



DOI: <https://doi.org/10.52714/dthu.ns.2941.1899>

CÁC NỬA VÀNH J_S -NỬA ĐƠN

Phạm Quốc Thái¹ và Lê Hoàng Mai^{2*}

¹*Sinh viên, Khoa Sư phạm Toán – Tin, Trường Sư phạm,
Trường Đại học Đồng Tháp, Việt Nam*

²*Phòng Bảo đảm chất lượng, Trường Đại học Đồng Tháp, Việt Nam*

**Tác giả liên hệ, Email: lhmai@dthu.edu.vn*

Lịch sử bài báo

Ngày nhận: 10/11/2025; Ngày nhận chỉnh sửa: 05/12/2025; Ngày duyệt đăng: 06/12/2025

Tóm tắt

Trong bài viết này, chúng tôi mở rộng Mệnh đề 11.1 (Lam, 2001) để đặc trưng lớp các nửa vành J_S -nửa đơn. Sử dụng các kết quả thu được, chúng tôi nghiên cứu thêm các tính chất của các nửa vành J_S -nửa đơn. Cuối cùng, chúng tôi đưa ra một số ví dụ về nửa vành J_S -nửa đơn nhằm minh họa cho các kết quả này.

Từ khóa: *J_S -căn của nửa vành, Nửa môđun đơn, Nửa vành J_S -nửa đơn.*

Trích dẫn: Phạm, Q. T., & Lê, H. M. (2026). Các nửa vành J_S -nửa đơn. *Tạp chí Khoa học Đại học Đồng Tháp, Online First*. <https://doi.org/10.52714/dthu.ns.2941.1899>

Copyright © 2026 The author(s). This work is licensed under a CC BY-NC 4.0 License.

THE J_s -SEMISIMPLE SEMIRINGS

Pham Quoc Thai¹ and Le Hoang Mai^{2*}

¹*Student, Faculty of Mathematics and Informatics Education, School of Education,
Dong Thap University, Vietnam*

²*Quality Assurance office, Dong Thap University, Vietnam*

^{*}*Corresponding author, Email: lhmai@dthu.edu.vn*

Article history

Received: 10/11/2025; Received in revised form: 05/12/2025; Accepted: 06/12/2025

Abstract

In this paper, we extend Proposition 11.1 (Lam, 2001) to characterize the class of J_s -semisimple semirings. By applying the obtained results, we investigate the properties of J_s -semisimple semirings in relationship to simple semimodules. Finally, we provide some examples of J_s -semisimple semirings to illustrate these results.

Keywords: J_s -radical of semiring, J_s -semisimple semiring, Simple semimodules.

1. Giới thiệu

Năm 1945, Jacobson đề xuất khái niệm căn cho các vành kết hợp là tổng của tất cả các idêan phải tựa chính quy phải (Jacobson, 1945). Sau đó, ông sử dụng khái niệm môđun đơn (môđun khác môđun không và chỉ có hai môđun con là môđun không và chính nó) để đặc trưng cho căn Jacobson của vành. Từ đó, căn Jacobson trở thành một công cụ hiệu quả để nghiên cứu cấu trúc vành. Môđun đơn, căn Jacobson và các vấn đề liên quan đến lý thuyết vành đã được trình bày tương đối đầy đủ và có hệ thống trong các tài liệu của Lam (2001) và Gardner-Wiegandt (2004).

Khái niệm nửa vành được Vandiver giới thiệu lần đầu tiên vào năm 1934 (Vandiver, 1934), là tổng quát hóa khái niệm vành kết hợp theo nghĩa không đòi hỏi tính đối xứng của phép cộng. Ngày nay, nửa vành được phát triển cả về phương diện lý thuyết lẫn ứng dụng. Các tính chất, ứng dụng của nửa vành, nửa môđun và các vấn đề liên quan đã được trình bày tương đối đầy đủ trong tài liệu của Golan (1999).

Năm 1951, Bourne (1951) đề xuất khái niệm căn Jacobson của các nửa vành (một dạng tổng quát hóa căn Jacobson trong lý thuyết vành) là tổng tất cả các idêan phải nửa chính quy phải. Sau đó, Iizuka (1959) đã sử dụng lớp các nửa môđun bất khả quy (tổng quát hóa khái niệm môđun đơn trong lý thuyết vành) để đặc trưng căn Jacobson của các nửa vành và đã thu được nhiều kết quả quan trọng. Ngoài ra, Lattore (1965) cũng nghiên cứu các tính chất của căn Jacobson của các nửa vành.

Năm 2014, Katsov và Nam (2014) đã đề xuất khái niệm nửa môđun đơn (nửa môđun khác không mà chỉ có hai môđun con tầm thường và hai tương đẳng tầm thường) là tổng quát hóa của môđun đơn trên vành và khái niệm J_s -căn của các nửa vành cũng là một dạng tổng quát hóa căn Jacobson trong lý thuyết vành. Cũng giống như căn Jacobson của vành, khái niệm J_s -căn của nửa vành đã trở thành một công cụ hiệu quả để nghiên cứu cấu trúc nửa vành.

Năm 2017, Mai và Tuyen (2017) đã chứng minh được sự tồn tại của nửa môđun đơn trên nửa vành cộng lũy đẳng và nghiên cứu J_s -căn của một số lớp các nửa vành nửa đơn, nửa vành cộng pi-chính quy, nửa vành Artin phản bị chặn. Ngoài ra, Mai và Tuyen (2016) đã nghiên cứu lớp các V-nửa vành J_s -nửa đơn.

Trong Mệnh đề 11.1 (Lam, 2001) đã sử dụng khái niệm môđun đơn để đặc trưng cho lớp các vành J -nửa đơn và nhận được nhiều kết quả quan trọng trong lý thuyết vành. Trong bài báo này, chúng tôi mở rộng khái niệm môđun đơn trong Mệnh đề 11.1 (Lam, 2001) cho khái niệm nửa môđun đơn để đặc trưng lớp các nửa vành J_s -nửa đơn và sử dụng kết quả thu được để nghiên cứu lớp các nửa vành J_s -nửa đơn.

2. Kiến thức chuẩn bị

Một tập hợp S khác rỗng được trang bị hai phép toán cộng "+" và nhân "." được gọi là *nửa vành* nếu thỏa mãn các điều kiện sau:

- (1) $(S, +)$ là một vị nhóm với phần tử không là 0_S ;
- (2) $(S, \cdot)$ là một nửa nhóm;

- (3) Với mọi $s_1, s_2, s_3 \in S$: $s_1(s_2 + s_3) = s_1s_2 + s_1s_3$ và $(s_1 + s_2)s_3 = s_1s_3 + s_2s_3$;
 (4) Với mọi $s \in S$: $s0_S = 0_Ss = 0_S$.

Một nửa vành S được gọi là *nửa vành giao hoán* nếu $(S, \cdot)$ là nửa nhóm giao hoán. Một nửa vành S được gọi là *nửa vành có đơn vị* nếu $(S, \cdot)$ là vị nhóm với phần tử đơn vị khác phần tử không, ký hiệu phần tử đơn vị là 1_S . Một nửa vành S giao hoán có đơn vị được gọi là *nửa trường* nếu $(S \setminus \{0\}, \cdot, 1_S)$ là một nhóm. Một nửa vành S được gọi là *phi khả đối* nếu $s_1 + s_2 = 0$ kéo theo $s_1 = s_2 = 0$ với mọi $s_1, s_2 \in S$. Một nửa vành S được gọi là *nguyên* nếu $s_1s_2 = 0$ kéo theo $s_1 = 0$ hoặc $s_2 = 0$ với mọi $s_1, s_2 \in S$. Nếu nửa vành S vừa là nguyên vừa là phi khả đối thì S được gọi là *nguyên phi khả đối*.

Một tập con I khác rỗng của nửa vành S được gọi là *idean trái (phải)* của S nếu $0_S \in I$ và $a + b \in I$, $sa \in I$ ($as \in I$) với mọi $a, b \in I$, $s \in S$.

Cho S và R là các nửa vành. Một ánh xạ $\pi: S \rightarrow R$ được gọi là *đồng cấu nửa vành* nếu thỏa mãn các điều kiện sau: với mọi $s_1, s_2 \in S$

- (1) $\pi(0_S) = 0_R$;
 (2) $\pi(s_1 + s_2) = \pi(s_1) + \pi(s_2)$;
 (3) $\pi(s_1s_2) = \pi(s_1)\pi(s_2)$.

Một đồng cấu nửa vành π được gọi là *đơn cấu nửa vành* (tương ứng *toàn cấu nửa vành*, *đẳng cấu nửa vành*) nếu π là đơn ánh (tương ứng toàn ánh, song ánh). Một toàn cấu nửa vành π được gọi là *nửa đẳng cấu nửa vành* nếu $\text{Ker}(\pi) = \{s \in S \mid \pi(s) = 0_R\} = \{0_S\}$.

Cho S là một nửa vành và $(M, +, 0_M)$ là một vị nhóm. Trên M được trang bị một *phép nhân vô hướng* $S \times M \rightarrow M$ (tức là với mọi $s \in S$, $m \in M$ thì $sm \in M$). Khi đó M được gọi là *S -nửa môđun trái* nếu thỏa mãn các điều kiện sau: với mọi $s, s_1, s_2 \in S$, $m, m_1, m_2 \in M$

- (1) $(s_1s_2)m = s_1(s_2m)$;
 (2) $s(m_1 + m_2) = sm_1 + sm_2$;
 (3) $(s_1 + s_2)m = s_1m + s_2m$;
 (4) $s0_M = 0_Sm = 0_M$.

Cho S là một nửa vành và M là một S -nửa môđun trái. Tập con khác rỗng $(0:M) = \{s \in S \mid sM = 0_M\}$ là một idean của S được gọi là *linh hóa tử* của M , nếu $(0:M) = \{0_S\}$ thì M được gọi là *trung thành*. Một tập con N khác rỗng của M , được gọi là *nửa môđun con* của M nếu $n_1 + n_2, sn \in N$ với mọi $n, n_1, n_2 \in N$, $s \in S$. Nếu $M \neq \{0_M\}$ thì M luôn có ít nhất hai nửa môđun con khác nhau là $\{0\}$ và M , hai nửa môđun con này được gọi là *tâm thường* của M . Nếu $M \neq \{0_M\}$ và M chỉ có hai nửa môđun con tâm

thường thì M được gọi là *cực tiểu*. Một quan hệ tương đương ρ trên M được gọi là *tương đẳng* trên M nếu $(x+x', y+y'), (sx, sy) \in \rho$ với mọi $(x, y), (x', y') \in \rho, s \in S$. Nếu $M \neq \{0_M\}$ thì M luôn có ít nhất hai tương đẳng khác nhau là $\Delta_M = \{(m, m) \mid m \in M\}$ được gọi là *tương đẳng đường chéo* và $M^2 = M \times M$ được gọi là *tương đẳng phổ dụng*, hai tương đẳng này được gọi là *tâm thường* trên M .

Cho S là một nửa vành và M là một S -nửa môđun trái. M được gọi là *đơn* nếu thỏa mãn các điều kiện sau:

- (1) $SM \neq \{0_M\}$;
- (2) M là cực tiểu;
- (3) M chỉ có hai tương đẳng tâm thường.

M được gọi là *S -nửa môđun trái nửa đơn* nếu M là tổng trực tiếp của các S -nửa môđun trái đơn. Vậy nếu M là S -nửa môđun trái đơn thì M là S -nửa môđun trái nửa đơn.

Ví dụ 2.1. Nửa trường Boolean $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ (Golan, 1999) là $\mathbb{B}$ -nửa môđun trái đơn.

Chứng minh. Nửa trường Boolean $\mathbb{B}$ là một $\mathbb{B}$ -nửa môđun trái với phép nhân vô hướng được xác định bởi phép nhân trên chính nó. Ta có $\mathbb{B}\mathbb{B} \neq \{0\}$ vì $1.1 = 1$ (1). Vì $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ chỉ có hai phần tử nên $\mathbb{B}$ là cực tiểu (2). Giả sử ρ là một tương đẳng bất kì khác tương đẳng đường chéo $\Delta_{\mathbb{B}} = \{(0, 0), (1, 1)\}$ trên $\mathbb{B}$. Khi đó tồn tại $(1, 0) \in \rho$ kéo theo $(0, 1) \in \rho$ hoặc $(0, 1) \in \rho$ kéo theo $(1, 0) \in \rho$. Suy ra $\rho = \{(0, 0), (1, 1), (1, 0), (0, 1)\} = \mathbb{B}^2$. Vậy $\mathbb{B}$ chỉ có hai tương đẳng tâm thường (3). Từ (1), (2) và (3) suy ra $\mathbb{B}$ là $\mathbb{B}$ -nửa môđun trái đơn.

Ví dụ 2.2. Nửa trường các số thực không âm $\mathbb{R}_+$ là một $\mathbb{R}_+$ -nửa môđun trái cực tiểu nhưng không đơn.

Chứng minh. Nửa trường các số thực không âm $\mathbb{R}_+$ là một $\mathbb{R}_+$ -nửa môđun trái với phép nhân vô hướng được xác định bởi phép nhân trên chính nó. Giả sử N là một nửa môđun con khác không của $\mathbb{R}_+$. Khi đó tồn tại $0 \neq x \in N$. Với mọi $y \in \mathbb{R}_+$ ta có

$$y = y1 = y(x^{-1}x) = (yx^{-1})x \in N,$$

do đó $\mathbb{R}_+ \subseteq N$. Mà $N \subseteq \mathbb{R}_+$ nên $N = \mathbb{R}_+$. Vậy $\mathbb{R}_+$ là cực tiểu.

Xét quan hệ tương đương ρ trên $\mathbb{R}_+$ được xác định bởi:

$$\rho = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \mid x, y \neq 0\} \cup \{(0, 0)\}.$$

Chứng minh ρ là tương đẳng trên $\mathbb{R}_+$. Với mọi $(x, y), (x', y') \in \rho, r \in \mathbb{R}_+$, khi đó chỉ xảy ra 2 trường hợp sau:

- + Trường hợp 1: $x = y = 0$. Khi đó $rx = ry = 0$. Suy ra $(rx, ry) \in \rho$.
- + Nếu $x' = y' = 0$. Khi đó $x + x' = y + y' = 0$. Suy ra $(x + x', y + y') \in \rho$.

- + Nếu $x', y' \neq 0$. Khi đó $x + x' \neq 0, y + y' \neq 0$. Suy ra $(x + x', y + y') \in \rho$.
- + Trường hợp 2: $x \neq 0$ và $y \neq 0$. Khi đó $x + x', y + y' \neq 0$. Suy ra $(x + x', y + y') \in \rho$.
- + Nếu $r = 0$. Khi đó $rx = ry = 0$. Suy ra $(rx, ry) \in \rho$.
- + Nếu $r \neq 0$. Khi đó $rx, ry \neq 0$. Suy ra $(rx, ry) \in \rho$.

Suy ra ρ là một tương đẳng trên $\mathbb{R}_+$. Vì $(1, 2) \in \rho$ nên ρ không là tương đẳng đường chéo và $(0, 1) \notin \rho$ nên ρ không là tương đẳng phổ dụng. Suy ra ρ là tương đẳng không tầm thường. Vậy $\mathbb{R}_+$ không đơn.

3. Lớp nửa vành J_s -nửa đơn

Mệnh đề 11.1 (Lam, 2001) đã phát biểu “Một vành R là nửa đơn nếu và chỉ nếu R có một môđun trái nửa đơn trung thành M .”

Trong phần này, chúng tôi cung cấp một đặc trưng cho lớp các nửa vành J_s -nửa đơn (Định lý 3.2). Đây là một kết quả mở rộng cho Mệnh đề 11.1 (Lam, 2001). Chúng tôi sử dụng kết quả thu được để nghiên cứu lớp các nửa vành J_s -nửa đơn.

Định nghĩa 3.1. Cho S là một nửa vành. Idêan

$$J_s(S) = \bigcap \{(0 : M) \mid M \in \mathfrak{S}\}$$

của S được gọi là J_s -căn của nửa vành S , trong đó $\mathfrak{S}$ là lớp tất cả các S -nửa môđun trái đơn. Quy ước nếu $\mathfrak{S} = \emptyset$ thì $J_s(S) = S$. Nếu $J_s(S) = \{0_S\}$ thì S được gọi là J_s -nửa đơn.

Định lý 3.2. Một nửa vành S là J_s -nửa đơn nếu và chỉ nếu S có một S -nửa môđun trái nửa đơn trung thành M .

Chứng minh. ($\Rightarrow$) Giả sử nửa vành S là J_s -nửa đơn. Gọi $\mathfrak{S}$ là lớp tất cả các S -nửa môđun trái đơn. Ký hiệu $M = \bigoplus_{N \in \mathfrak{S}} N$, suy ra M là một S -nửa môđun trái nửa đơn. Khi đó linh hóa tử của M

$$\begin{aligned} (0 : M) &= \{r \in S \mid rM = 0_M\} = \{r \in S \mid rN = 0_M, \forall N \in \mathfrak{S}\} \\ &= \bigcap \{(0 : N) \mid N \in \mathfrak{S}\} = J_s(S) = \{0_S\}. \end{aligned}$$

Vậy M là một S -nửa môđun trái nửa đơn trung thành.

($\Leftarrow$) Giả sử S là một nửa vành và S có một S -nửa môđun trái nửa đơn trung thành M . Vì M là một S -nửa môđun trái nửa đơn nên M là tổng trực tiếp của một họ $\{M_i\}_{i \in I}$ các S -nửa môđun trái đơn. Gọi $\mathfrak{S}$ là lớp tất cả các S -nửa môđun trái đơn. Khi đó $\{M_i\}_{i \in I} \subseteq \mathfrak{S}$, và do đó:

$$\bigcap \{(0 : N) \mid N \in \mathfrak{S}\} \subseteq \bigcap_{i \in I} (0 : M_i). \quad (1)$$

Mặt khác, lập luận tương tự trong chứng minh điều kiện cần, $\bigcap_{i \in I} (0 : M_i) = (0 : M)$. Hơn nữa, do tính trung thành của M nên

$$\bigcap_{i \in I} (0 : M_i) = (0 : M) = \{0_S\}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được $J_S(S) = \bigcap \{(0 : N) \mid N \in \mathfrak{I}\} \subseteq \bigcap_{i \in I} (0 : M_i) = (0 : M) = \{0_S\}$.

Vậy S là nửa vành J_S -nửa đơn. □

Nhận xét 3.3. Trong Mệnh đề 11.1 (Lam, 2001), Lam đã cung cấp một đặc trưng cho lớp các vành J -nửa đơn. Trong Định lý 3.2, chúng tôi đã mở rộng kết quả của Lam cho lớp các nửa vành J_S -nửa đơn. Tiếp theo, chúng tôi sử dụng kết quả mở rộng này để nghiên cứu một số tính chất khác của lớp các nửa vành J_S -nửa đơn.

Bổ đề 3.4. Cho S và R là các nửa vành, và $\pi : S \rightarrow R$ là một toàn cấu nửa vành. Khi đó, nếu M là R -nửa môđun trái nửa đơn thì M cũng là S -nửa môđun trái nửa đơn.

Chứng minh. Giả sử M là R -nửa môđun trái nửa đơn. Khi đó M là tổng trực tiếp của một họ $\{M_i\}_{i \in I}$ các R -nửa môđun trái đơn. Chúng ta sẽ chứng minh M_i cũng là S -nửa môđun trái đơn với mọi $i \in I$. Dễ dàng kiểm tra M_i là một S -nửa môđun trái với phép nhân vô hướng được xác định bởi: với mọi $s \in S$, $m \in M_i$

$$sm = \pi(s)m.$$

Do π là toàn cấu, suy ra $SM_i = \pi(S)M_i = RM_i$. Vì $RM_i \neq 0$ nên $SM_i \neq 0$. (1)

Giả sử N là một nửa môđun con khác không của S -nửa môđun trái M_i . Chúng ta sẽ chứng minh N cũng là nửa môđun con khác không của R -nửa môđun trái M_i . Thật vậy, với mọi $r \in R$, $n \in N$, do π là toàn cấu nên tồn tại $s \in S$ sao cho $\pi(s) = r$. Khi đó,

$$rn = \pi(s)n = sn \in N.$$

Suy ra N cũng là nửa môđun con khác không của R -nửa môđun trái M_i . Vì M_i là R -nửa môđun trái cực tiểu nên $N = M_i$. Vậy M_i cũng là S -nửa môđun trái cực tiểu. (2)

Giả sử ρ là một tương đẳng khác tương đẳng đường chéo của S -nửa môđun trái M_i . Chúng ta sẽ chứng minh ρ cũng là một tương đẳng khác tương đẳng đường chéo của R -nửa môđun trái M_i . Thật vậy, với mọi $r \in R$, $(x, y), (x', y') \in \rho$, hiển nhiên

$$(x + x', y + y') \in \rho,$$

Mặt khác, do π là toàn cấu, suy ra tồn tại $s \in S$ sao cho $\pi(s) = r$. Khi đó

$$(rx, ry) = (\pi(s)x, \pi(s)y) = (sx, sy) \in \rho.$$

Suy ra ρ là một tương đẳng khác tương đẳng đường chéo của R -nửa môđun trái M_i . Vì R -nửa môđun trái M_i chỉ có hai tương đẳng tầm thường nên $\rho = M_i^2$. Vậy trên S -nửa môđun trái M_i chỉ có hai tương đẳng tầm thường. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra M_i là một S -nửa môđun trái đơn. Khi đó M là tổng trực tiếp của họ $\{M_i\}_{i \in I}$ các S -nửa môđun trái đơn. Vậy M là S -nửa môđun trái nửa đơn. $\square$

Hệ quả 3.5. Cho S và R là các nửa vành, và $\pi: S \rightarrow R$ là một nửa đẳng cấu. Nếu R là J_S -nửa đơn thì S cũng là J_S -nửa đơn.

Chứng minh. Giả sử R là J_S -nửa đơn. Theo Định lý 3.2 thì R có một R -nửa môđun trái nửa đơn trung thành M . Theo Bổ đề 3.4 thì M cũng là một S -nửa môđun trái nửa đơn. Xét tập linh hóa tử của S -nửa môđun trái M

$$\begin{aligned} (0:M)_S &= \{s \in S \mid sM = 0_M\} = \{s \in S \mid \pi(s)M = 0_M\} \\ &= \{s \in S \mid \pi(s) = 0_R\} = \text{Ker}(\pi) = \{0_S\}. \end{aligned}$$

Vậy M là một S -nửa môđun trái nửa đơn trung thành. Theo Định lý 3.2, S là nửa vành J_S -nửa đơn. $\square$

Ví dụ 3.6. Nếu S là nửa vành nguyên phi khả đối thì S là J_S -nửa đơn.

Chứng minh. Theo Ví dụ 2.1 nửa trường Boolean $\mathbb{B}$ cũng là $\mathbb{B}$ -nửa môđun trái đơn trung thành, nên theo Định lý 3.2 thì $\mathbb{B}$ là J_S -nửa đơn.

Xét ánh xạ

$$\begin{aligned} \pi: S &\rightarrow \mathbb{B} \\ s &\mapsto \pi(s) = \begin{cases} 0 & \text{khi } s = 0_S, \\ 1 & \text{khi } s \neq 0_S. \end{cases} \end{aligned}$$

Trước tiên, chứng minh π là một đồng cấu nửa vành. Với mọi $s_1, s_2 \in S$ ta có các trường hợp sau:

+ Trường hợp 1: $s_1 = 0_S \Rightarrow \pi(s_1) = 0$. Khi đó, $\pi(s_1 + s_2) = \pi(s_2) = \pi(s_1) + \pi(s_2)$ và

$$\pi(s_1 s_2) = \pi(0_S) = 0 = \pi(s_1) \pi(s_2).$$

+ Trường hợp 2: $s_2 = 0_S$. Chứng minh tương tự trường hợp 1.

+ Trường hợp 3: $s_1, s_2 \neq 0_S \Rightarrow s_1 + s_2 \neq 0_S, s_1 s_2 \neq 0_S$.

Khi đó, $\pi(s_1 + s_2) = 1 = 1 + 1 = \pi(s_1) + \pi(s_2)$ và $\pi(s_1 s_2) = 1 = 1.1 = \pi(s_1) \pi(s_2)$.

Trong tất cả các trường hợp có thể, ta luôn có $\pi(s_1 + s_2) = \pi(s_1) + \pi(s_2)$ và

$$\pi(s_1 s_2) = \pi(s_1) \pi(s_2).$$

Do đó π là một đồng cấu nửa vành. (1)

Để dàng kiểm tra được π là một toàn cấu và có $\text{Ker}(\pi) = \{0_S\}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra π là một nửa đẳng cấu nửa vành. Theo Hệ quả 3.5, S là một nửa vành J_S -nửa đơn. $\square$

Nhận xét: Nửa vành các số tự nhiên $\mathbb{N}$ là nửa vành nguyên phi khả đối nên $\mathbb{N}$ là nửa vành J_S -nửa đơn.

Ví dụ 3.7. Hệ quả 4.16 trong (Lam, 2001) chỉ ra rằng trường là vành J -nửa đơn. Mở rộng kết quả trên, chúng tôi chứng tỏ rằng nửa trường là nửa vành J_S -nửa đơn.

Chứng minh. Giả sử F là một nửa trường thật sự.

Chứng minh F là nguyên: Với mọi $x, y \in F$ và $xy = 0_F$. Giả sử $x \neq 0_F$, khi đó

$$y = y \cdot 1 = (x^{-1}x)y = x^{-1}(xy) = x^{-1} \cdot 0_F = 0_F.$$

Chứng minh F là phi khả đối: Giả sử $x, y \in F$ và $x + y = 0_F$. Nếu $x \neq 0_F$ thì $\exists x^{-1} \in F$ sao cho $x^{-1}x = 1_F$. Khi đó $x^{-1}(x + y) = 0_F$, suy ra $1 + x^{-1}y = 0_F$. Với mọi $z \in F$, ta có $z(1 + x^{-1}y) = 0_F$, suy ra $z + zx^{-1}y = 0$. Do đó F là một nhóm với phép toán cộng (mâu thuẫn vì F là nửa trường thật sự). Vậy $x = 0_F$ suy ra $y = 0_F$. Do đó $x = y = 0_F$. Suy ra F là phi khả đối. (2)

Từ (1) và (2) suy ra F là nửa trường nguyên phi khả đối. Theo Ví dụ 3.6, F là nửa vành J_S -nửa đơn. $\square$

Ví dụ 3.8. Cho n là một số nguyên dương và $\mathbb{B}_{n+1}$ là một nửa dàn được xác định trên xích $0 < 1 < 2 < \dots < n$. Trên $\mathbb{B}_{n+1}$ được trang bị hai phép toán cộng là $a + b = a \vee b$ và nhân là $ab = 0$ nếu $a = 0$ hoặc $b = 0$ và $ab = a \wedge b$ nếu $a \neq 0$ và $b \neq 0$. Khi đó, $(\mathbb{B}_{n+1}, \vee, \wedge, 0, n)$ là một nửa vành J_S -nửa đơn.

Chứng minh. Để dàng kiểm tra $(\mathbb{B}_{n+1}, \vee, \wedge, 0, n)$ là một nửa vành có đơn vị, nguyên và phi khả đối với phần tử đơn vị là n .

Theo Ví dụ 3.6, F là nửa vành J_S -nửa đơn. $\square$

Ví dụ 3.9. Nửa vành con

$$S = \left(\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, +, \cdot, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

của nửa vành ma trận $\mathbb{M}_2(\mathbb{Z}_2)$ là nửa vành J_S -nửa đơn.

Chứng minh. Để dàng kiểm tra được $\mathbb{Z}_2$ là $\mathbb{Z}_2$ -nửa môđun trái đơn trung thành, nên theo Định lý 3.2 thì $\mathbb{Z}_2$ là J_S -nửa đơn. Theo Hệ quả 5.11 (Katsov, 2014) thì

$$J_s(S) = \begin{bmatrix} J_s(\mathbb{Z}_2) & J_s(\mathbb{Z}_2) \\ 0 & J_s(\mathbb{Z}_2) \end{bmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Vậy S là nửa vành J_s -nửa đơn. □

Tài liệu tham khảo

- Bourne, S. (1951). The Jacobson radical of a semiring. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 37, 163 – 170. <https://www.pnas.org/doi/10.1073/pnas.37.3.163>.
- Gardner, J., & Wiegandt, R. (2004). *Radical theory of rings*. Marcel Dekker, Inc., New York, Basel.
- Golan, J. (1999), *Semirings and their applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London.
- Iizuka, K. (1959). On the Jacobson radical of a semiring, *Tohoku Math. J.*, 11(2), 409 - 421. <https://projecteuclid.org/journals/tohoku-mathematical-journal/volume-11/issue-3>.
- Jacobson, N. (1945). The radical and semi-simplicity for arbitrary rings. *American Journal of Mathematics*, 67(2), 300–320. <https://doi.org/10.2307/2371731>.
- Katsov, Y., & Nam, T. G. (2014). On radicals of semirings and related problems. *Communications in Algebra*, 42(12), 5065–5099. <https://doi.org/10.1080/00927872.2013.833208>.
- Lam, T. Y. (2001). *A first course in noncommutative rings* (2nd ed.). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-8616-0>.
- Latorre, D. R. (1965). A note on the Jacobson radical of a hemiring. *Publ. Math. (Debrecen)*, 14, 9 - 13.
- Mai, L. H., & Tuyen, N. X. (2016). On J_s -semisimple left (right) V-semirings. *J. Adv. Math. Stud.*, 9(3), 437 - 443.
- Mai, L. H., & Tuyen, N. X. (2017). Some remarks on the Jacobson radical types of semirings and related problems. *Vietnam Journal of Mathematics*, 45(3), 493–506. <https://doi.org/10.1007/s10013-016-0226-7>.
- Vandiver, H. S. (1934). Note on a simple type of algebra in which the cancellation law of addition does not hold. *Bull. Am. Math. Soc.*, 40, 914-920. <https://www.ams.org/journals/bull/1934-40-12/S0002-9904-1934-06003-8/>.