vấn đề thực tiễn là một trong những biểu hiện quan trọng của năng lực MHHTH.

3. Thảo luận

Nghiên cứu đã chỉ ra một số biện pháp sư phạm khi dạy học chủ đề Xác suất có điều kiện theo hướng phát triển năng lực MHHTH cho học sinh. Các biểu hiện của năng lực này được chú trọng không chỉ thể hiện thiết lập mô hình hóa toán học, giải quyết vấn đề, mà còn bộc lộ khả năng áp dụng kiến thức toán học và sáng tạo trong việc tìm kiếm lời giải cho các vấn đề trong thực tiễn tương tự như các nghiên cứu của Blum & Ferri (2009) và Kaiser (2017). Việc dạy học chủ đề XSCĐK còn giúp HS phát huy các kỹ năng cần thiết trong học tập như giao tiếp, hợp tác, tư duy phân biện, kết quả này tương đồng với các nghiên cứu của Ferri (2006); Stillman (2011).

Các biện pháp đề xuất cho thấy một số thuận lợi khi áp dụng vào thực tế dạy học ở Việt Nam như nhiều tình huống gắn với đời sống với chủ đề XSCĐK, dễ tạo cơ hội cho HS liên hệ thực tiễn và rèn luyện các bước trong quy trình mô hình hóa. Bên cạnh đó, sự hỗ trợ của giáo viên trong việc định hướng và khuyến khích trao đổi nhóm cũng góp phần tạo ra môi trường học tập tích cực. Tuy nhiên, khó khăn nảy sinh ở chỗ một số HS còn lúng túng trong việc chuyển đổi từ ngôn ngữ thực tiễn sang ngôn ngữ toán học, hoặc gặp trở ngại khi đánh giá và điều chỉnh mô hình.

4. Kết luận

Trên cơ sở lý luận và thực tiễn khảo sát trong dạy học toán, nghiên cứu đã xác định ba biểu hiện của NL MHHTH và đề xuất ba biện pháp sư phạm nhằm phát triển NL MHHTH thông qua dạy học chủ đề XSCĐK cho HS lớp 12. Mỗi biện pháp chỉ ra các cách thức thực hiện và ví dụ minh họa, từ đó đưa ra những chỉ dẫn cụ thể cho GV trong việc tổ chức dạy học các vấn đề thực tiễn ở các chủ đề khác nhau. Kết quả nghiên cứu cung cấp các hướng dẫn cụ thể để giáo viên toán ở trường phổ thông trong thiết kế các hoạt động dạy học tích cực chủ đề này, góp phần phát triển NL MHHTH, đồng thời trang bị cho học sinh những kỹ năng cần thiết để giải quyết các thách thức trong cuộc sống.

Tài liệu tham khảo

- Ban Chấp hành Trung ương Đảng Cộng sản Việt Nam. (2013). *Nghị quyết số 29-NQ/TW về đổi mới căn bản, toàn diện giáo dục và đào tạo, đáp ứng yêu cầu công nghiệp hóa, hiện đại hóa trong điều kiện kinh tế thị trường định hướng xã hội chủ nghĩa và hội nhập quốc tế*. Hà Nội.
- Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H. W., & Niss, M. (Eds.). (2007). *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study*. Boston, MA: Springer US.
- Blum, W., & Ferri, R. B. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(1), 45–58.
- Bộ Giáo dục và Đào tạo. (2018a). *Chương trình giáo dục phổ thông - Chương trình tổng thể* (Ban hành kèm theo Thông tư số 32/2018/TT-Bộ GD&ĐT ngày 26/12/2018 của Bộ trưởng Bộ GD&ĐT). NXB Giáo dục Việt Nam.
- Bộ Giáo dục và Đào tạo. (2018b). *Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán* (Ban hành kèm theo Thông tư số 32/2018/TT-Bộ GD&ĐT ngày 26/12/2018 của Bộ trưởng Bộ GD&ĐT). NXB Giáo dục Việt Nam.
- Edwards, D., & Hamson, M. J. (2001). *Guide to Mathematical Modelling* (2nd ed.). Palgrave.
- Kaiser, G. (2017). The teaching and learning of mathematical modeling. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 267–291). National Council of Teachers of Mathematics.
- Lê, T. H. C. (2014). *Mô hình hóa trong dạy học toán*. Báo cáo tổng kết đề tài nghiên cứu cấp cơ sở, Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh.
- Nguyễn, B. K. (2011). *Phương pháp dạy học môn Toán*. NXB Đại học Sư phạm.
- Nguyễn, D. N. (2013). Phương pháp mô hình hóa trong dạy học toán ở trường phổ thông. *Kỷ yếu Hội thảo khoa học Cán bộ trẻ các trường sư phạm toàn quốc*. NXB Đà Nẵng.
- Nguyễn, P. L. (2016). *Tích cực hóa hoạt động học tập của học sinh trong dạy học môn Toán*. NXB Đại học Cần Thơ.
- Nguyễn, T. H. N. (2023). Vận dụng quy trình mô hình hóa toán học trong dạy học học phần “Xác suất-thống kê Y học” cho sinh viên ngành Kỹ thuật xét nghiệm y học Trường Đại học Y-Dược, Đại học Huế. *Tạp chí Giáo dục*, 12-17.
- Nguyễn, N. T., & Phan, N. N. H. (2019). Tích hợp toán–sinh học ở trường phổ thông: trường hợp khái niệm xác suất. *Tạp chí Khoa học Trường Đại học Sư phạm TP Hồ Chí Minh*, 16(12), 907-907.
- Sở Giáo dục và Đào tạo Bình Phước. (2025). *Đề thi thử tốt nghiệp THPT năm 2025 môn Toán – Lần 2*.
- Stillman, G. (2011). Applying mathematics in a high-stakes senior secondary examination: Student perceptions and performance. *Educational Studies in Mathematics*, 76(1), 45–63.
- Swetz, F., & Hartzler, J. S. (Eds.). (1991). *Mathematical modelling in the secondary school curriculum*. National Council of Teachers of Mathematics.