



DOI: <https://doi.org/10.52714/dthu.ns.3138.2025>

VỀ ĐẠI SỐ ĐƯỜNG LEAVITT CỦA CÁC ĐỒ THỊ HOPF LIÊN KẾT VỚI NHÓM HỮU HẠN

Phạm Chí Hiếu¹, Trần Quốc Huy¹ và Ngô Tấn Phúc^{2*}

¹Sinh viên, Khoa Sư phạm Toán - Tin, Trường Sư phạm, Trường Đại học Đồng Tháp, Việt Nam

²Khoa Sư phạm Toán - Tin, Trường Sư phạm, Trường Đại học Đồng Tháp, Việt Nam

*Tác giả liên hệ, Email: ntphuc@dthu.edu.vn

Lịch sử bài báo

Ngày nhận: 03/02/2026; Ngày nhận chỉnh sửa: 07/5/2026; Ngày duyệt đăng: 22/5/2026

Tóm tắt

Trong bài viết này, chúng tôi khảo sát đồ thị Hopf liên kết với nhóm hữu hạn và đại số đường Leavitt liên kết với chúng. Chúng tôi chỉ ra rằng khi G là nhóm hữu hạn với hàm phân nhánh $\mathbf{r} = \sum_{C \in \mathcal{C}} \mathbf{r}_C C$ thì nửa nhóm S sinh bởi giá của hàm phân nhánh $\mathbf{r}$ là một nhóm con chuẩn tắc của G . Từ đó, chúng tôi thiết lập công thức phân tích đại số đường Leavitt $L_K(\Gamma_{G,\mathbf{r}})$ thành tổng trực tiếp của $|G|:|S|$ bản sao của $L_K(\Gamma_{S,\mathbf{r}})$. Hơn nữa, chúng tôi đưa ra điều kiện cần và đủ trên hàm phân nhánh $\mathbf{r}$ để $L_K(\Gamma_{S,\mathbf{r}})$ là vành đơn vô hạn thuần túy, cũng như đặc trưng các điều kiện để $L_K(\Gamma_{G,\mathbf{r}})$ là vành đơn, nửa đơn thông qua các tính chất của hàm phân nhánh $\mathbf{r}$ và nhóm con S .

Từ khóa: Đại số đường Leavitt, Đồ thị Hopf, Nhóm hữu hạn.

Trích dẫn: Phạm, C. H., Trần, Q. H., & Ngô, T. P. (2026). Về đại số đường Leavitt của các đồ thị Hopf liên kết với nhóm hữu hạn. *Tạp chí Khoa học Đại học Đồng Tháp, Online First*, 1-12. <https://doi.org/10.52714/dthu.ns.3138.2025>

Copyright © 2026 The author(s). This work is licensed under a CC BY-NC 4.0 License.

ON THE LEAVITT PATH ALGEBRA OF HOPF GRAPHS ASSOCIATED WITH FINITE GROUPS

Pham Chi Hieu¹, Tran Quoc Huy¹ and Ngo Tan Phuc^{2*}

¹*Student, Faculty of Mathematics - Informatics Teacher Education, School of Education,
Dong Thap University, Vietnam*

²*Faculty of Mathematics - Informatics Teacher Education, School of Education, Dong Thap
University, Vietnam*

**Corresponding author, Email: ntphuc@dtu.edu.vn*

Article history

Received: 03/02/2026; Received in revised form: 07/5/2026; Accepted: 22/5/2026

Abstract

This paper investigates the Hopf graphs associated with finite groups and their Leavitt path algebras. It shows that if G is a finite group and $\mathbf{r} = \sum_{C \in \mathcal{C}} \mathbf{r}_C C$ is a ramification data on G , then the semigroup S generated by the support of $\mathbf{r}$ is a normal subgroup of G . Based on this result, a decomposition result is established to describe the Leavitt path algebra $L_K(\Gamma_{G,\mathbf{r}})$ as a direct sum of $|G|:|S|$ copies of $L_K(\Gamma_{S,\mathbf{r}})$. Furthermore, necessary and sufficient conditions are given on the ramification data $\mathbf{r}$ for $L_K(\Gamma_{S,\mathbf{r}})$ to be a purely infinite simple ring, and characterize when $L_K(\Gamma_{G,\mathbf{r}})$ is a simple, semi - simple ring in terms of the properties of the ramification data $\mathbf{r}$ and the subgroup S .

Keywords: *Finite groups, Hopf graphs, Leavitt path algebra.*

1. Giới thiệu

Cho trước một đồ thị (có hướng) hữu hạn bậc ra E và một trường K , Abrams và Aranda Pino (2005), và một cách độc lập Ara & cs (2007) đã giới thiệu khái niệm đại số đường Leavitt $L_K(E)$. Abrams và Aranda Pino (2008) sau đó đã mở rộng định nghĩa cho các đồ thị đếm được. Đại số đường Leavitt là mở rộng của đại số Leavitt của (Leavitt, 1962) và đồng thời chứa nhiều lớp đại số thú vị khác như đại số ma trận, đại số đa thức Laurent, ... Trong suốt hai thập kỷ vừa qua, đại số đường Leavitt đã trở thành một chủ đề nghiên cứu sôi động của các nhà toán học thuộc nhiều lĩnh vực khác nhau. Bài báo (Abrams, 2015) đã tổng quan được lịch sử và một số khía cạnh nghiên cứu chủ yếu trong lĩnh vực này.

Một trong những xu hướng nghiên cứu hiện nay trong lĩnh vực đại số đường Leavitt là khảo sát các tính chất của đại số đường Leavitt liên kết với các lớp đồ thị đặc biệt có nguồn gốc từ lý thuyết nhóm. Abrams và Schoonmaker (2015) đã khảo sát đại số đường Leavitt của các đồ thị Cayley sinh bởi nhóm xyclic. Tiếp theo đó, Mohan (2021) đã xác định các đại số đơn trong lớp các đại số đường Leavitt liên kết với đồ thị Cayley có trọng số của một nhóm. Mở rộng hướng nghiên cứu này, năm 2023, Tran và Ngo (2023) đã nghiên cứu đại số đường Leavitt của đồ thị Hopf - một khái niệm được giới thiệu bởi Cibils và Rosso (2002). Cần lưu ý rằng đồ thị Hopf có nhiều nét tương đồng với đồ thị Cayley: cả hai đều có tập đỉnh là các phần tử của một nhóm và các cạnh tương ứng với phép nhân bởi các phần tử trong một tập con cho trước. Tran và Ngo (2023) đã mô tả cấu trúc của đồ thị Hopf $\Gamma_{G,r}$ liên kết với nhóm G (tùy ý) và hàm phân nhánh r , đồng thời đặc trưng các tính chất như chiều Gelfand - Kirillov, hạng ổn định, tính đơn vô hạn thuần túy và sự tồn tại biểu diễn hữu hạn chiều của đại số đường Leavitt $L_K(\Gamma_{S,r})$ thông qua các tính chất của r và G .

Được thúc đẩy bởi những kết quả trên, trong bài viết này chúng tôi tập trung khảo sát trường hợp đặc biệt nhưng quan trọng khi G là nhóm hữu hạn. Việc giới hạn vào nhóm hữu hạn không chỉ mang tính chất kỹ thuật mà còn có ý nghĩa sâu sắc: nhóm hữu hạn có cấu trúc đại số phong phú với nhiều định lý cổ điển (như định lý Lagrange), cho phép chúng tôi thiết lập các kết quả mạnh hơn và cụ thể hơn so với trường hợp tổng quát. Hơn nữa, nhóm hữu hạn xuất hiện tự nhiên trong nhiều bài toán của lý thuyết biểu diễn, tổ hợp đại số và vật lý toán.

Các kết quả chính trong bài báo có thể tóm tắt như sau. Thứ nhất, chúng tôi chứng minh rằng khi G là nhóm hữu hạn, nửa nhóm con S sinh bởi giá của hàm phân nhánh r thực chất là một nhóm con chuẩn tắc của G (Bổ đề 1). Từ đó, nhiều tính chất của đồ thị Hopf trong trường hợp hữu hạn được chỉ ra (Định lý 1). Thứ hai, dựa vào định lý Lagrange, chúng tôi thiết lập công thức phân tích đại số đường Leavitt thành tổng trực tiếp hữu hạn: $L_K(\Gamma_{G,r}) \cong L_K(\Gamma_{S,r})^{|G|/|S|}$ (Định lý 2). Công thức này cho phép rút gọn việc nghiên cứu $L_K(\Gamma_{G,r})$ về việc nghiên cứu $L_K(\Gamma_{S,r})$ với S là nhóm con nhỏ hơn. Thứ ba, chúng tôi đưa ra điều kiện cần và đủ hoàn toàn đơn giản trên hàm phân nhánh r để đại số $L_K(\Gamma_{S,r})$ là vành đơn vô hạn thuần túy, điều kiện đó chính là $\sum_{C \in \mathcal{C}} r_C |C| \geq 2$ (Định lý 4). Cuối cùng, chúng tôi phân loại hoàn toàn các trường hợp mà $L_K(\Gamma_{G,r})$ là vành nửa đơn, đơn hay đơn vô hạn thuần túy thông qua tính chất của hàm phân nhánh r và nhóm con S (Hệ quả 4).

2. Đại số đường Leavitt

Trong phần này chúng tôi nhắc lại một số khái niệm về đồ thị có hướng và đại số đường Leavitt.

Một đồ thị có hướng là một bộ $E = (E^0, E^1, s, r)$ bao gồm hai tập hợp E^0, E^1 và hai ánh xạ $r, s: E^1 \rightarrow E^0$. Các phần tử của E^0 được gọi là các *đỉnh* và các phần tử của E^1 được gọi là các *cạnh*. Đối với mỗi cạnh e trong E^1 , $s(e)$ được gọi là *điểm đầu* của e và $r(e)$ được gọi là

điểm cuối của e . Đồ thị E được gọi là *hữu hạn* nếu các tập E^0 và E^1 là các tập hữu hạn phần tử. Đồ thị E được gọi là *tâm thường* nếu E chỉ chứa một đỉnh và không có cạnh.

Một đường đi hữu hạn $p = e_1 \dots e_n$ trong một đồ thị E là một dãy các cạnh $e_1, \dots, e_n$ sao cho $r(e_i) = s(e_{i+1})$ với $i = 1, \dots, n-1$. Trong trường hợp này, ta nói rằng đường đi p bắt đầu tại đỉnh $s(p) := s(e_1)$ và kết thúc tại đỉnh $r(p) := r(e_n)$ và có độ dài $|p| := n$. Ta ký hiệu bởi p^0 tập các đỉnh của đường đi đó, nghĩa là $p^0 = \{s(e_i), r(e_i) \mid i = 1, \dots, n\}$.

Một đường đi hữu hạn p được gọi là *đóng* nếu $s(p) = r(p)$, trong trường hợp này p được gọi là *có đáy tại đỉnh $s(p)$* . Một cạnh f là một *lối ra* của đường đi $p = e_1 \dots e_n$ nếu tồn tại $1 \leq i \leq n$ sao cho $s(f) = s(e_i)$ nhưng $f \neq e_i$ với mọi $i = 1, \dots, n$. Đường đi đóng p được gọi là một *chu trình* nếu p không đi qua bất kỳ đỉnh nào của nó hai lần. Với một chu trình c trong E . Ta gọi chu trình c là *chu trình đơn* nếu $|r^{-1}(v)| = |s^{-1}(v)| = 1$ với mọi $v \in c^0$.

Với các đỉnh $v, w \in E^0$, ta viết $v \geq w$ nếu tồn tại một đường đi trong E từ v đến w , nghĩa là, tồn tại một đường đi hữu hạn p với $s(p) = v$ và $r(p) = w$.

Trong đồ thị E , một đỉnh v được gọi là *đỉnh chìm* (hoặc *đỉnh ngọn*) nếu như $s^{-1}(v) = \emptyset$, đỉnh v được gọi là *đỉnh nguồn* (hoặc *đỉnh gốc*) nếu như $r^{-1}(v) = \emptyset$; v là *đỉnh cô lập* nếu nó vừa là đỉnh chìm vừa là đỉnh nguồn; v được gọi là *đỉnh chính quy* nếu $0 < |s^{-1}(v)| < \infty$.

Cho E là một đồ thị và H là một tập con của E^0 . Ta nói rằng H là *di truyền* nếu với mọi $v \in H$ và $w \in E^0$, $v \geq w$ kéo theo $w \in H$. Ta nói rằng H là *bảo hoà* nếu với mỗi đỉnh chính quy $v \in E^0$, $\{r(e) \mid e \in s^{-1}(v)\} \subseteq H$ kéo theo $v \in H$.

Một đồ thị E được gọi là *liên thông mạnh* nếu với mọi cặp đỉnh cho trước $(u, v) \in E^0 \times E^0$ tồn tại một đường đi h trong E sao cho $s(h) = u$ và $r(h) = v$.

Cho một đồ thị có hướng $E = (E^0, E^1, s, r)$ và một trường bất kì K , *đại số đường Leavitt* $L_K(E)$ của đồ thị E với hệ tử trên K là một K -đại số sinh bởi tập E^0 và E^1 , cùng với tập cạnh ảo $\{e^* \mid e \in E^1\}$, thỏa mãn các điều kiện sau với mọi $v, w \in E^0$ và $e, f \in E^1$:

- (1) $vw = \delta_{v,w}w$, (δ là ký hiệu Kronecker);
- (2) $s(e)e = e = er(e)$ và $r(e)e^* = e^* = e^*s(e)$;
- (3) $e^*f = \delta_{e,f}r(e)$;
- (4) $v = \sum_{e \in s^{-1}(v)} e e^*$ với mọi đỉnh chính quy v .

3. Kết quả chính

Trong phần này, chúng tôi chứng minh một số tính chất của đồ thị Hopf trong trường hợp hữu hạn khảo sát đại số đường Leavitt liên kết với chúng.

Trước tiên, chúng tôi nhắc lại một số khái niệm liên quan đến đồ thị Hopf đã được giới thiệu trong Definition 3.1 (Cibils & Rosso, 2002).

Cho G là một nhóm nhân và $x, y \in G$. Ta nói x *liên kết* với y nếu tồn tại $z \in G$ sao cho $x = zyz^{-1}$. Rõ ràng quan hệ liên kết là một quan hệ tương đương và ta ký hiệu $\mathcal{C}$ là tập hợp tất cả các lớp liên kết của G . Chúng ta gọi một *hàm phân nhánh* của G là ánh xạ $r: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{N}$, còn có thể viết thành $r = \sum_{C \in \mathcal{C}} r_C C$. Giá của r là tập hợp

$$\text{supp}(r) = \{C \in \mathcal{C} \mid r_C > 0\}.$$

Ta ký hiệu S là nửa nhóm con của G sinh bởi tập $\bigcup_{C \in \text{supp}(r)} C$ và $d = \sum_{C \in \text{supp}(r)} r_C |C|$, Lưu ý rằng khi G hữu hạn thì S là tập hữu hạn và d cũng là một số hữu hạn.

Ví dụ 1. Cho $G = S_3$ là nhóm đối xứng cấp 3 và viết

$$G = \{id, (12), (13), (23), (123), (132)\}.$$

Khi đó, $\mathcal{C} = \{C_1 := [id], C_2 := [(12)], C_3 := [(123)]\}$, trong đó

$$C_1 = \{id\}, C_2 = \{(12), (13), (23)\}, C_3 = \{(123), (132)\}.$$

Xét hàm phân nhánh là $r = [(132)] + [id]$. Khi đó $d = 3$ và S là nửa nhóm con của S_3 sinh bởi tập $\{(132), (123), id\}$. Tính toán trực tiếp ta được:

$$(123)(132) = (132)(123) = id, (123)id = (132)(132) = (123),$$

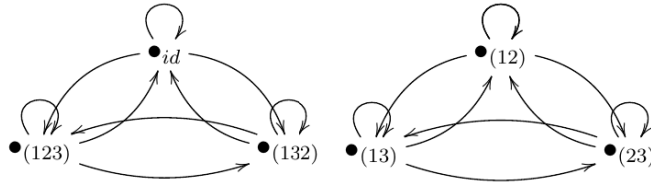
$$(132)id = (123)(123) = (132).$$

Do đó $S = \{(132), (123), id\}$. $\square$

Định nghĩa 1. (Cibils & Rosso, 2002, Definition 3.1) Cho G là một nhóm với hàm phân nhánh $r = \sum_{C \in \mathcal{C}} r_C C$, đồ thị Hopf liên kết với cặp (G, r) , ký hiệu bởi $\Gamma_{G,r}$, có tập đỉnh $\Gamma_{G,r}^0 = G$ và có r_C cạnh từ x đến xc với mỗi $x \in G$ và $c \in \mathcal{C}$.

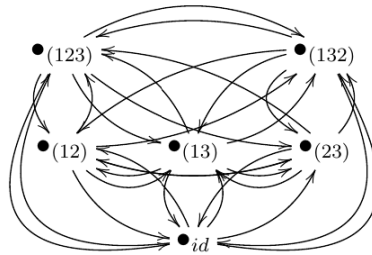
Ví dụ 2. Cho $G = S_3$ là nhóm đối xứng cấp 3 và với cách gọi tên các phần tử như trong Ví dụ 1.

(1) Xét hàm phân nhánh là $r = [(132)] + [id]$. Khi đó $\Gamma_{G,r}$ là đồ thị sau đây:



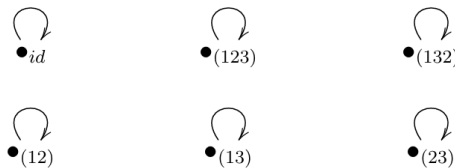
Hình 1. Ví dụ 2 (1)

(2) Xét hàm phân nhánh $r = [(12)] + [(123)]$. Khi đó $\Gamma_{G,r}$ là đồ thị sau đây:



Hình 2. Ví dụ 2 (2)

(3) Xét hàm phân nhánh $r = [id]$. Khi đó có $\Gamma_{G,r}$ là đồ thị sau đây:



Hình 3. Ví dụ 2 (3)

Trong trường hợp tổng quát, một số tính chất của đồ thị Hopf cũng như đại số đường Leavitt liên kết với chúng đã được nghiên cứu trong (Tran & Ngo, 2023). Để khảo sát cho trường hợp G hữu hạn, chúng ta bắt đầu từ kết quả then chốt sau đây.

Bổ đề 1. Cho G là một nhóm hữu hạn với hàm phân nhánh $r = \sum_{C \in \mathcal{C}} r_C C$. Khi đó, S là một nhóm con chuẩn tắc của G .

Chứng minh. Lấy một phần tử bất kỳ $x \in G$. Vì G hữu hạn nên dãy $\{x, x^2, \dots\}$ phải dừng. Tức là, tồn tại số nguyên dương n sao cho $x^n = x$. Ta xét các khả năng sau.

Trường hợp 1. $n = 2$. Khi đó $x^2 = x$. Áp dụng luật giản ước trên G ta được $x = 1_G$. Vậy, S chứa đơn vị và x khả nghịch.

Trường hợp 2. $n > 2$. Áp dụng luật giản ước trên G cho $xx^{n-1} = x^n = x$ ta được $x^{n-1} = 1_G$ và $x^{-1} = x^{n-2}$. Vậy S chứa đơn vị và x khả nghịch.

Từ các lập luận trên, ta thu được S là một nhóm. Tiếp theo, ta kiểm tra điều kiện chuẩn tắc trên nhóm S . Với mọi $g \in G$ và $h \in S$. Theo định nghĩa của nửa nhóm S , ta có thể viết $h = c_1 c_2 \dots c_n$ trong đó $c_i \in \bigcup_{C \in \text{supp}(r)} C$. Ta có

$$\begin{aligned} ghg^{-1} &= gc_1 c_2 \dots c_n g^{-1} \\ &= gc_1 g^{-1} g c_2 g^{-1} \dots g c_n g^{-1} \\ &= (gc_1 g^{-1})(gc_2 g^{-1}) \dots (gc_n g^{-1}) \end{aligned}$$

Theo định nghĩa quan hệ liên kết ta có $gc_i g^{-1} \sim c_i, \forall i = 1, \dots, n$. Suy ra $gc_i g^{-1} \in \bigcup_{C \in \text{supp}(r)} C$.

Vì thế $ghg^{-1} \in S$. Vậy S là nhóm con chuẩn tắc của G . $\square$

Tiếp theo, chúng ta nhắc lại theo (Tran & Ngo, 2023) một số đồ thị con trong đồ thị Hopf $\Gamma_{G,r}$ sinh ra bởi tập S .

Ký hiệu $\Delta_{G,r}$ là đồ thị con của $\Gamma_{G,r}$ sau đây: Nếu $r = 0$, thì $\Delta_{G,r}$ là đồ thị tầm thường, ngược lại

$$\Delta_{G,r} = \left(\Delta_{G,r}^0, \Delta_{G,r}^1, r|_{\Delta_{G,r}^1}, s|_{\Delta_{G,r}^1} \right)$$

trong đó $\Delta_{G,r}^0 := \langle S \rangle$ và $\Delta_{G,r}^1 := r^{-1}(\Delta_{G,r}^0)$.

Ký hiệu $\Lambda_{G,r}$ là đồ thị con của $\Gamma_{G,r}$ sau đây: Nếu S không phải là vị nhóm con của G , thì $\Lambda_{G,r}$ là đồ thị tầm thường, ngược lại

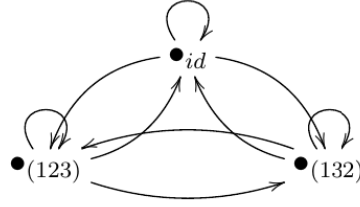
$$\Lambda_{G,r} = \left(\Lambda_{G,r}^0, \Lambda_{G,r}^1, r|_{\Lambda_{G,r}^1}, s|_{\Lambda_{G,r}^1} \right)$$

trong đó $\Lambda_{G,r}^0 := G(S)$ là nhóm con lớn nhất của G chứa trong S và

$$\Lambda_{G,r}^1 := r^{-1}(\Lambda_{G,r}^0) \cap s^{-1}(\Lambda_{G,r}^0).$$

Các tính chất của dãy đồ thị $\Gamma_{G,r}, \Delta_{G,r}$ và $\Lambda_{G,r}$ đã được mô tả tường minh trong Theorem 2.10 (Tran & Ngo, 2023) và theo thứ tự đó, chúng có quan hệ bao hàm thực sự. Tuy nhiên, trong phần sau, chúng ta sẽ chỉ ra chúng trùng nhau trong một vài trường hợp riêng.

Ví dụ 3. (1) Xét đồ thị Hopf $\Gamma_{G,r}$ trong Ví dụ 2 (1). Khi đó ta có $\Lambda_{G,r} = \Delta_{G,r}$ là đồ thị sau đây:



Hình 4. Ví dụ 3 (1)

(2) Xét đồ thị Hopf $\Gamma_{G,r}$ trong Ví dụ 2 (2). Khi đó ta có $\Lambda_{G,r} = \Delta_{G,r} = \Gamma_{G,r}$. $\square$

Bổ đề 2. Cho G là một nhóm hữu hạn với hàm phân nhánh $r = \sum_{C \in \mathcal{C}} r_C C$. Khi đó, $\Delta_{G,r}^0 = \Lambda_{G,r}^0 = S$.

Chứng minh. Vì G hữu hạn nên theo Bổ đề 1 ta có S là một nhóm. Theo định nghĩa của $\Delta_{G,r}^0$ ta thu được $\Delta_{G,r}^0 = S$.

Ta lại có $\Lambda_{G,r}^0$ là nhóm con lớn nhất của G chứa trong S . Do đó $\Lambda_{G,r}^0 = S$.

Vậy nếu G là nhóm hữu hạn thì $\Delta_{G,r}^0 = \Lambda_{G,r}^0 = S$. $\square$

Hệ quả 1. Cho G là một nhóm hữu hạn với hàm phân nhánh $r = \sum_{C \in \mathcal{C}} r_C C$. Khi đó, $\Delta_{G,r} = \Lambda_{G,r} = \Gamma_{S,r}$.

Chứng minh. Theo Bổ đề 2 ta có $\Delta_{G,r}^0 = \Lambda_{G,r}^0 = S$. Như vậy, các đồ thị $\Delta_{G,r}, \Lambda_{G,r}, \Gamma_{S,r}$ có cùng tập đỉnh. Thêm nữa, các cạnh trong $\Delta_{G,r}, \Lambda_{G,r}, \Gamma_{S,r}$ chính là các cạnh trong $\Gamma_{G,r}$ hạn chế lên tập hợp tương ứng. Do đó chúng trùng nhau và chính là đồ thị Hopf tương ứng với nhóm S với cùng một hàm phân nhánh r . $\square$

Ví dụ 4. (1) Xét tập đỉnh của $\Lambda_{G,r}$ và $\Delta_{G,r}$ trong Ví dụ 3 (1) ta có

$$\Delta_{G,r}^0 = \Lambda_{G,r}^0 = S = \{id, (123), (132)\}.$$

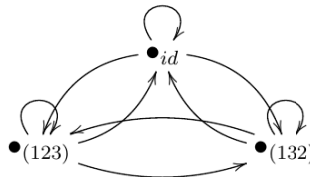
(2) Xét tập đỉnh của $\Lambda_{G,r}$ và $\Delta_{G,r}$ trong Ví dụ 3 (2) ta có

$$\Delta_{G,r}^0 = \Lambda_{G,r}^0 = S = S_3. \quad \square$$

Hệ quả 2. Cho G là một nhóm hữu hạn với hàm phân nhánh $r = \sum_{C \in \mathcal{C}} r_C C$. Khi đó, $\Gamma_{S,r}$ là một thành phần liên thông mạnh của $\Gamma_{G,r}$.

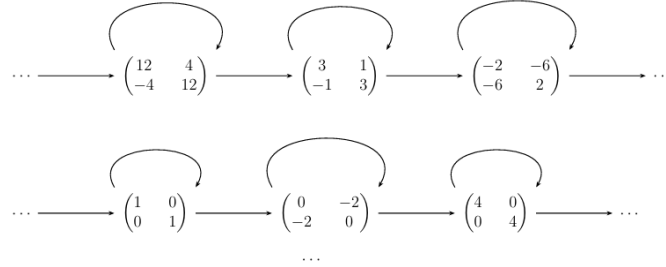
Chứng minh. Áp dụng Theorem 2.10 (Tran & Ngo, 2023) và Bổ đề 2 ta được $\Delta_{G,r} = \Lambda_{G,r} = \Gamma_{S,r}$ là một thành phần liên thông mạnh của $\Gamma_{G,r}$. $\square$

Ví dụ 5. (1) Xét đồ thị Hopf $\Gamma_{G,r}$ trong Ví dụ 2 (1). Khi đó ta có $\Delta_{G,r} = \Lambda_{G,r} = \Gamma_{S,r}$ là đồ thị con liên thông mạnh của $\Gamma_{G,r}$ như sau:



Hình 5. Ví dụ 5 (1)

(2) Xét tập hợp ma trận $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0 \right\}$. Dễ thấy $(H, \cdot)$ là một nhóm giao hoán. Do nhóm giao hoán nên mỗi lớp liên kết là một phần tử trong H . Xét hàm phân nhánh $r = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] + \left[\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \right]$. Khi đó, đồ thị $\Gamma_{H,r}$ có dạng như sau:



Hình 6. Ví dụ 5 (2)

Trong trường hợp này, $\Delta_{H,r}$ không là liên thông mạnh. $\square$

Định lí sau đây mô tả các tính chất của đồ thị Hopf trong trường hợp hữu hạn.

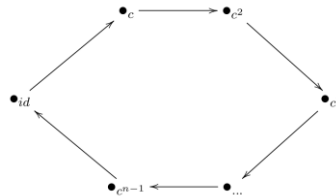
Định lí 1. Cho G là một nhóm hữu hạn với hàm phân nhánh $r = \sum_{c \in C} r_c C$. Khi đó, đồ thị Hopf $\Gamma_{G,r}$ có các tính chất sau:

- (1) Bậc ra và bậc vào tại mỗi đỉnh của $\Gamma_{G,r}$ đều bằng d ;
- (2) Nếu $r = 0$ thì $\Gamma_{G,r}$ là hợp rời của $|G|$ điểm cô lập;
- (3) Nếu $r \neq 0$ thì mỗi đỉnh của $\Gamma_{G,r}$ là đáy của d chu trình;
- (4) Nếu $d = 1$ thì $\Gamma_{G,r}$ là hợp rời của $|G|:|S|$ chu trình đơn.

Chứng minh. (1) Theo Proposition 2.6 (1) (Tran & Ngo, 2023) ta có bậc ra và bậc vào tại mỗi đỉnh của $\Gamma_{G,r}$ bằng nhau. Vì G hữu hạn nên bậc ra và vào là hữu hạn. Theo định nghĩa của $\Gamma_{G,r}$ ta có r_c cạnh từ x đến xc với mỗi $x \in G$ và $c \in C$, do đó bậc ra và bậc vào tại mỗi đỉnh của $\Gamma_{G,r}$ bằng nhau và bằng $\sum_{c \in \text{supp}(r)} r_c |C| = d$.

(2) và (3) được suy ra từ Proposition 2.6 (4, 7) (Tran & Ngo, 2023).

(4) Giả sử rằng $d = \sum_{c \in \text{supp}(r)} r_c |C| = 1$. Khi đó, hàm phân nhánh r có dạng $r = 1c$ với c là một phần tử nào đó của G . Vì G là nhóm hữu hạn nên tồn tại số nguyên dương n sao cho $c^n = 1_G$. Vì thế, $S = \langle c \rangle$ là một nhóm con cyclic của G sinh bởi c . Suy ra $\Delta_{G,r} = \Lambda_{G,r} = \Gamma_{S,r}$ là một chu trình đơn gồm n đỉnh và n cạnh như sau:



Hình 8. Định lí 1 (4)

Khi đó, theo Theorem 2.10 (1) (Tran & Ngo, 2023) ta có $\Gamma_{G,r}$ là hợp rời của $|G|:|S|$ chu trình đơn như trên. $\square$

Trong trường hợp G là nhóm xyclic, ta có mô tả sau đây về đồ thị Hopf của G . Lưu ý, nếu G là nhóm xyclic thì G có tính giao hoán. Khi đó, quan hệ liên kết trở thành quan hệ bằng nhau thông thường giữa các phần tử trong nhóm.

Hệ quả 3. Cho G là một nhóm xyclic sinh bởi phần tử a cấp bằng n và $r = \sum_{i=0}^{n-1} r_i a^i$ là hàm phân nhánh và $d = \sum_{i=0}^{n-1} r_i$. Khi đó, đồ thị Hopf $\Gamma_{G,r}$ có các tính chất sau:

- (1) Bậc ra và bậc vào tại mỗi đỉnh của $\Gamma_{G,r}$ đều bằng d ;
- (2) Nếu $r = 0$ thì đồ thị Hopf $\Gamma_{G,r}$ là hợp rời của n đỉnh cô lập;
- (3) Nếu $r \neq 0$ thì mỗi đỉnh của $\Gamma_{G,r}$ là đáy của d chu trình;
- (4) Nếu hàm phân nhánh có dạng $r = a^i$ thì $\Gamma_{G,r}$ là hợp rời của $\gcd(n, i)$ chu trình đơn, trong đó $\gcd(n, i)$ là ước chung lớn nhất của n và i .

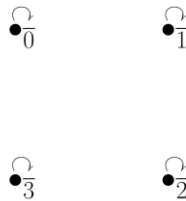
Chứng minh. (1) Vì G là nhóm giao hoán nên mỗi lớp C_i có đúng một phần tử là a^i . Theo Định lí 1 (1) ta có bậc ra và bậc vào tại mỗi điểm của $\Gamma_{G,r}$ bằng nhau và bằng một số hữu hạn là

$$\sum_{C \in \text{supp}(r)} r_C |C| = \sum_{i=0}^{n-1} r_i = d.$$

- (2) Theo Định lí 1 (2) nếu $r = 0$ thì $\Gamma_{G,r}$ là hợp rời của $|G| = n$ điểm cô lập.
- (3) Suy ra trực tiếp từ Định lí 1 (3).
- (4) Ta có $|G| = n$ và $|S|$ chính là cấp của phần tử a^i . Kết quả từ lý thuyết nhóm cho ta biết cấp của a^i đúng bằng $n/\gcd(n, i)$. Áp dụng Định lí 1 (4) suy ra $\Gamma_{G,r}$ là hợp rời của $\gcd(n, i)$ chu trình đơn. $\square$

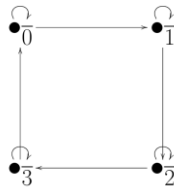
Ví dụ 6. Cho $(G, \cdot) = (\mathbb{Z}_4, +)$ khi đó:

- (1) Với hàm phân nhánh $r = \bar{0}$ ta có đồ thị Hopf $\Gamma_{G,r}$ tương ứng là



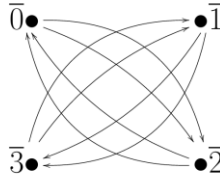
Hình 9. Ví dụ 6 (1)

- (2) Với hàm phân nhánh $r = \bar{0} + \bar{1}$ ta có đồ thị Hopf $\Gamma_{G,r}$ tương ứng là



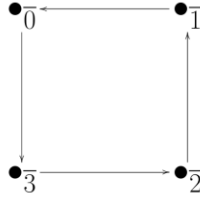
Hình 10. Ví dụ 6 (2)

- (3) Với hàm phân nhánh $r = 2 \cdot \bar{2}$ ta có đồ thị Hopf $\Gamma_{G,r}$ tương ứng là



Hình 11. Ví dụ 6 (3)

(4) Với hàm phân nhánh $r = \bar{3}$ ta có đồ thị Hopf $\Gamma_{G,r}$ tương ứng là



Hình 12. Ví dụ 6 (4) □

Dựa vào định lý Lagrange cho nhóm thương G/S , chúng tôi thiết lập công thức phân tích đại số đường Leavitt thành tổng trực tiếp hữu hạn như sau.

Định lý 2. Cho G là một nhóm hữu hạn với hàm phân nhánh $r = \sum_{C \in \mathcal{C}} r_C C$ và K là một trường tùy ý. Khi đó, ta có

$$L_K(\Gamma_{G,r}) \cong L_K(\Gamma_{S,r})^{|G|:|S|}.$$

Chứng minh. Theo Theorem 2.10 (5) (Tran & Ngo, 2023) ta có

$$L_K(\Gamma_{G,r}) \cong L_K(\Delta_{G,r})^{(G/S)}.$$

Vì G là nhóm hữu hạn nên ta có $L_K(\Gamma_{G,r}) \cong L_K(\Delta_{G,r})^{|G/S|}$. Áp dụng Định lý Lagrange cho nhóm thương G/S ta được $|G/S| = |G|:|S|$ và theo Hệ quả 1 ta được

$$L_K(\Gamma_{G,r}) \cong L_K(\Gamma_{S,r})^{|G|:|S|}. \quad \square$$

Kết quả trên cho phép chúng ta quy việc nghiên cứu $L_K(\Gamma_{G,r})$ về việc nghiên cứu $L_K(\Gamma_{S,r})$ với S là nhóm con của G .

Ví dụ 7. Xét đồ thị Hopf trong Ví dụ 2 (1), ta có $|G| = 6, |S| = 3$. Áp dụng Định lý 2, ta được $L_K(\Gamma_{G,r}) = L_K(\Gamma_{S,r})^2$. □

Trong phần còn lại của bài viết, chúng tôi khảo sát vấn đề đơn vô hạn thuần túy của các đại số đường Leavitt liên kết với các đồ thị Hopf hữu hạn. Một phần tử lũy đẳng e trong vành R được gọi là vô hạn nếu eR đẳng cấu như các R - môđun với một hạng tử trực tiếp thực sự của nó. Một vành đơn R được gọi là vô hạn thuần túy nếu như mọi ideal phải của R đều chứa một lũy đẳng vô hạn. Trong (Abrams & Aranda Pino, 2006) và (Abrams & Aranda Pino, 2008) Abrams và Aranda Pino cung cấp một tiêu chuẩn trên các đồ thị hữu hạn bậc ra để đại số đường Leavitt của chúng là đơn vô hạn thuần túy. Kết quả này đã được mở rộng cho các đồ thị bất kỳ theo Theorem 3.1.10 (Abrams & cs, 2017).

Tiếp theo chúng tôi đưa ra điều kiện cần và đủ trên hàm phân nhánh r để đại số $L_K(\Gamma_{S,r})$ là vành đơn vô hạn thuần túy. Lưu ý rằng $K[x, x^{-1}]$ ký hiệu cho Đại số đa thức

Laurent trên trường K và $M_d(K)$ là Đại số các ma trận vuông cấp d trên K .

Định lí 3. Cho G là một nhóm hữu hạn với hàm phân nhánh $r = \sum_{C \in \mathcal{C}} r_C C$ sao cho S khác tầm thường. Khi đó, $L_K(\Gamma_{S,r})$ là một vành đơn vô hạn thuần túy khi và chỉ khi $d \geq 2$.

Chứng minh. ($\Rightarrow$) Giả sử rằng $L_K(\Gamma_{S,r})$ là đơn vô hạn thuần túy. Ta xét hai trường hợp.

Trường hợp 1: $d = 0$. Theo Corollary 2.12 (1) (Tran & Ngo, 2023) ta được

$$L_K(\Gamma_{S,r}) = K^{|S|}.$$

Do S khác tầm thường nên $|S| \geq 2$. Vì thế, $L_K(\Gamma_{S,r})$ không là đơn vô hạn thuần túy. Ta gặp một mâu thuẫn.

Trường hợp 2: $d = 1$. Vì S là một vị nhóm con của G nên theo Corollary 2.12 (2) trong (Tran & Ngo, 2023) ta được

$$L_K(\Gamma_{G,r}) = M_{|S|}(K[x, x^{-1}])^{(G/S)}.$$

Vì thế, $L_K(\Gamma_{S,r})$ có nhiều hơn một ideal do đó $L_K(\Gamma_{S,r})$ không là đơn vô hạn thuần túy. Ta gặp một mâu thuẫn.

Từ các mâu thuẫn trên, suy ra $d \geq 2$.

($\Leftarrow$) Giả sử $d \geq 2$. Theo Hệ quả 1, $\Delta_{G,r} = \Lambda_{G,r} = \Gamma_{S,r}$ là một thành phần liên thông mạnh của $\Gamma_{G,r}$. Áp dụng Lemma 2.9.6 trong (Abrams & cs, 2017) ta thấy tập con di truyền và bảo hoà của $\Gamma_{S,r}$ chỉ là $\emptyset$ và $\Gamma_{S,r}$. Theo Định lí 1 ta được $\Gamma_{S,r}$ là đồ thị có chu trình. Vì $d \geq 2$ nên mọi chu trình trong $\Gamma_{S,r}$ đều có lỗi ra. Khi đó, theo Theorem 3.1.10 (Abrams & cs, 2017) ta có $L_K(\Gamma_{S,r})$ là đơn vô hạn thuần túy. $\square$

Ví dụ 8. (1) Xét đồ thị Hopf $\Gamma_{G,r}$ trong Ví dụ 2 (1). Khi đó ta có $L_K(\Gamma_{S,r})$ là một vành đơn vô hạn thuần túy.

(2) Xét đồ thị Hopf $\Gamma_{G,r}$ trong Ví dụ 5 (2). Khi đó ta có $L_K(\Gamma_{S,r})$ không là một vành đơn vô hạn thuần túy.

Cuối cùng, chúng tôi phân loại hoàn toàn các trường hợp mà $L_K(\Gamma_{G,r})$ là vành nửa đơn, đơn hay đơn vô hạn thuần túy thông qua tính chất của hàm phân nhánh r và nhóm con S .

Hệ quả 4. Cho G là một nhóm hữu hạn khác tầm thường với hàm phân nhánh $r = \sum_{C \in \mathcal{C}} r_C C$. Khi đó, ta có các khẳng định sau:

(1) Nếu $d = 0$ hoặc $d = 1$ và $S \neq G$ thì $L_K(\Gamma_{S,r})$ là vành nửa đơn;

(2) Nếu $d = 1$ và $S = G$ thì $L_K(\Gamma_{G,r})$ là vành đơn;

(3) Nếu $d \geq 2$ và $S = G$ thì $L_K(\Gamma_{S,r})$ là vành đơn vô hạn thuần túy.

Chứng minh. (1) Nếu $d = 0$ thì $\Gamma_{G,r}$ là hợp rời của các đỉnh cô lập và

$$L_K(\Gamma_{G,r}) = K^{|G|}$$

là tổng trực tiếp hữu hạn của các trường K . Do đó, $L_K(\Gamma_{G,r})$ là nửa đơn.

Nếu $d = 1$ và $S \neq G$ thì theo Định lí 1, $\Gamma_{G,r}$ là hợp rời của $|G|:|S|$ chu trình đơn và theo Định lí 2, ta lại có

$$L_K(\Gamma_{G,r}) = M_{|S|}(K[x, x^{-1}])^{|G|:|S|}$$

Do đó, $L_K(\Gamma_{G,x})$ là nửa đơn.

(2) Nếu $d = 1$ và $S = G$ thì theo Định lí 1, $\Gamma_{G,x}$ chỉ gồm một chu trình đơn và theo Định lí 2, ta lại có

$$L_K(\Gamma_{G,x}) = M_{|G|}(K[x, x^{-1}]).$$

Do đó, $L_K(\Gamma_{G,x})$ là vành đơn.

(3) Nếu $d \geq 2$ và $S = G$ thì theo Định lí 2, $L_K(\Gamma_{G,x}) \cong L_K(\Gamma_{S,x})$. Mặt khác, theo Định lí 4, $L_K(\Gamma_{S,x})$ là một vành đơn vô hạn thuần túy. $\square$

4. Kết luận

Trong bài báo này, chúng tôi đã thiết lập được một số kết quả mới về tính chất của các đồ thị Hopf hữu hạn và đại số đường Leavitt liên kết với chúng. Điểm mấu chốt của nghiên cứu là việc chứng minh nửa nhóm S sinh bởi giá của hàm phân nhánh thực chất là một nhóm con chuẩn tắc của G khi G hữu hạn. Từ đó, chúng tôi áp dụng định lí Lagrange để thiết lập công thức phân tích đại số đường Leavitt của đồ thị Hopf thành tổng trực tiếp hữu hạn của các thành phần “dễ khảo sát hơn”, đồng thời đặc trưng hoàn toàn tính đơn vô hạn thuần túy, tính đơn và tính nửa đơn của các đại số này.

Lời cảm ơn: Nghiên cứu này được hỗ trợ bởi Trường Đại học Đồng Tháp với Đề tài nghiên cứu khoa học của sinh viên mã số SPD2024.02.41.

Tài liệu tham khảo

- Abrams, G. (2015). Leavitt path algebras: the first decade. *Bulletin of Mathematical Sciences*, 5, 59-120. <https://doi.org/10.1007/s13373-014-0061-7>
- Abrams, G., Ara, P., & Siles Molina, M. (2017). *Leavitt path algebras*. Lecture Notes in Mathematics series, Springer-Verlag Inc. <https://doi.org/10.1007/978-1-4471-7344-1>
- Abrams, G., & Aranda Pino, G. (2005). The Leavitt path algebra of a graph. *Journal of Algebra*, 293, 319-334. <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2005.07.028>
- Abrams, G., & Aranda Pino, G. (2006). Purely infinite simple Leavitt path algebras. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 207(3), 553-563. <https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2005.10.010>
- Abrams, G., & Aranda Pino, G. (2008). The Leavitt path algebras of arbitrary graphs. *Houston Journal of Math*, 34(2), 423-442. <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2011.02.034>
- Abrams, G., Tran, G. N., & Ngo, T. P. (2017). Leavitt path algebras having Unbounded Generating Number. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 221, 1322-1343. <https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2016.09.014>
- Abrams, G., & Schoonmaker, B. (2015). Leavitt path algebras of Cayley graphs arising from cyclic groups. *Noncommutative rings and their applications*, 634, 1-10.
- Ara, P., Moreno, A., & Pardo, E. (2007). Nonstable K-theory for graph algebras. *Algebras and Representation Theory*, 10, 157-178. <https://doi.org/10.1007/s10468-006-9044-z>
- Cibils, C., & Rosso, M. (2002). Hopf quivers. *Journal of Algebra*, 254, 241-251. [https://doi.org/10.1016/S0021-8693\(02\)00080-7](https://doi.org/10.1016/S0021-8693(02)00080-7)
- Leavitt, W. G. (1962). The module type of a ring. *Transactions of the American Mathematical Society*, 42, 113-130. <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1962-0132764-X>
- Mohan, R. (2021). Leavitt path algebras of weighted Cayley graphs $C_{n(S,W)}$. *Proceedings-Mathematical Sciences*, 131, 1-25. <https://doi.org/10.1007/s12044-021-00610-1>
- Tran, G. N., & Ngo, T. P. (2023). On Leavitt path algebras of Hopf graphs. *Acta Mathematica Vietnamica*, 48, 533-549. <https://doi.org/10.1007/s40306-023-00511-7>

