SỬ DỤNG DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG ĐỂ MINH HỌA TRỰC QUAN CHO CÁC TÍNH CHẤT SỐ HỌC

• Lê Thị Bạch Liên(*), Lê Văn Cường(**)

Tóm tắt

Tạo ra những hình ảnh trực quan để minh họa cho các kết quả toán học là vấn đề được nhiều nhà toán học quan tâm, khai thác trong xu hướng dạy học hiện nay. Bài viết giới thiệu một số cách sử dụng diện tích hình phẳng để minh họa cho các tính chất số học là một hướng tiếp cận mới và khá thú vị, có thể xem đó như là những "chứng minh không từ ngữ (proof without words)" [6] cho các tính chất toán học. Từ đó giáo viên đưa ra các nhận xét, bình luận để vận dụng vào dạy học theo định hướng của lý thuyết kiến tạo, nhằm tích cực hóa hoạt động khám phá và kiến tạo tri thức của học sinh, nâng cao năng lực tư duy sáng tạo, đáp ứng yêu cầu đổi mới giáo dục trong giai đoạn mới.

Từ khóa: Hình ảnh trực quan, số học, diện tích hình phẳng, chứng minh không từ ngữ, lý thuyết kiến tạo.

1. Đặt vấn đề

Theo phương pháp dạy học truyền thống, khi dạy học các định lý hay các công thức toán học, giáo viên thường đưa ra công thức trước, sau đó mới chứng minh bằng các phép toán logic và lập luận chặt chẽ. Điều này giúp cho việc trình bày kiến thức đảm bảo tính logic, chính xác, tuy nhiên người học sẽ cảm thấy mất tính tự nhiên trong quá trình tiếp thu tri thức, sự tiếp nhận và ghi nhớ kiến thức của người học dễ trở nên máy móc. Do đó tiết dạy của giáo viên trở nên khô khan, không hấp dẫn người học và không kích thích khả năng tư duy, sáng tạo của người học.

Theo quan điểm của phép tư duy biện chứng, nhận thức của con người đi từ trực quan sinh động đến tư duy trừu tượng, cho nên chúng ta càng trực quan vấn đề bao nhiêu thì người học sẽ càng dễ tiếp thu, dễ hiểu, dễ nhớ vấn đề bấy nhiêu. Có thể nói những biểu diễn trực quan không những là phương tiện để minh họa theo cách dạy học truyền thống mà còn là công cụ hỗ trợ đắc lực cho quá trình tư duy của học sinh. Do đó trong xu hướng dạy học mới theo định hướng của lý thuyết kiến tạo, là kiểu lý thuyết được xây dựng dựa trên hai nguyên tắc cơ bản: *"Tri thức được kiến tạo một cách tích cực bởi chủ thể nhận thức, chứ không phải được tiếp thu một cách thụ động từ môi trường bên ngoài; Nhận thức là quá trình thích nghi và tổ chức lại thế giới quan của chính mỗi người. Nhận thức không phải là khám phá một thế giới độc lập đang tồn tại bên ngoài ý thức của chủ thể"* [8], thì việc tìm kiếm những biểu diễn toán trực quan làm cầu nối cho các biểu diễn toán thực tế mà học sinh quen thuộc với các biểu diễn ký hiệu trừu tượng giúp các em hiểu ý tưởng toán học và tự kiến tạo tri thức toán cho mình một cách tích cực càng trở nên có ý nghĩa.

Trên tinh thần đó, việc sử dụng các hình ảnh trực quan để minh họa các kết quả toán học đang ngày càng được khuyến khích. Tuy nhiên việc làm này không phải là vấn đề đơn giản, đòi hỏi nhiều công sức và trí tuệ. Bài viết này nhằm giới thiệu một vài ví dụ minh họa cho việc biểu diễn số bằng diện tích các hình phẳng mà có thể xem đó là những "*chứng minh không từ ngữ (proof without words)*" cho các tính chất toán học. Bài viết này giúp người đọc có thể hiểu thêm các phương pháp để tạo ra những hình ảnh toán học, từ đó khai thác, vận dụng vào giảng dạy một cách có hiệu quả.

2. Nội dung nghiên cứu

2.1. Mô hình SOLO

Mô hình SOLO (Structure of the Observed Learning Outcome) là mô hình mô tả cấu trúc về các kết quả học tập quan sát được. Biggs và Collis (1982) đã đưa ra một cấu trúc mô tả trình tự sắp xếp theo thứ tự từ thấp đến cao của sự phát triển trí tuệ của người học và đặt tên là "chu trình học". Dựa vào chu trình học này ta có thể biết được những thông tin về sự tiến bộ của học sinh qua quá trình học tập theo một trạng thái nhất định. Từ đây giáo viên có thể đánh giá kết

(*) Trường Đại học Quảng Bình.
(**) Trường Trung học phổ thông Đào Duy Từ, Đồng Hới, Quảng Bình.

quả học tập của học sinh. Dựa vào đó các tác giả đã xây dựng và phát triển mô hình SOLO để mô tả cấu trúc về các kết quả học tập có thể quan sát được. Theo mô hình này, chu trình học được chia làm năm mức độ tư duy, đó là: tiền cấu trúc, đơn cấu trúc, đa cấu trúc, xác lập mối quan hệ và mở rộng khả năng trừu tượng.

Giáo viên có thể sử dụng mô hình SOLO để thiết kế các nhiệm vụ học tập hoặc để tạo ra các tiêu chí đánh giá. Giáo viên có thể sử dụng nó trên các chủ đề sau: xây dựng kế hoạch học tập cần thiết cho từng chủ đề, đánh giá mức độ mà mỗi học sinh đã đạt được, đưa ra quyết định để định hướng các bước tiếp theo trong học tập. Điều quan trọng là mô hình SOLO chú ý đến cách học của học sinh, dựa vào đó giáo viên đưa ra phương pháp dạy, những chỉ dẫn như thế nào để giúp học sinh dần dần thực hiện một cách hiệu quả các quá trình nhận thức phức tạp hơn.

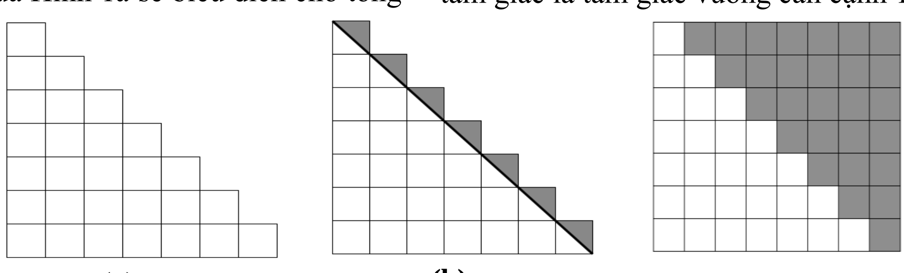
Xét về mặt nhận thức, phân loại SOLO có 5 trạng thái. Một sự khác biệt nổi bật so với các quan điểm trước trong phân loại SOLO là *trạng thái phát triển nhận thức sau không thay thế mà phát triển dựa trên các trạng thái trước đó*, nghĩa là học sinh tự mình phát triển kiến thức dựa trên những hiểu biết vừa tiếp nhận được. Ta có thể mô tả 5 trạng thái đó như ở Bảng 1 (Pegg, 2003) [9]:

Bảng 1. Mô tả các trạng thái trong mô hình SOLO

Vận động cảm giác (ngay sau khi sinh ra)	Một người phản ứng với môi trường vật chất. Với một em bé đang còn nhỏ, đó là trạng thái ở đó các kỹ năng vận động được đòi hỏi. Những kỹ năng đó đóng góp một phần quan trọng trong cuộc sống sau này khi chúng được kết hợp với nhiều môn thể thao phát triển
Biểu tượng trực quan (từ 2 tuổi)	Một người chủ quan hóa các hành động theo dạng hình ảnh. Đó là trạng thái trẻ em phát triển từ ngữ và hình ảnh đại diện cho các đối tượng hay sự kiện. Với người lớn, trạng thái này vận hành giúp đánh giá cao nghệ thuật và âm nhạc và dẫn đến một dạng kiến thức gắn liền với trực giác
Ký hiệu cụ thể (từ 6 hay 7 tuổi)	Một người tư duy thông qua sử dụng một hệ thống ký hiệu như ngôn ngữ viết và các hệ thống số. Đây là trạng thái chung nhất nhấn mạnh đến việc học ở tiểu học và trung học cơ sở
Hình thức (từ 15 hay 16 tuổi)	Một người xem xét các khái niệm trừu tượng hơn. Điều này có thể được mô tả như khi đang làm việc với "các nguyên tắc" và "lý thuyết". Học sinh không còn bị hạn chế vào một tham khảo cụ thể. Ở dạng tiên tiến hơn, trạng thái liên quan đến việc phát triển các nguyên tắc
Hậu hình thức (khoảng 22 tuổi)	Một người có khả năng đặt câu hỏi hay thách thức các cấu trúc lý thuyết hay nguyên tắc căn bản

2.2. Tổng của các số nguyên

Xét tổng $T_n = 1 + 2 + ... + n$. Nếu chúng ta sử dụng diện tích của một hình vuông đơn vị (có cạnh bằng 1) biểu diễn cho số 1, hai hình vuông như vậy để biểu diễn cho số 2, và cứ như vậy thì được diện tích của Hình 1a sẽ biểu diễn cho tổng T_n. Để tính diện tích, chúng ta sử dụng đường chéo để chia đôi các hình vuông ở bên phải của mỗi hàng như Hình 1b và tính diện tích của tam giác lớn không được đánh dấu là tam giác vuông cân cạnh n và n hình tam giác nhỏ hơn, mỗi tam giác là tam giác vuông cân cạnh 1 [7].



(a) (b) (c)

Hình 1

Do đó $T_n = 1+2+...+n = \frac{1}{2}n^2 + n.\frac{1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$

Một cách khác để tính T_n là lấy hai bản sao của hình trong Hình 1a ghép lại với nhau ta được hình chữ nhật có hai cạnh lần lượt là n và $n+1$, tính diện tích hình chữ nhật đó ta có $2T_n = n(n+1)$, và do đó $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$ (Hình 1c).

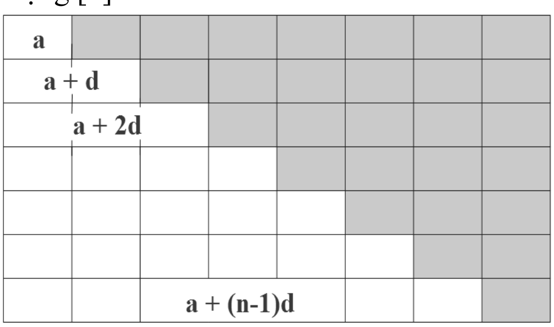
Với cách tiếp cận tương tự như vậy, chúng ta có thể đưa ra những biểu diễn trực quan để giúp học sinh hiểu thêm về tính chất các số như sau.

2.3. Tổng các số hạng của cấp số cộng

Do tổng $(1+2+...+n)$ là tổng của n số hạng của một cấp số cộng, nên ta có thể vận dụng những ý tưởng như trong phần trước để minh họa và hướng dẫn học sinh tính toán tổng S của n số hạng của một cấp số cộng tổng quát với số hạng đầu là a và công sai là d.

$$S = a + (a+d) + (a+2d) + ... + [a+(n-1)d].$$

Tổng quát hóa Hình 2, chúng ta thu được hình sau, còn được gọi là phương pháp "đường ống" (organ-pipe) cho tổng các số hạng của một cấp số cộng [4].

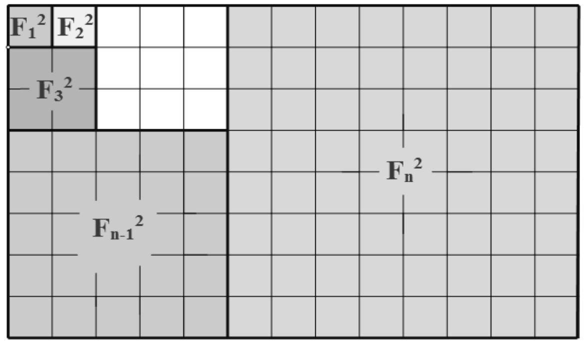


Hình 3

Hình chữ nhật thu được có hai cạnh lần lượt là n và $[a+(n-1)d]$. Do đó $2S = n[2a+(n-1)d]$ nên $S = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$.

2.4. Dãy số Fibonacci

Ta đã biết dãy số Fibonacci là dãy: 1, 1, 2, 3, 5, 8… có tính chất kể từ số hạng thứ 3 trở đi, mỗi số hạng bằng tổng của hai số hạng liền kề trước. Nếu biểu diễn số hạng Fibonacci thứ n bởi F_n thì $F_1 = F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ với $n \geq 3$. Có nhiều đẳng thức đẹp của dãy Fibonacci liên quan đến tổng các bình phương hay tổng các tích của các số Fibonaci. Chẳng hạn, $F_1^2 + F_2^2 + ... + F_n^2 = F_nF_{n+1}$, có thể được mô tả như Hình 4 dưới đây:



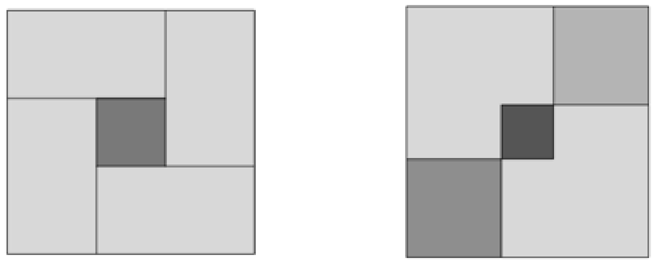
Hình 4

Trong hình, mỗi hình vuông có cạnh bằng 1 nên diện tích của nó sẽ biểu diễn cho $1^2 = F_1^2$. Do $F_3 = F_1 + F_2$ nên F_3^2 sẽ được biểu diễn bằng diện tích của hình vuông có cạnh bằng tổng chiều dài cạnh của hai hình vuông biểu diễn cho F_1^2 và F_2^2. Cứ như vậy tổng $F_1^2 + F_2^2 + ... + F_n^2$ sẽ được biểu diễn bởi diện tích hình chữ nhật có hai cạnh lần lượt là F_n và F_{n+1}. Do đó ta có kết quả $F_1^2 + F_2^2 + ... + F_n^2 = F_nF_{n+1}$.

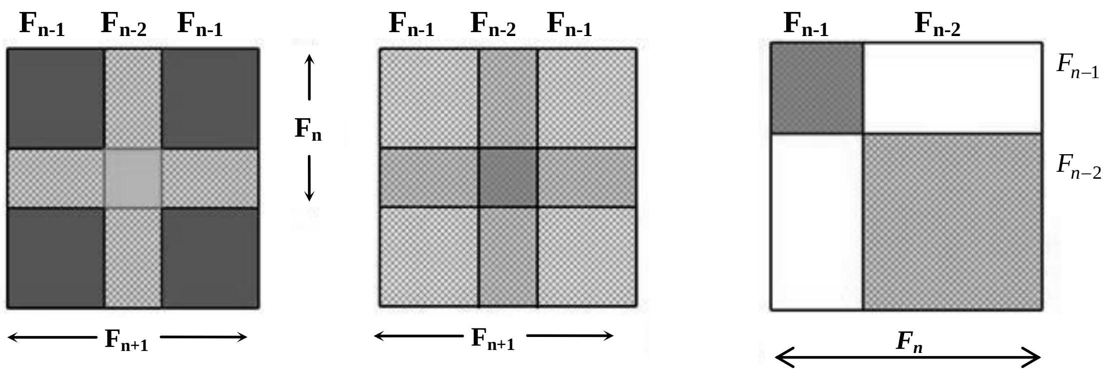
Những đẳng thức khác có thể được minh họa tương tự [2].

Trong Hình 5a, diện tích hình vuông ở giữa biểu diễn cho F_{n-2}^2, do vậy F_{n-2} sẽ được biểu diễn bởi cạnh của hình vuông. Trong 4 hình chữ nhật có hai cạnh lần lượt là F_{n-1} và $F_{n-1} + F_{n-2} = F_n$. Khi đó hình vuông lớn được tạo thành từ hình vuông nhỏ ở giữa và 4 hình chữ nhật xung quanh sẽ có cạnh bằng $F_{n-1} + F_n = F_{n+1}$. Từ đó ta có đẳng thức $F_{n+1}^2 = 4F_nF_{n-1} + F_{n-2}^2$.

Tương tự, bằng cách chia như Hình 5b, ta lại có đẳng thức $F_{n+1}^2 = 2F_{n-1}^2 + 2F_n^2 - F_{n-2}^2$, hoặc đẳng thức $F_{n+1}^2 = 4F_{n-1}^2 + 4F_{n-1}F_{n-2} + F_{n-2}^2$ theo cách chia như Hình 5c, hoặc đẳng thức $F_{n+1}^2 = 4F_n^2 - 4F_{n-1}F_{n-2} - 3F_{n-2}^2$ theo cách chia như Hình 5d, hoặc đẳng thức $F_n^2 = F_{n-1}^2 + F_{n-2}^2 + 2F_{n-1}F_{n-2}$ (Hình 5e).



(a) $F_{n+1}^2 = 4F_n F_{n-1} + F_{n-2}^2$ (b) $F_{n+1}^2 = 2F_n^2 + 2F_{n-1}^2 - F_{n-2}^2$



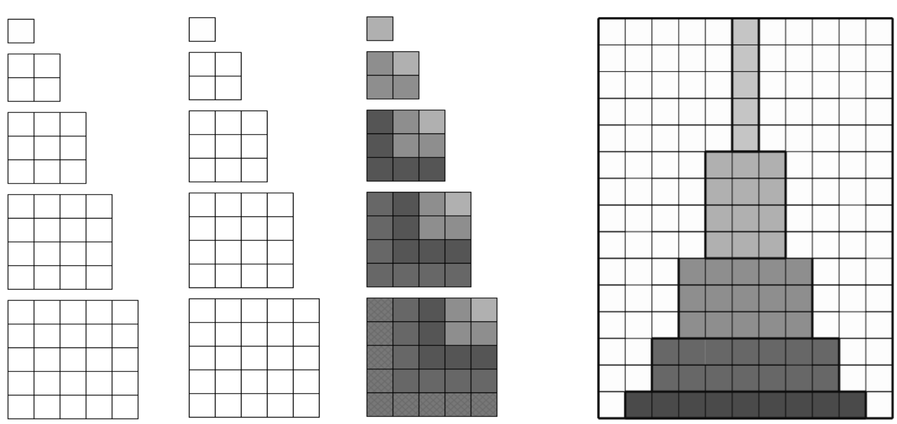
(c) $F_{n+1}^2 = 4F_{n-1}^2 + 4F_{n-1}F_{n-2} + F_{n-2}^2$ **(d)** $F_{n+1}^2 = 4F_n^2 - 4F_{n-1}F_{n-2} - 3F_{n-2}^2$ **(e)** $F_n^2 = F_{n-1}^2 + F_{n-2}^2 + 2F_{n-1}F_{n-2}$

Hình 5

Ví dụ cuối cùng mà chúng tôi muốn giới thiệu ở đây là ví dụ minh họa cho tổng các bình phương.

2.5. Tổng các bình phương

Hình 6 là một minh họa cho đẳng thức $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, được thiết lập bằng cách chứng tỏ rằng $3\left(1^2 + 2^2 + ... + n^2\right)$ bằng với diện tích của một hình chữ nhật có hai cạnh là $(2n+1)$ và $(1+2+...+n)$ bởi cách ghép ba bản sao của Hình 6a thành hình chữ nhật như hình vẽ [5] (Hình 6b):



(a) **(b)**

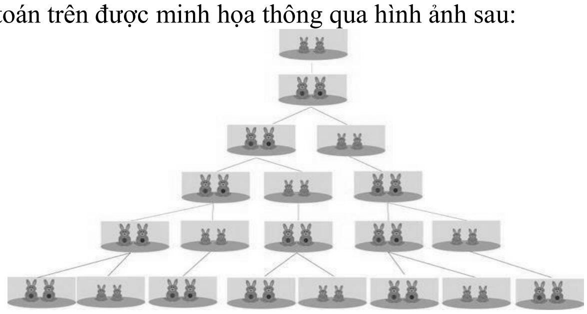
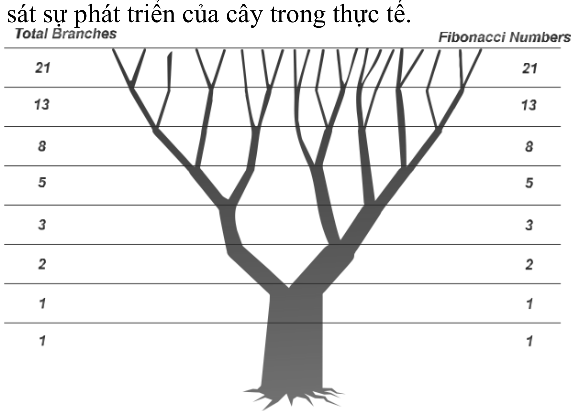
Hình 6

Với cách làm tương tự, chúng ta có thể đưa ra minh họa cho tổng các lập phương và một số bất đẳng thức quen thuộc như bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân [1].

2.6. Thiết kế tình huống dạy học

Để vận dụng hình ảnh này vào giảng dạy toán theo định hướng của lý thuyết kiến tạo, giáo viên cần chú ý đặc điểm các giai đoạn nhận thức của tư duy học sinh theo mô hình SOLO để có cách đặt vấn đề phù hợp. Trong phân loại SOLO, giai đoạn hình thức xảy ra ở lứa tuổi 15-16. Như vậy, học sinh trung học phổ thông Việt Nam có khả năng để thực hiện các quá trình tư duy xây dựng giả thuyết và suy luận mệnh đề trong chứng minh. Chẳng hạn khi dạy học bài “Dãy số” trong chương trình Đại số và giải tích 11, để phù hợp với sự phát triển trong giai đoạn này của học sinh, giáo viên có thể thiết kế các hoạt động để giới thiệu dãy số Fibonacci như sau:

Hoạt động 1. Giới thiệu khái niệm dãy số Fibonacci

<table>
<tr><th>HOẠT ĐỘNG CỦA GIÁO VIÊN</th><th>HOẠT ĐỘNG CỦA HỌC SINH</th></tr>
<tr><td>
- Đưa ra hình ảnh minh họa cho dãy số Fibonacci. Bắt đầu với bài toán thỏ đẻ con: có một thỏ đực và một thỏ cái, hỏi có bao nhiêu cặp thỏ có thể được sinh ra trong một năm? Bài toán giả sử những điều kiện sau:
- Bắt đầu với một thỏ đực và một thỏ cái vừa mới chào đời.
- Thỏ đạt tới tuổi thuần thục sinh dục sau một tháng.
- Thời gian mang thai của một con thỏ là một tháng.
- Sau khi thuần thục sinh dục, thỏ cái đẻ đều đều mỗi tháng.
- Một thỏ cái sinh ra một thỏ đực và một thỏ cái.
- Không có thỏ chết.
Bài toán trên được minh họa thông qua hình ảnh sau:

Hình 7
? Quan sát số lượng cặp thỏ sau mỗi tháng, nhận xét quy luật của dãy số này.
- Giáo viên nhận xét các câu trả lời của học sinh, dẫn dắt học sinh đến khái niệm dãy số Fibonacci.
- Giáo viên giới thiệu ý nghĩa của dãy số này trong thực tế thông qua một vài hình ảnh minh họa trực quan:
Quan sát sự phát triển của cây trong thực tế.


Hình 8
? Nhận xét sự phát triển số nhánh cây.
? Nhận xét quy luật của dãy số này.
</td><td>
- Quan sát hình ảnh, liệt kê số cặp thỏ sau mỗi tháng: 1; 1; 2; 3; 5; 8; …
- Quan sát, khám phá tính chất của dãy số, dự đoán quy luật của dãy số: kể từ số hạng thứ ba, mỗi số hạng bằng tổng của hai số hạng đứng kề trước nó.

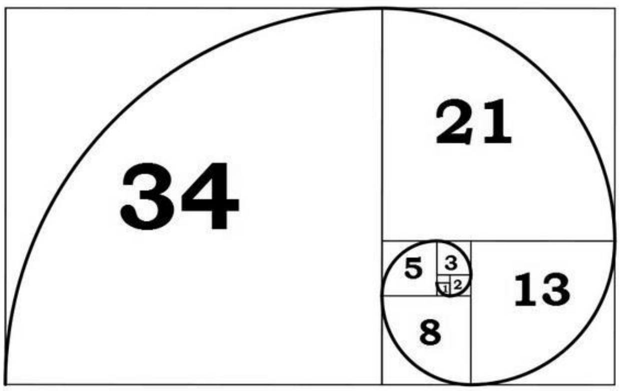
- Quan sát, nhận xét được quy luật của dãy số này phù hợp với dãy số Fibonacci.
</td></tr>
</table>

Hoạt động 2. Khám phá tính chất của dãy số Fibonacci

<table>
<tr><th>HOẠT ĐỘNG CỦA GIÁO VIÊN</th><th>HOẠT ĐỘNG CỦA HỌC SINH</th></tr>
<tr><td>

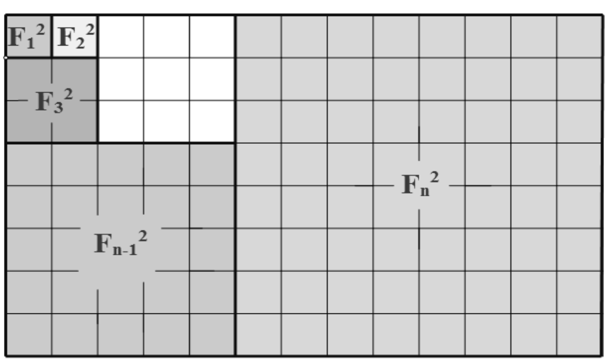
- Giới thiệu Hình chữ nhật vàng liên quan đến dãy số Fibonacci

Xoắn ốc Fibonacci là một dãy những góc tư vòng tròn được vẽ bên trong một ma trận gồm những hình vuông có cạnh là các số Fibonacci. Các hình vuông khớp hoàn toàn với nhau do bản chất của dãy số, trong đó số tiếp theo bằng tổng của hai số đứng trước nó. Hai số Fibonacci liên tiếp bất kì có một tỉ số rất gần với Tỉ số vàng, chừng bằng 1,618034.



Hình 9

- Giáo viên giới thiệu lại cách biểu diễn dãy số Fibonacci bằng hình ảnh trực quan: Kí hiệu số hạng Fibonacci thứ n bởi F_n và F_1^2 được biểu diễn bởi diện tích hình vuông có cạnh bằng 1. Bằng cách sắp xếp các ô vuông theo những thứ tự khác nhau, hãy khám phá các tính chất của dãy số Fibonacci?



Hình 10

? Với cách sắp xếp trên, yêu cầu học sinh tính tổng

$$S_6 = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 + F_5^2 + F_6^2.$$

? Từ bài toán trên, hãy tổng quát hóa cho tổng

$$S = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \ldots + F_n^2.$$

Từ ví dụ trên, giáo viên cho học sinh trải nghiệm sắp xếp theo các cách khác nhau để có thể khám phá thêm nhiều tính chất thú vị của dãy số Fibonacci (Hình 5a, b, c, d, e).

</td><td>

- Quan sát hình ảnh, cách biểu diễn dãy số Fibonacci, kiểm chứng lại tính chất của dãy số.

- Học sinh quan sát, khám phá, nhận xét được khi sắp xếp theo thứ tự như vậy, tổng S_6 sẽ bằng diện tích của hình chữ nhật có hai cạnh lần lượt là F_6 và $F_5 + F_6 = F_7$. Như vậy $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 + F_5^2 + F_6^2 = F_6.F_7$

- Suy nghĩ, tổng quát hóa bài toán, nhận ra được tính chất:

$$F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_n F_{n+1}.$$

- Học sinh làm việc theo các nhóm, thảo luận đưa ra các ý tưởng của mình và trình bày trước lớp.

</td></tr>
</table>

Như vậy với các hoạt động được thiết kế ở trên, học sinh có thể hình dung rõ hơn về dãy Fibonacci và tự mình khám phá các tính chất của dãy số đặc biệt này. Học sinh được phát triển tư duy sáng tạo, xây dựng giả thuyết, suy luận mệnh đề trong chứng minh... Nếu giáo viên không sử dụng hình ảnh trực quan để hỗ trợ dạy học các tính chất này thì việc chứng minh các tính chất sẽ gặp nhiều khó khăn, học sinh sẽ tiếp thu kiến thức một cách thụ động, không phát triển được các năng lực cần thiết đáp ứng yêu cầu đổi mới giáo dục hiện nay.

3. Kết luận

Bài viết đã tổng quan lại các đặc điểm của mô hình SOLO mô tả sự phát triển nhận thức của người học, giới thiệu một số hình ảnh minh họa trực quan mà cụ thể là sử dụng diện tích của các hình phẳng để biểu diễn các tính chất số học: tổng các số hạng của cấp số cộng, dãy số Fibonacci, tổng các bình phương. Từ đó thiết kế một tình huống dạy học nhằm vận dụng hình ảnh trực quan vào dạy học các tính chất của dãy số Fibonacci theo quan điểm của lý thuyết kiến tạo mà cụ thể là vận dụng phân loại theo mô hình SOLO để thiết kế các tình huống dạy học và đánh giá học sinh, giúp học sinh hiểu sâu hơn về kiến thức toán và thuận lợi trong quá trình kiến tạo kiến thức cho bản thân. *"Biểu diễn trực quan không còn được xem như chỉ dành cho mục đích minh họa mà còn được thừa nhận như một thành phần chính của suy luận... Nó hỗ trợ quá trình giải quyết vấn đề và ngay cả chứng minh"* [9]. Điều quan trọng là người giáo viên cần phải biết linh động vận dụng như thế nào vào lớp học để đạt được hiệu quả cao nhất./.

Tài liệu tham khảo

[1]. Alsina, C. and Nelsen, B. R. (2006), *Math made visual: Creating images for understanding Mathematics,* The Mathematical Association of America, USA.

[2]. Bicknell, M. and Hoggatt, V. E. Jr, eds. (1972), *A Primer for the Fibonacci Numbers,* The Fibonacci Association, San Jose.

[3]. Biggs, J. B. and Collis, K. (1982), *Evaluating the quality of learning: the SOLO taxonomy,* Academic Press, New York.

[4]. Conway, H. J. and Guy, R. (1996), *The Book of Number,* Copernicus, New York.

[5]. Gardener, M. (1973), "Mathematical game", *Scientific American,* 229 (4), p. 115.

[6]. Nelsen, B. R. (2000), *Proofs without words II: More exercises in visual thinking,* The Mathematical Association of America, USA.

[7]. Richards, I. (1984), "Sum of integers", *Mathematics magazine,* 57 (2), p. 104.

[8]. Von Glasersfeld, E. (1989), "Constructivism in Education. In T. Husen & N. Postlethwaite (Eds.)", *International Encyclopedia of Education,* (Supplementary Vol. 1), p. 162-163, Oxford: Pergamon.

[9]. Trần Vui (2017), *Từ các lý thuyết học đến thực hành trong giáo dục Toán,* NXB Đại học Huế.

USING PLANE FIGURE AREAS IN VISUAL ILLUSTRATIONS FOR ARITHMETIC PROPERTIES

Summary

Mathematicians are interested to create visuals for illustrating mathematical results in the current teaching trend. This article presents how to use plane figure areas to illustrate arithmetic properties, which is a new and interesting approach, the so-called "proof without words" [6] for mathematical properties. On that basis, teachers can give comments and implement them in their instruction under the constructivism theory, in order to actively explore and construct students' knowledge, enhancing their creative thinking for meeting educational renovation requirements in the new period.

Keywords: Visuals, arithmetic, plane figure area, proof without words, constructivism theory.

Ngày nhận bài: 29/8/2017; Ngày nhận lại: 20/10/2017; Ngày duyệt đăng: 24/01/2018.