ĐIỀU KIỆN CẦN HỮU HIỆU CHO NGHIỆM SIÊU HỮU HIỆU ĐỊA PHƯƠNG CỦA BÀI TOÁN CÂN BẰNG VECTƠ CÓ RÀNG BUỘC BẤT ĐẲNG THỨC TỔNG QUÁT VÀ ÁP DỤNG

• Trần Văn Sự(*), Nguyễn Thanh Phong(*), Trần Ngọc Quốc(*), Nguyễn Thị Bích Lài(*)

Tóm tắt

Trong bài báo này chúng tôi sử dụng khái niệm đạo hàm Studniarski trong không gian Banach với lớp hàm không trơn để thiết lập điều kiện cần hữu hiệu cho nghiệm siêu hữu hiệu địa phương của bài toán cân bằng vectơ có ràng buộc tập và bất đẳng thức tổng quát. Kết quả thu được sẽ áp dụng trực tiếp vào bài toán bất đẳng thức biến phân vectơ và tối ưu vectơ có chung ràng buộc tập và bất đẳng thức tổng quát.

Từ khóa: Điều kiện cần hữu hiệu; Bài toán cân bằng vectơ; Bài toán bất đẳng thức biến phân vectơ; Bài toán tối ưu vectơ; Nghiệm siêu hữu hiệu địa phương; Đạo hàm Studniarski.

1. Mở đầu

Năm 1994, Blum và Oettli [2] đã xây dựng lớp các bài toán cân bằng vô hướng trên cơ sở tổng quát hóa các bài toán lý thuyết trò chơi không hợp tác kiểu Nash và bài toán bất đẳng thức biến phân kiểu vô hướng. Năm 1997, Bianchi-Hadjisavvas- Schaible [5] đề xuất xây dựng lớp các bài toán cân bằng vectơ tổng quát trên cơ sở mở rộng bài toán cân bằng vô hướng và sau đó các tác giả thu được các kết quả về điều kiện tồn tại nghiệm cho lớp bài toán cân bằng này. Năm 2000, Ansari [1] nghiên cứu tính ổn định nghiệm và điều kiện hữu hiệu cho bài toán cân bằng vectơ và sau đó áp dụng trực tiếp các kết quả cho bài toán bất đẳng thức biến phân vectơ. Năm 2010, Gong [5] đã sử dụng công cụ của giải tích không trơn và giải tích lồi để thiết lập các điều kiện cần và đủ tối ưu cho nghiệm hữu hiệu yếu, hữu hiệu Henig, hữu hiệu toàn cục và siêu hữu hiệu cho bài toán cân bằng vectơ dựa trên tính lồi tổng quát của các hàm mục tiêu và hàm ràng buộc cùng với một số áp dụng kết quả thu được cho bài toán bất đẳng thức biến phân vectơ và bài toán tối ưu vectơ. Năm 2011, Long-Huang-Peng [8] mở rộng kết quả của Gong 2010 từ giả thiết tính lồi tổng quát sang tính lồi suy rộng tổng quát và nhận được các điều kiện cần và đủ hữu hiệu cho nghiệm hữu hiệu Henig và siêu hữu hiệu của bài toán cân bằng vectơ cùng với áp dụng cho bài toán bất đẳng thức biến phân vectơ và bài toán tối ưu vectơ. Năm 2015, Khanh-Tung [7] nghiên cứu điều kiện tối ưu và tính đối ngẫu cho bài toán cân bằng vectơ có ràng buộc. Về điều kiện tối ưu cho bài toán cân bằng vectơ với một ràng buộc tập và một ràng buộc bất đẳng thức tổng quát theo ngôn ngữ đạo hàm theo hướng (cụ thể đạo hàm Studniarski) là chưa được xem xét tới [6].

Năm 1986, Studniarski [8] đề xuất khái niệm đạo hàm Studniarski cấp cao và áp dụng công cụ này để thiết lập các điều kiện cần và đủ hữu hiệu cho cực tiểu chặt địa phương với lớp các hàm không trơn trong các bài toán tối ưu hóa vectơ và bất đẳng thức biến phân vectơ. Kết hợp nhận định này với nhận định bên trên chúng tôi nhận thấy điều kiện cần hữu hiệu cho các loại nghiệm hữu hiệu địa phương của bài toán cân bằng vectơ tổng quát với ràng buộc tập và bất đẳng thức tổng quát theo ngôn ngữ đạo hàm Studniarski với lớp hàm không trơn là chưa được nghiên cứu trong không gian vô hạn chiều cũng như một số áp dụng của chúng.

Mục đích của bài báo này là sử dụng công cụ của đạo hàm Studniarski để xây dựng điều kiện cần hữu hiệu cho nghiệm siêu hữu hiệu địa phương của bài toán cân bằng vectơ có ràng buộc tập và bất đẳng thức tổng quát cùng với một số áp dụng của chúng. Kết quả nhận được của chúng tôi trong bài báo này là mới và chưa từng được nghiên cứu trước đây. Trong tương lai kết quả đạt được này có thể áp dụng để nghiên cứu tính ổn định nghiệm của bài toán cân bằng tham số và xây dựng các thuật toán số tìm nghiệm tối ưu cho lớp bài toán cân bằng vectơ nói chung và lớp bài toán tối ưu hóa vectơ nói riêng.

(*) Trường Đại học Quảng Bình.

2. Kiến thức chuẩn bị

Cho *X*, *Y* và *Z* là các không gian Banach thực và *C* là một tập khác rỗng của *X*, trong đó *Y* và *Z* được sắp thứ tự bởi các nón lồi, đóng và có phần trong khác rỗng *Q* và *S* tương ứng. Phần trong, bao đóng và bao nón của một tập con *A* trong *X* được ký hiệu tương ứng bởi int*A*, cl*A* *và cone(A)*, ở đây $cone(A)=\{ta:\ a\in A,\ t\geq 0\}$. Ký hiệu $\|\,.\,\|$ thay cho một "chuẩn" trong mọi không gian Banach thực và ký hiệu $x_n \to \bar{x}$ nghĩa là $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=\bar{x}$ hay $\lim\limits_{n\to+\infty}\|x_n-\bar{x}\|=0$. Tập hợp các số tự nhiên, số nguyên và số thực được ký hiệu lần lượt bởi $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ và $\mathbb{R}$. Ký hiệu $n\sim\infty$ thay cho *n* là số tự nhiên đủ lớn, và ký hiệu $t_n\to 0^+$ thay cho một dãy số thực dương $(t_n)_{n\geq 1}$ với giới hạn bằng 0. Với mỗi $x_0\in X$ và $\delta>0$, hình cầu mở tâm x_0 bán kính δ được ký hiệu bởi $B(x_0,\delta)=\{x\in X:\ \|x-x_0\|<\delta\}$, và chúng là một tập mở trong *X*. Không gian đối ngẫu tôpô của *X*, *Y* và *Z* theo thứ tự được ký hiệu bởi X^*, Y^* và Z^* tương ứng; các nón đối ngẫu của *Q* và *S* được xác định lần lượt bởi

$$Q^+=\{\xi\in Y^*: <\xi, q>\geq 0\ \ \forall q\in Q\}$$

và $S^+=\{\eta\in Z^*: <\eta, s>\geq 0\ \ \forall s\in S\}$.

Chú ý rằng các nón Q^+ *và* S^+ là lồi và đóng yếu*. Tựa phần trong của nón đối ngẫu Q^+ ký hiệu $Q^{\neq}$ và được xác định bởi $Q^{\neq}=\{\xi\in Q^+: <\xi, q>>0\ \ \forall q\in Q\backslash\{0\}\}$. Theo Gong [5] và Long et al. [8], một tập con lồi *B* khác rỗng của một nón lồi *Q* được gọi là một cơ sở của nón *Q* nếu $0\notin cl(B)$ và $Q=\text{cone}(B)$. Ta dễ dàng kiểm tra tựa phần trong $Q^{\neq}\neq\phi$ nếu và chỉ nếu nón lồi *Q* có một cơ sở lồi *B*. Như vậy nếu *B* là cơ sở lồi của nón *Q* thì $0\notin cl(B)$. Theo một định lí tách các tập lồi rời nhau $\{0\}$ và cl(*B*) (xem Rockarfeller [10]), tồn tại phiếm hàm tuyến tính liên tục $f_B: Y\to\mathbb{R}$ với $f_B\neq 0$ sao cho $r_B=\inf\{f_B(b):\ b\in B\}>0$. Các ký hiệu $B,\ f_B, r_B$ sẽ được cố định xuyên suốt bài báo. Ký hiệu $L(X,Y)$ là không gian các ánh xạ tuyến tính bị chặn từ *X* vào *Y*. Xét một ánh xạ vectơ $T: X\to L(X,Y)$. Khi đó với mỗi $x\in K$, *Tx* là một phiếm hàm tuyến tính bị chặn từ *X* vào *Y*.

Trong bài báo này chúng tôi nghiên cứu bài toán cân bằng vectơ có ràng buộc tập và bất đẳng thức tổng quát (GVEP): Tìm $\bar{x}\in K$ sao cho $F(\bar{x},\ x)\notin -\text{int}Q\ \ (\forall x\in K)$. Trong đó $F: X\times X\to Y$ là một song hàm vectơ thỏa mãn điều kiện $F(\bar{x},\bar{x})=0\ \forall\bar{x}\in X$; hàm ràng buộc $g: X\to Z$. Tập chấp nhận được của (GVEP) được ký hiệu bởi $K=\{x\in C:\ g(x)\in -S\}$. Để đơn giản, với mỗi $\bar{x}\in K$, ta viết

$$F(\bar{x},K)=\bigcup_{x\in K}F(\bar{x},x)=\{F(\bar{x},x):\ x\in K\}.$$

Định nghĩa 2.1 ([5, 8]**).** Vectơ $\bar{x}\in K$ được gọi là một nghiệm siêu hữu hiệu của bài toán (GVEP) nếu với mỗi lân cận *V* của 0 trong *Y*, tồn tại một lân cận *U* của 0 trong *X* thỏa mãn

$$\text{cone}\left(F(\bar{x},K)\right)\bigcap(U-Q)\subset V. \tag{1}$$

Nếu thay *K* bởi $K\cap B(\bar{x},\delta)$ với số thực $\delta>0$ thì $\bar{x}\in K$ thỏa mãn (1) được gọi là nghiệm siêu hữu hiệu địa phương của bài toán (GVEP). Như vậy, nếu $\bar{x}\in K$ là nghiệm siêu hữu hiệu của bài toán (GVEP) thì $\bar{x}\in K$ cũng là nghiệm siêu hữu hiệu địa phương của bài toán (GVEP). Do đó, các kết quả nghiên cứu về điều kiện cần hữu hiệu nếu đúng cho nghiệm siêu hữu hiệu địa phương thì cũng đúng cho nghiệm siêu hữu hiệu của bài toán (GVEP).

Hai trường hợp đặc biệt cho bài toán (GVEP) bao gồm bài toán tối ưu vectơ có ràng buộc bất đẳng thức tổng quát (GVOP) và bài toán bất đẳng thức biến phân vectơ có ràng buộc bất đẳng thức tổng quát (GVVI) được định nghĩa như sau.

Định nghĩa 2.2 ([5, 8]**).** Cho trước một ánh xạ $f: X\to Y$. Nếu song hàm $F(x,y):=f(y)-f(x)\ \forall x,y\in X$ và nếu $x\in K$ là nghiệm siêu hữu hiệu địa phương của (GVEP) thì $x\in K$ được gọi là nghiệm siêu hữu hiệu địa phương của (GVOP). Trong trường hợp này ta gọi K là tập chấp nhận được của (GVOP).

Định nghĩa 2.3 ([5, 8]). Nếu $F(x,y) := < Tx,\ y-x > \forall x, y \in X$ và nếu $x \in K$ là nghiệm siêu hữu hiệu địa phương của bài toán (GVEP) thì $x \in K$ được gọi là nghiệm siêu hữu hiệu địa phương của (GVVI). Tập K còn gọi là chấp nhận được của (GVVI).

Tiếp theo chúng tôi nhắc lại các định nghĩa quan trọng sau:

Định nghĩa 2.4 ([9, 11]). Cho ánh xạ $f : X \to Y$ và các $\bar{x}, v \in X$, $m \geq 1\left(m \in \mathbb{N}\right)$. Đạo hàm Studniarski cấp m của f tại điểm $\left(\bar{x}, v\right)$ được ký hiệu như $d_S^m f(\bar{x}; v)$ và được xác định bởi

$$d_S^m f(\bar{x}; v) = \lim_{\substack{t \to 0^+ \\ u \to v}} \frac{f\left(\bar{x} + tu\right) - f\left(\bar{x}\right)}{t^m}$$

nếu giới hạn tồn tại. Trong trường hợp $m = 1$, ta viết $d_S f(\bar{x}; v)$ thay cho $d_S^1 f(\bar{x}; v)$. Ngoài ra, nếu f là Lipschitz địa phương thì $d_S f(\bar{x}; v) = \lim_{t \to 0^+} \dfrac{f\left(\bar{x} + tv\right) - f\left(\bar{x}\right)}{t}$. Đây chính là đạo hàm theo hướng cổ điển của f tại $\bar{x}$ theo hướng v. Nếu đạo hàm Studniarski cấp 1 tồn tại, nó kéo theo đạo hàm theo hướng cổ điển tồn tại.

Khi định nghĩa đạo hàm Studniarski cấp 1 theo nghĩa "*limsup*" và "*liminf*" trùng nhau thì đạo hàm này chính là đạo hàm theo hướng Dini trên và đồng thời cũng là đạo hàm theo hướng Dini dưới. Tuy nhiên ở đây chúng tôi định nghĩa đạo hàm Studniarski cấp 1 theo nghĩa "*lim*" có một khó khăn đó là sự hội tụ của dãy thương $\left(\dfrac{f\left(\bar{x} + tu\right) - f\left(\bar{x}\right)}{t}\right)_{t>0}$ khi $u \to v$ không phải lúc nào cũng xảy ra bởi vì không gian Y không hữu hạn và hàm f là tùy ý. Vì vậy, trong mọi phát biểu của bài toán chúng tôi luôn giả thuyết các đạo hàm Studniarski cấp 1 tại điểm dưới sự xem xét luôn tồn tại theo mọi phương.

Định nghĩa 2.5 ([4, 9]). Nón tiếp liên của tập $A \subset X$ tại điểm $\bar{x} \in clA$ là

$$T(A, \bar{x}) = \left\{v \in X : \exists t_n > 0, \exists x_n \in A,\ x_n \to \bar{x} \text{ sao cho } t_n(x_n - \bar{x}) \to v\right\}.$$

Định nghĩa 2.6 ([4, 9]). Nón tiếp liên phần trong của tập $A \subset X$ tại điểm $\bar{x} \in clA$ là

$$IT(A, \bar{x}) = \left\{v \in X : \exists t_n \to 0^+ \text{ sao cho } \forall v_n \to v,\ \bar{x} + t_n v_n \in A\left(\forall n \sim \infty\right)\right\}.$$

Ký hiệu

$$I\bar{T}(A, \bar{x}) = \left\{v \in X : \exists t_n \to 0^+ \text{ sao cho } \bar{x} + t_n v \in A\ \left(\forall n \sim \infty\right)\right\}.$$

Ta có sự bao hàm

$$IT(A, \bar{x}) \subset I\bar{T}(A, \bar{x}) \subset T(A, \bar{x}).$$

Một đặc trưng tương đương của nón tiếp liên do Giorgi và Guerraggio [4] cung cấp được phát biểu như sau.

Mệnh đề 2.1 ([4]). Nón tiếp liên của tập $A \subset X$ tại điểm $\bar{x} \in clA$ là

$$T(A, \bar{x}) = \left\{v \in X : \exists x_n \in A \setminus \left\{\bar{x}\right\},\ x_n \to \bar{x} \text{ sao cho } \frac{x_n - \bar{x}}{\left\|x_n - \bar{x}\right\|} \to \frac{v}{\|v\|}\right\} \cup \{0\}.$$

3. Kết quả mới của bài báo

Sử dụng công cụ chính là đạo hàm Studniarski trong không gian Banach và các nón tiếp liên, nón tiếp liên phần trong đối với một tập tại một điểm cho trước, trong tiểu mục này chúng tôi cung cấp các điều kiện cần hữu hiệu cơ bản và đối ngẫu cho nghiệm siêu hữu hiệu và siêu hữu hiệu địa phương của bài toán (GVEP). Kết quả thu được sẽ áp dụng trực tiếp cho hai bài toán riêng của (GVEP) đó là (GVOP) và (GVVI).

Định lí 3.1. Cho $\bar{x} \in K$ thỏa mãn điều kiện cân bằng $F\left(\bar{x},\ \bar{x}\right) = 0$ và B là cơ sở lồi, đóng và bị chặn của nón Q. Giả sử các đạo hàm Studniarski $d_S F(\bar{x}, \bar{x}; v)$ và $d_S g(\bar{x}; v)$ tồn tại theo mọi phương $v \in X$. Khi đó, nếu $\bar{x} \in K$ là một nghiệm siêu hữu hiệu địa phương của bài toán (GVEP) thì tồn tại một lân cận lồi và cân đối U của 0 với $U \subset \left\{y \in Y : \left|f_B(y)\right| < \frac{r_B}{2}\right\}$ thỏa mãn

$$d_S F\left(\bar{x}, \bar{x}; T(C, \bar{x}) \cap \left\{u \in X : d_S g(\bar{x}; u) \in -\operatorname{int} S\right\}\right) \bigcap \left(-\operatorname{int} cone(U + B)\right) = \phi.$$

Chứng minh. Cho $\bar{x} \in K$ là một nghiệm siêu hữu hiệu địa phương của bài toán (GVEP). Theo Long et al. ([8], Remark 2.1), tồn tại một lân cận lồi và cân đối U của 0 với $U \subset \left\{y \in Y : \left|f_B(y)\right| < \dfrac{r_B}{2}\right\}$ thỏa mãn cone $\left(F(\bar{x}, K \cap B(\bar{x}, \delta))\right) \bigcap \left(-\operatorname{int} cone(U + B)\right) = \phi.$ Đặt $Q^* = cl\, cone(B + U)$. Khi đó Q^* là nón lồi đóng và nhọn trong Y thỏa mãn $Q\setminus\{0\}\subset \text{int}Q^*$ (xem [4, 6]). Dễ dàng có được

$$cone\Big(F(\bar{x}, K\cap B(\bar{x}, \delta))\Big)\bigcap\big(-\text{int}\,Q^*\big)=\phi.$$

Điều này dẫn đến

$$F\Big(\bar{x}; K\cap B(\bar{x}, \delta)\Big)\bigcap\big(-\text{int}\,Q^*\big)=\phi. \quad (2)$$

Ta kiểm tra

$$d_SF\Big(\bar{x}, \bar{x}; T(C, \bar{x})\cap\big\{u\in X: d_Sg(\bar{x}; u)\in -\text{int}\,S\big\}\Big)\bigcap\big(-\text{int}\,Q^*\big)=\phi. \quad (3)$$

Thật vậy, nếu (3) không đúng thì ta tìm được một hướng $v\in T(C, \bar{x})$ sao cho $d_Sg(\bar{x}; v)\in -\text{int}\,S$ và $d_SF(\bar{x}, \bar{x}; v)\in -\text{int}\,Q^*$. Bởi vì int$S$ không chứa 0 nên $v\neq 0$. Áp dụng Mệnh đề 2.1, tồn tại một dãy $(x_n)_{n\geq 1}\subset C\setminus\{\bar{x}\}$, $x_n\to\bar{x}$ thỏa mãn

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n-\bar{x}}{\|x_n-\bar{x}\|}=\frac{v}{\|v\|}. \quad (4)$$

Với mỗi số tự nhiên n, ta đặt $t_n=\dfrac{\|x_n-\bar{x}\|}{\|v\|}$, $v_n=\dfrac{x_n-\bar{x}}{t_n}$. Áp dụng (4) để có kết quả $t_n\to 0^+$ và $v_n\to v$. Theo cách thiết lập trên, bằng một tính toán đơn giản cho ta

$$x_n=\bar{x}+t_nv_n\in C\ (\forall n\geq 1). \quad (5)$$

Sử dụng khái niệm đạo hàm Studiniarski (Định nghĩa 2.4), ta có

$$\begin{aligned} d_SF(\bar{x}, \bar{x}; v) &= \lim_{\substack{t\to 0^+\\ u\to v}}\frac{F\big(\bar{x}, \bar{x}+t_nu\big)-F\big(\bar{x}, \bar{x}\big)}{t}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{F\big(\bar{x}, x_n\big)-F\big(\bar{x}, \bar{x}\big)}{t}. \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} d_Sg(\bar{x}; v) &= \lim_{\substack{t\to 0^+\\ u\to v}}\frac{g\big(\bar{x}+t_nu\big)-g\big(\bar{x}\big)}{t}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{g(x_n)-g\big(\bar{x}\big)}{t}. \end{aligned} \quad (7)$$

Do intS là tập mở, kết hợp (5) và (7), tồn tại số thực dương $A>0$ sao cho

$$\frac{g(x_n)-g\big(\bar{x}\big)}{t}\in -\text{int}\,S\ \ (\forall n\geq A),$$

hay là,

$$g\big(\bar{x}+t_nv_n\big)\in -S\ \ (\forall n\geq A), \quad (8)$$

do nón S lồi, $g(\bar{x})\in -S$, $S+\text{int}\,S=\text{int}\,S\subset S$ và $t\,\text{int}\,S=\text{int}\,S$. Mặt khác, ta cũng có $x_n\to\bar{x}\in B\big(\bar{x}, \delta\big)$, tồn tại một số thực B với B > A sao cho $x_n\in B\big(\bar{x}, \delta\big)$ và các quan hệ phụ thuộc trong các điều kiện ràng buộc (5) và (8) đúng với mọi $n\geq$ B. Vậy,

$$x_n=\bar{x}+t_nv_n\in K\cap B\big(\bar{x}, \delta\big)\ \ (\forall n\geq B). \quad (9)$$

Tương tự như lập luận trên, áp dụng Q^* thay cho K, và không mất tính tổng quát

$$F\big(\bar{x}, \bar{x}+t_nv_n\big)\in -\text{int}\,Q^*\ \ (\forall n\geq B). \quad (10)$$

Kết hợp (2) và (9) dẫn đến một sự mâu thuẫn với (10). Vậy (3) thỏa mãn kéo theo

$$d_SF\Big(\bar{x}, \bar{x}; T(C, \bar{x})\cap\big\{u\in X: d_Sg(\bar{x}; u)\in -\text{int}\,S\big\}\Big)\bigcap\big(-\text{int}\,cone(U+B)\big)=\phi.$$

Định lí được chứng minh đầy đủ. □

Một hệ quả trực tiếp từ Định lí 3.1 là kết quả sau.

Hệ quả 3.2. Cho $\bar{x}\in K$ thỏa mãn điều kiện cân bằng $F\big(\bar{x}, \bar{x}\big)=0$ và B là cơ sở lồi, đóng và bị chặn của nón Q. Giả sử các đạo hàm Studniarski $d_SF(\bar{x}, \bar{x}; v)$ và $d_Sg(\bar{x}; v)$ tồn tại theo mọi phương $v\in X$. Khi đó, nếu $\bar{x}\in K$ là một nghiệm siêu hữu hiệu của bài toán (GVEP) thì tồn tại một lân cận lồi và cân đối U của 0 với $U\subset\left\{y\in Y: |f_B(y)|<\dfrac{r_B}{2}\right\}$ thỏa mãn

$$d_SF\Big(\bar{x}, \bar{x}; T(C, \bar{x})\cap\big\{u\in X: d_Sg(\bar{x}; u)\in -\text{int}\,S\big\}\Big)\bigcap\big(-\text{int}\,cone(U+B)\big)=\phi.$$

Chứng minh. Bởi vì một nghiệm siêu hữu hiệu của bài toán (GVEP) cũng là một nghiệm siêu hữu hiệu địa phương của bài toán đó. Từ Định lí 3.1 ta có điều phải chứng minh. □

Một điều kiện hữu hiệu phát biểu ở dạng đối ngẫu cho nghiệm siêu hữu hiệu (địa phương) của bài toán (GVEP) dựa trên các Định lí 3.1 và Hệ quả 3.2 như sau.

Định lí 3.3. Cho $\bar{x}\in K$ thỏa mãn điều kiện cân bằng $F\big(\bar{x}, \bar{x}\big)=0$ và B là cơ sở lồi, đóng và bị chặn của nón Q. Giả sử các đạo hàm Studniarski $d_SF(\bar{x}, \bar{x}; v)$ và $d_Sg(\bar{x}; v)$ tồn tại theo mọi phương $v\in X$. Khi đó, nếu $\bar{x}\in K$ là một nghiệm siêu hữu hiệu địa phương (hay nghiệm siêu hữu hiệu) của bài toán (GVEP) thì với mọi $v \in T(C, \bar{x})$ sao cho $d_S g\left(\bar{x}, v\right) \in -\operatorname{int} S$, tồn tại $f \in \operatorname{int}(Q^+)$ và $k \in S^+$ thỏa mãn

$$f\left(d_S F\left(\bar{x}, \bar{x}; v\right)\right) + k\left(d_S g\left(\bar{x}; v\right)\right) \geq 0. \quad (11)$$

Chứng minh. Áp dụng kết quả thu được trong Định lí 3.1 và Hệ quả 3.2 trên, tồn tại một lân cận lồi và cân đối U của 0 với $U \subset \left\{ y \in Y : \left| f_B(y) \right| < \frac{r_B}{2} \right\}$ thỏa mãn

$$d_S F\left(\bar{x}, \bar{x}; T(C, \bar{x}) \cap \left\{u \in X : d_S g(\bar{x}; u) \in -\operatorname{int} S\right\}\right) \bigcap \left(-\operatorname{int} cone(U+B)\right) = \phi.$$

Với tùy ý $v \in T(C, \bar{x})$ sao cho $d_S g\left(\bar{x}, v\right) \in -\operatorname{int} S$, ta có

$$d_S F(\bar{x}, \bar{x}; v) \notin -\operatorname{int} cone(U+B).$$

Hệ quả là

$$\left(d_S F(\bar{x}, \bar{x}; v),\ d_S g(\bar{x}; v\right) \notin \left(-\operatorname{int} cone(U+B)\right) \times \left(-\operatorname{int} S\right).$$

Áp dụng định lí tách trong Rockerfellar [10], tồn tại $f \in Y^*$ và $k \in Z^*$, không đồng thời bằng không sao cho $\forall q \in \operatorname{int} cone(U+B)\ \forall r \in \operatorname{int} S$

$$f\left(d_S F\left(\bar{x}, \bar{x}; v\right)\right) + f(q) + k\left(d_S g\left(\bar{x}; v\right)\right) + k(r) > 0 > 0. \quad (12)$$

Bởi vì nón $cone(U+B)$ và S chứa gốc nên bất đẳng thức (11) đúng. Dễ thấy $k \in S^+$. Để kiểm tra $f \in \operatorname{int}(Q^+)$, ta chứng minh

$$f(q) \geq 0\ \ \forall q \in cone(U+B),\ f \neq 0. \quad (**)$$

Điều này có được là do (**) đúng kéo theo $f \in [\text{cone(U+B)}]^+ \setminus \{0\} \subset \text{int}(\text{Q}^+)$ (xem Bổ đề 2.1 (i) và (iii) trong [8]). Để có (**), với mọi $t > 0$, ta có $tq \in cone(U+B)$. Sử dụng bất đẳng thức (12), ta có

$$f\left(d_S F\left(\bar{x}, \bar{x}; v\right)\right) + tf(q) \geq 0\ \ \forall q \in cone(U+B)\ \forall t > 0,$$

hay tương đương

$$t^{-1} f\left(d_S F\left(\bar{x}, \bar{x}; v\right)\right) + f(q) \geq 0\ \ \forall q \in cone(U+B), \forall t > 0. \quad (13)$$

Cho $t \to +\infty$ trong (13) dẫn đến (**) thỏa mãn. Chú ý rằng $f \neq 0$ là do $d_S g\left(\bar{x}, v\right) \in -\operatorname{int} S$. Vậy định lí được chứng minh. □

Tiếp theo chúng tôi cung cấp điều kiện cần hữu hiệu cho nghiệm siêu hữu hiệu địa phương của bài toán (GVOP) và (GVVI).

Định lí 3.4. Cho B là một cơ sở lồi, đóng và bị chặn của nón Q, $\bar{x} \in K$ và giả sử $F(x, y) = f(y) - f(x)\ \forall x, y \in X$ với $f : X \to Y$ là một ánh xạ. Giả sử các đạo hàm Studniarski $d_S f(\bar{x}; v)$ và $d_S g(\bar{x}; v)$ tồn tại theo mọi phương $v \in X$. Nếu $\bar{x} \in K$ là một nghiệm siêu hữu hiệu địa phương (hay nghiệm siêu hữu hiệu) của (GVEP) thì với mọi $v \in T(C, \bar{x})$ sao cho $d_S g\left(\bar{x}, v\right) \in -\operatorname{int} S$, tồn tại $f \in \operatorname{int}(Q^+)$ và $k \in S^+$ thỏa mãn

$$f\left(d_S f\left(\bar{x}; v\right)\right) + k\left(d_S g\left(\bar{x}; v\right)\right) \geq 0. \quad (14)$$

Chứng minh. Ta có $F(x, y) = f(y) - f(x)\ \forall x, y \in K$ với song hàm $F : K \times K \to Y$. Khi đó, với mỗi $\bar{x} \in K$ thỏa mãn điều kiện cân bằng $F\left(\bar{x}, \bar{x}\right) = 0$ và hơn nữa, $F(\bar{x}, x) = f(x) - f(\bar{x})\ \forall x \in K.$ Do vậy, đạo hàm Studniarski $d_S f(\bar{x}; v)$ tồn tại theo mọi phương $v \in X$ khi và chỉ khi đạo hàm Studniarski $d_S F(\bar{x}, \bar{x}; v)$ tồn tại theo mọi phương $v \in X$. Ngoài ra, $d_S f(\bar{x}; v) = d_S F(\bar{x}, \bar{x}; v)$ với mọi $v \in X$. Áp dụng Định lí 3.2, tồn tại các phiếm hàm tuyến tính liên tục $f \in \operatorname{int}(Q^+)$ và $k \in S^+$ thỏa mãn (14). □

Định lí 3.5. Cho B là cơ sở lồi, đóng và bị chặn của nón Q, $\bar{x} \in K$ và giả sử $F(x, y) = \langle Tx,\ y - x \rangle\ \forall x, y \in X$ với ánh xạ $T : K \to L(X, Y)$. Giả sử đạo hàm Studniarski $d_S g(\bar{x}; v)$ tồn tại theo mọi phương $v \in X$. Khi đó, nếu $\bar{x} \in K$ là một nghiệm siêu hữu hiệu địa phương (hay nghiệm siêu hữu hiệu) của bài toán (GVEP) thì với mọi $v \in T(C, \bar{x})$ sao cho $d_S g\left(\bar{x}, v\right) \in -\operatorname{int} S$, tồn tại $f \in \operatorname{int}(Q^+)$ và $k \in S^+$ thỏa mãn

$$f\left(T\bar{x}(v)\right) + k\left(d_S g\left(\bar{x}; v\right)\right) \geq 0. \quad (15)$$

Chứng minh. Ta định nghĩa $F(x, y) = \langle Tx,\ y - x \rangle\ \forall x, y \in K$ với một song hàm

$F: K\times K\to Y$. Lúc này với mọi $\bar{x}\in K$ thỏa mãn điều kiện cân bằng $F\left(\bar{x},\bar{x}\right)=0$ và ngoài ra, $F(\bar{x},x)=<T\bar{x},\ x-\bar{x}>\ \forall x\in K$. Do đó đạo hàm Studniarski $d_S F(\bar{x},\bar{x};v)$ luôn tồn tại theo mọi phương $v\in X$ và hơn nữa $T\bar{x}(v)=d_S F(\bar{x},\bar{x};v)$ với mọi $v\in X$. Theo Định lí 3.3, tồn tại các phiếm hàm tuyến tính liên tục $f\in \text{int}(Q^+)$ và $k\in S^+$ thỏa mãn điều kiện (15) và chúng ta kết thúc chứng minh định lí. □

Chú ý 3.6. Kết quả thu được của Định lí 3.1, 3.3, 3.4, 3.5 và Hệ quả 3.2 vẫn còn đúng trong trường hợp nón tiếp liên $T(C,\bar{x})$ bị hủy bỏ và chúng được thay thế bởi nón tiếp liên phần trong $IT(C,\bar{x})$ *hay* $IT(C,\bar{x})$. Cuối cùng chúng tôi cung cấp một ví dụ để mô tả cho Định lí 3.3 trong trường hợp nghiệm siêu hữu hiệu địa phương.

Ví dụ 3.7. Xét bài toán cân bằng vectơ có ràng buộc tập và bất đẳng thức tổng quát (GVEP) trong đó $X=Y=Z=\mathbb{R}^2,\ Q=S=\mathbb{R}^2_+,\ C=\left\{\left(\frac{1}{2},1\right),(1,0),(1,1)\right\}\cup\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^2$ và $\bar{x}=(0,0)$. Ta xét các ánh xạ $F(\bar{x},.), g: X\to\mathbb{R}^2$ được định nghĩa tương ứng bởi $F(\bar{x},(x,y))=(x,y)\ (\forall x,y\in\mathbb{R}),\ g(x,y)=(-x,-y)\ (\forall x,y\in\mathbb{R})$. Khi đó, tập chấp nhận được của (GVEP) là $K=\left\{(1,0),(1,1),\left(\frac{1}{2},1\right)\right\}\cup\left[0,\frac{1}{2}\right]^2$. Hiển nhiên một cơ sở lồi đóng và bị chặn của nón Q luôn có dạng $B=\left\{b=(b_1,b_2)\in\mathbb{R}^2_+ : b_1+b_2=1\right\}$. Chúng tôi định nghĩa $U=\left\{x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : x_1^2+x_2^2<\frac{1}{2}\right\}$ là một lân cận lồi cân đối của 0. Theo Long et al. [8], $\bar{x}=(0,0)$ là một nghiệm siêu hữu hiệu địa phương của bài toán (GVEP). Mặt khác với mọi $(v,\text{w})\in\mathbb{R}^2$. Tính toán trực tiếp ta được $d_S F(\bar{x},\bar{x};(v,\text{w}))=(v,\text{w})$ và $d_S g(\bar{x};(v,\text{w}))=(-v,-\text{w})$. Do đó tất cả các giả thiết của Định lí 3.3 được thỏa mãn. Để ý rằng $T(C,\bar{x})=\mathbb{R}^2$. Theo Định lí 3.3, với mọi $(v,\text{w})\in\mathbb{R}^2$ thỏa mãn $d_S g(\bar{x};v)=-(v,\text{w})\in-\text{int}\,\mathbb{R}^2_+$, tồn tại phiếm hàm tuyến tính liên tục $f=(f_1,f_2)\in\text{int}\,\mathbb{R}^2_+$ và $k=(0,0)\in S^+$ sao cho $f\left(d_S F\left(\bar{x},\bar{x};v\right)\right)\geq 0$. Thật vậy, bằng phương pháp thử trực tiếp, ta luôn chọn được các số $f_1>0,\ f_2>0$ thì $f\neq(0,0)$ và hơn nữa $f\left(d_S F\left(\bar{x},\bar{x};v\right)\right)=f_1.\text{v}+f_2.\text{w}\geq 0$. Vậy Định lí 3.3 được kiểm tra đầy đủ.

4. Kết luận

Bài báo đã chứng minh được kết quả về điều kiện cần hữu hiệu cho nghiệm siêu hữu hiệu và nghiệm siêu hữu hiệu địa phương của bài toán cân bằng vectơ có ràng buộc tập và bất đẳng thức tổng quát. Kết quả này được áp dụng trực tiếp vào hai bài toán riêng đó là bài toán tối ưu hóa vectơ và bài toán bất đẳng thức biến phân vectơ theo ngôn ngữ đạo hàm Studniarski với lớp hàm không trơn trong không gian Banach. Kết quả đạt được là hoàn toàn mới và được sử dụng cho việc nghiên cứu tính ổn định nghiệm của bài toán cân bằng tham số và dùng trong việc thiết kế thuật toán số tìm nghiệm siêu hữu hiệu địa phương cho bài toán cân bằng vectơ có ràng buộc bất đẳng thức tổng quát trong tương lai./.

Tài liệu tham khảo

[1]. Q. H. Ansari (2000), "Vector Equilibrium Problems and Vector Variational Inequalities, in Vector Variational Inequalities and Vector EquilibriaMathematical Theories", *Edited by Prof. F. Giannessi, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London*, pp. 1-16.

[2]. M. Bianchi, N. Hadjisavvas, S. Schaible (1997), "Vector equilibrium problems with generalized monotone bifunctions", *J. Optim. Theory Appl.*, (92), pp. 527-542.

[3]. E. Blum, W. Oettli (1994), "From optimization and variational inequalities to equilibrium problems", *Math. Stud.*, (63), pp. 127-149.

[4]. G. Giorgi, A. Guerraggio (1992), On the notion of tangent cone in mathematical programming, *Optimization*, (25), pp. 11-23.

[5]. X. H. Gong (2010), "Scalarization and optimality conditions for vector equilibrium problems", *Nonlinear Analysis*, (73), pp. 3598-3612.

[6]. A. D. Ioffe (1984), "Calculus of dini subdifferentials of functions and contingent coderivatives of set-valued maps", *Nonlinear Analysis: Theory , Methods & Applications*, 3 (5), pp. 517-539.

[7]. P. Q. Khanh, N. M. Tung (2015), "Optimization conditions and duality for nonsmooth vector equilibrium problems with constraints", *Optimization*, (64), pp. 1547-1575.

[8]. X. J. Long, Y. Q. Huang, Z. Y. Peng (2011), "Optimality conditions for the Henig efficient solution of vector equilibrium problems with constraints", *Optim. Lett.*, (5), pp. 717-728.

[9]. D. V. Luu (2008), "Higher-order necessary and sufficient conditions for strict local Pareto minima in terms of Studniarski's derivatives", *Optimization,* (57), pp. 593-605.

[10]. R. T. Rockafellar (1970), Convex Analysis, *Princeton Univ. Press, Princeton*.

[11]. M. Studniarski (1986), Necessary and sufficient conditions for isolated local minima of nonsmooth functions, *SIAM J. Optim.,* (24), pp. 1044-1049.

NECESSARY EFFICIENCY CONDITIONS FOR THE LOCAL SUPEREFFICIENT SOLUTIONS OF VECTOR EQUILIBRIUM PROBLEMS WITH GENERAL INEQUALITY CONSTRAINTS AND APPLICATIONS

Summary

In this article, we use the concept of Studniarski's derivatives in Banach spaces with a class of non-smooth functions to establish necessary efficiency conditions for the local superefficient solution of vector equilibrium problem with a set constraint and a general inequality constraint. The obtained results are directly applied to the vector variational inequality problem and the vector optimization problem with their common set and general inequality constraints.

Keywords: Necessary efficiency conditions, vector equilibrium problems, vector optimization problems, vector variational inequality problems, local superefficient solutions, studniarski's derivatives.

Ngày nhận bài: 28/8/2019; Ngày nhận lại: 01/11/2019; Ngày duyệt đăng: 05/12/2019.