



DOI: <https://doi.org/10.52714/dthu.sch.3493.2007>

BIỆN PHÁP PHÁT TRIỂN NĂNG LỰC TƯ DUY VÀ LẬP LUẬN TOÁN HỌC CHO HỌC SINH: MỘT TRƯỜNG HỢP TRONG DẠY HỌC NỘI DUNG TỈ LỆ THỨC – TOÁN 7

Võ Xuân Mai¹ và Từ Ngọc Thảo^{2,3*}

¹Khoa Sư phạm Toán - Tin, Trường Sư phạm, Trường Đại học Đồng Tháp, Vietnam

²Học viên cao học, Trường Đại học Đồng Tháp, Việt Nam

³Trường trung học cơ sở Vĩnh Tân, Việt Nam

*Tác giả liên hệ, Email: thao20121993sptoan@gmail.com

Lịch sử bài báo

Ngày nhận: 11/6/2026; Ngày nhận chỉnh sửa: 14/7/2026; Ngày duyệt đăng: 17/7/2026

Tóm tắt

Chương trình Giáo dục phổ thông tổng thể năm 2018 đã xác định trọng tâm vào việc phát triển phẩm chất và năng lực toàn diện người học. Trong các thành phần của năng lực toán học cần phát triển cho học sinh, năng lực tư duy và lập luận toán học đóng vai trò cốt lõi, đặc biệt trong xu thế bùng nổ công nghệ và trí tuệ nhân tạo hiện nay. Tuy nhiên, thực tiễn cho thấy học sinh lớp 7 vẫn gặp một số hạn chế khi thực hiện các thao tác tư duy và cách thức suy luận. Dựa trên cơ sở nghiên cứu lý luận, bài viết đề xuất các biện pháp sư phạm nhằm phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học cho học sinh thông qua nội dung tỉ lệ thức – Toán 7. Các định hướng và biện pháp tập trung khơi gợi động lực tư duy, rèn luyện thao tác phân tích, suy diễn và tổ chức tranh luận trong học tập đã được đưa ra và minh họa qua các ví dụ cụ thể. Kết quả nghiên cứu mang tính thực tiễn hỗ trợ giáo viên trong thiết kế tình huống, đổi mới phương pháp giảng dạy đáp ứng yêu cầu giáo dục hiện nay.

Từ khóa: Biện pháp sư phạm, Năng lực tư duy và lập luận toán học, Tỉ lệ thức.

Trích dẫn: Từ, N. T., & Võ, X. M. (2026). Biện pháp phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học cho học sinh: một trường hợp trong dạy học nội dung tỉ lệ thức – Toán 7. *Tạp chí Khoa học Đại học Đồng Tháp*, 15(04S), 88-102. <https://doi.org/10.52714/dthu.sch.3493.2007>

Copyright © 2026 The author(s). This work is licensed under a CC BY-NC 4.0 License.

MEASURES TO DEVELOP STUDENTS' MATHEMATICAL THINKING AND REASONING COMPETENCE: A CASE STUDY IN TEACHING PROPORTIONS - MATHEMATICS GRADE 7

Vo Xuan Mai¹ and Tu Ngoc Thao^{2,3*}

¹*Faculty of Mathematics - Information Teacher Education,
School of Education, Dong Thap University, Vietnam*

²*Post – graduate student, Dong Thap University, Vietnam*

³*Vinh Tan Secondary School, Vietnam*

**Corresponding author, Email: thao20121993sptoan@gmail.com*

Article history

Received: 11/6/2026; Received in revised form: 14/7/2026; Accepted: 17/7/2026

Abstract

The 2018 General Education Program focused on developing students' comprehensive qualities and competencies. Among the mathematical competencies to be developed, mathematical thinking and reasoning play a key role, especially in the current trend of technological and artificial intelligence explosion. However, practical teaching shows that 7th-grade students still face some limitations in performing thinking operations and reasoning methods. Based on theoretical research, this article proposes pedagogical measures to develop students' mathematical thinking and reasoning through the content of Proportions in 7th-grade Mathematics. Orientations and measures focusing on stimulating thinking motivation, training analytical and deductive skills, and organizing debates in learning are presented and illustrated through specific examples. The research results have practical value in supporting teachers in designing learning situations and innovating teaching methods to meet current educational requirements.

Keywords: *Mathematical thinking and reasoning competence, Pedagogical measures, Proportions.*

1. Đặt vấn đề

Chương trình giáo dục phổ thông (GDPT) môn Toán đã đưa ra các yêu cầu cần đạt về năng lực đặc thù của học sinh (HS). Trong đó, năng lực tư duy và lập luận toán học (NLTD&LLTH) của HS ở cấp trung học cơ sở (THCS) thể hiện qua việc: “*Thực hiện được các thao tác tư duy, đặc biệt biết quan sát, giải thích được sự tương đồng và khác biệt trong nhiều tình huống và thể hiện được kết quả của việc quan sát*” (Bộ GD&ĐT, 2018b). Bối cảnh dạy học hiện nay đòi hỏi giáo viên (GV) phải thay đổi cách tiếp cận giảng dạy, chuyển từ việc áp dụng công thức, các thuật toán, mẫu bài tập có sẵn sang việc tổ chức các hoạt động học tập mang tính tìm tòi, khuyến khích tự kiến tạo, thực hiện được việc giải thích, lập luận và làm sáng tỏ bản chất của các kiến thức toán học.

Trong chương trình Toán lớp 7, nội dung Tỉ lệ thức và dãy tỉ số bằng nhau là một mạch kiến thức quan trọng và có nhiều ứng dụng trong giải quyết các vấn đề thực tiễn. Mạch nội dung này có nhiều cơ hội thuận lợi để phát triển năng lực tư duy, lập luận cho HS. Khi tiếp cận với khái niệm tỉ lệ thức, HS cần vận dụng tư duy logic để nhận biết mối quan hệ tương đương giữa các tỉ số, phân tích cấu trúc của các đại lượng và thiết lập các hệ thức toán học. Các hoạt động học tập như chứng minh một đẳng thức từ một tỉ lệ thức cho trước, hay vận dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau để giải các bài toán thực tế đều đòi hỏi học sinh phải sử dụng suy luận suy diễn, phân tích giả thiết và kết luận một cách chặt chẽ. Một số nghiên cứu trước đây đã có những ý tưởng để phát triển năng lực này trong dạy học môn toán với các chủ đề như Hình học, Giải tích, Đại số ở các cấp trung học cơ sở và trung học phổ thông. Tuy nhiên trong mạch kiến thức số học ở Toán 7 có vài công trình được công bố, chẳng hạn, Nguyễn và Phạm (2023) đã đề xuất 3 biện pháp phát triển tư duy, lập luận toán học thông qua chủ đề các đại lượng tỉ lệ, trong khi đó Bùi (2024) đã đề xuất 4 định hướng và 3 biện pháp phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học cho học sinh thông qua dạy học chương Biểu thức đại số - Toán 7. Trần và cộng sự (2025) đã quan tâm đến chủ đề Đại lượng tỉ lệ đã đề xuất 4 biện pháp phát triển năng lực giải quyết vấn đề toán học cho học sinh 7 trong dạy học chủ đề “Đại lượng tỉ lệ”.

Tuy nhiên, thực tế dạy học nội dung Tỉ lệ thức hiện nay cho thấy nhiều HS vẫn còn gặp khó khăn trong việc lập luận, giải thích các bước biến đổi, HS được cung cấp các dạng toán và công thức biến đổi của tỉ lệ thức để áp dụng ngay trong giải bài tập, các bài toán trong thực tiễn chưa được chú trọng bối cảnh tư duy và suy luận liên quan nội dung này. Chính vì vậy, bài viết tập trung nghiên cứu và đề xuất một số biện pháp sư phạm cụ thể nhằm phát triển NLTD&LLTH cho HS lớp 7 thông qua dạy học nội dung Tỉ lệ thức.

2. Phương pháp nghiên cứu

Chúng tôi chủ yếu sử dụng phương pháp nghiên cứu lý luận nhằm xây dựng cơ sở khoa học vững chắc cho việc đề xuất các biện pháp sư phạm phù hợp. Tác giả tiến hành thu thập, phân loại và tổng hợp các công trình nghiên cứu khoa học, bài báo, sách chuyên khảo trong và ngoài nước, cùng các văn bản chỉ đạo của Bộ Giáo dục và Đào tạo liên quan đến vấn đề phát triển năng lực thành tố này và năng lực toán học cho học sinh. Từ đó, bài viết phân tích, so sánh, đối chiếu và hệ thống hóa các cơ sở lý luận về cấu trúc thành tố, các biểu hiện của năng lực tư duy và lập luận toán học, kết hợp với nghiên cứu đặc điểm tâm lý nhận thức của học sinh lớp 7 khi học nội dung Tỉ lệ thức. Phương pháp này giúp xác định rõ các biểu hiện của năng lực cần phát triển và định hướng cấu trúc chuỗi hoạt động học tập, đảm bảo các biện pháp được đề xuất có cơ sở khoa học và đáp ứng đúng mục tiêu phát triển năng lực toán học.

3. Kết quả nghiên cứu

3.1. Năng lực tư duy và lập luận toán học

Nhiều kết quả trên thế giới và Việt Nam đã quan tâm nghiên cứu về năng lực, năng lực toán học, dẫn đến những nghiên cứu tập trung sâu sắc cụ thể hơn về năng lực tư duy và lập luận toán học.

Theo Chương trình GDPT tổng thể (Bộ GD&ĐT, 2018a), “Năng lực là thuộc tính cá nhân được hình thành, phát triển nhờ tố chất sẵn có và quá trình học tập, rèn luyện, cho phép con người huy động tổng hợp các kiến thức, kỹ năng và các thuộc tính cá nhân như hứng thú, niềm tin, ý chí, ... thực hiện thành công một loại hoạt động nhất định, đạt kết quả mong muốn trong những điều kiện cụ thể”. Chương trình này đã xác định mục tiêu hình thành và phát triển cho HS các năng lực cốt lõi bao gồm các năng lực chung và các năng lực đặc thù.

Niss (2003) định nghĩa: “Năng lực toán học như khả năng của cá nhân để sử dụng các khái niệm toán học trong một loạt các tình huống có liên quan đến toán học, kể cả những lĩnh vực bên trong hay bên ngoài của toán học (để hiểu, quyết định và giải thích)”. Theo PISA (OECD, 2022), “năng lực toán học là khả năng của một cá nhân trong việc suy luận toán học và hình thành, sử dụng và diễn giải toán học để giải quyết các vấn đề trong nhiều bối cảnh thực tế khác nhau. Nó bao gồm các khái niệm, quy trình, sự kiện và công cụ để mô tả, giải thích và dự đoán các hiện tượng. Nó giúp các cá nhân hiểu được vai trò của toán học trong thế giới và đưa ra những phán đoán và quyết định có cơ sở vững chắc cần thiết cho những công dân thế kỷ 21 mang tính xây dựng, tham gia và suy nghĩ thấu đáo”.

Chúng tôi thống nhất quan niệm về năng lực toán học theo quy định của Chương trình GDPT môn Toán 2018 như sau: “Năng lực toán học là thuộc tính cá nhân được hình thành, phát triển nhờ tố chất sẵn có và quá trình học tập, rèn luyện, cho phép con người huy động tổng hợp các kiến thức, kỹ năng và các thuộc tính cá nhân khác như hứng thú, niềm tin, ý chí,... thực hiện thành công một loại hoạt động nhất định, đạt kết quả mong muốn trong những điều kiện cụ thể” (Bộ GD&ĐT, 2018b).

Theo Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán 2018 (Bộ GD&ĐT, 2018b), “NLTD&LLTH thể hiện qua việc: (1) Thực hiện được các thao tác tư duy như: so sánh, phân tích, tổng hợp, đặc biệt hoá, khái quát hoá, tương tự; quy nạp, diễn dịch. (2) Chỉ ra được chứng cứ, lí lẽ và biết lập luận hợp lí trước khi kết luận. (3) Giải thích hoặc điều chỉnh được cách thức giải quyết vấn đề về phương diện toán học”.

3.2. Biểu hiện năng lực tư duy và lập luận toán học của học sinh thông qua dạy học nội dung Tỷ lệ thức (Toán 7)

Theo chương trình GDPT môn Toán (Bộ GD&ĐT, 2018b), nội dung Tỷ lệ thức thuộc chương Số thực, có yêu cầu cần đạt được thể hiện qua bảng 1.

Bảng 1. Nội dung và yêu cầu cần đạt của nội dung Tỷ lệ thức - Toán 7

Nội dung	Yêu cầu cần đạt
Tỷ lệ thức và dãy tỉ số bằng nhau	– Nhận biết được tỉ lệ thức và các tính chất của tỉ lệ thức.
	– Vận dụng được tính chất của tỉ lệ thức trong giải toán.
	– Nhận biết được dãy tỉ số bằng nhau.
	– Vận dụng được tính chất của dãy tỉ số bằng nhau trong giải toán (ví dụ: chia một số thành các phần tỉ lệ với các số cho trước,...).

Ở cấp Trung học cơ sở, NLTD&LLTH được thể hiện cụ thể qua việc:

“Thực hiện được các thao tác tư duy, đặc biệt biết quan sát, giải thích được sự tương đồng và khác biệt trong nhiều tình huống và thể hiện được kết quả của việc quan sát.

Thực hiện được việc lập luận hợp lý khi giải quyết vấn đề.

Nêu và trả lời được câu hỏi khi lập luận, giải quyết vấn đề. Chứng minh được mệnh đề toán học không quá phức tạp.”

Trên cơ sở nghiên cứu các biểu hiện NLTD&LLTH của HS cấp THCS, nhiều nghiên cứu trước đó cũng đã xác định các biểu hiện vào các nội dung cụ thể. Chẳng hạn, Nguyễn và Phạm (2023) đã khẳng định tầm quan trọng của việc học sinh phải chỉ ra được chứng cứ, lí lẽ và biết lập luận hợp lý trước khi đưa ra kết luận cho một bài toán. Trong khi đó, Nguyễn (2024) đã xác định biểu hiện đầu tiên mang tính nền tảng của năng lực này là học sinh phải thực hiện được các thao tác tư duy như so sánh, phân tích, tổng hợp, đặc biệt hóa và khái quát hóa. Biểu hiện này cũng nhận được sự đồng thuận trong nghiên cứu của tác giả Nguyễn (2025), trong đó nhấn mạnh khả năng học sinh biết quan sát, tìm kiếm sự tương đồng và khác biệt giữa các đối tượng toán học.

Từ các nghiên cứu về biểu hiện của NLTD&LLTH của HS cấp THCS đồng thời xác định rõ nội dung yêu cầu cần đạt của nội dung Tỉ lệ thức - Toán 7 theo chương trình GDPT 2018, chúng tôi đề xuất các biểu hiện NLTD&LLTH của HS qua nội dung Tỉ lệ thức được thể hiện ở Bảng 2 như sau:

Bảng 2. Các biểu hiện NLTD&LLTH của HS qua nội dung Tỉ lệ thức - Toán 7

Các biểu hiện	Các thao tác của HS
Biểu hiện 1. Thực hiện được các thao tác tư duy khi học về nội dung Tỉ lệ thức	– Học sinh so sánh đối chiếu hai tỉ số để nhận biết khi nào hai tỉ số bằng nhau, từ đó xác định một đẳng thức có phải là tỉ lệ thức hay không.
	– Học sinh so sánh các dạng biểu diễn khác nhau của tỉ lệ thức để nhận ra mối liên hệ giữa chúng.
	– Học sinh phân tích bài toán thực tế, xác định các đại lượng đã cho, đại lượng cần tìm và nhận diện mối quan hệ tỉ lệ ẩn trong bài toán để lựa chọn tính chất thích hợp của tỉ lệ thức.
	– Học sinh tổng hợp được các dữ kiện rời rạc của đề bài với tính chất của tỉ lệ thức để xây dựng lời giải hoàn chỉnh. Đây là bước kết hợp giữa việc thiết lập tỉ lệ thức, biến đổi tương đương và kết luận kết quả.
Biểu hiện 2. Thực hiện được việc lập luận hợp lý khi giải quyết vấn đề khi học về nội dung Tỉ lệ thức	– Học sinh khái quát hoá từ một bài toán cụ thể thành mô hình chung của dạng toán sử dụng tỉ lệ thức, từ đẳng thức tích chéo nhận ra điều kiện để lập một tỉ lệ thức, từ đó có thể áp dụng cho nhiều bài toán tương tự trong các bối cảnh khác nhau.
	– HS biết giải thích, lập luận trong quá trình giải quyết vấn đề, biết giải thích từ lời giải bài toán Tỉ lệ thức. – HS phân tích tình huống thực tiễn, xác định các đại lượng liên quan, nhận biết mối quan hệ tỉ lệ giữa chúng, biết thiết lập mô hình toán học thích hợp, thực hiện các phép biến đổi cần thiết.

Các biểu hiện	Các thao tác của HS
Biểu hiện 3. Nêu và trả lời được câu hỏi khi lập luận, giải quyết vấn đề và chứng minh được mệnh đề toán học không quá phức tạp khi học về nội dung Tỉ lệ thức	– Khi giải các bài tập ở các nội dung tỉ lệ thức, học sinh không chỉ thực hiện các phép tính và biến đổi đơn thuần mà còn cần biết nêu câu hỏi, trả lời câu hỏi, hiểu từng bước lập luận và phản biện những cách làm chưa hợp lí. – HS biết chuyển từ tình huống bằng lời sang quan hệ toán học, từ dữ kiện riêng lẻ sang mô hình chung, rồi từ đó suy ra kết quả phù hợp với bài toán thực tế. – HS biết nêu và trả lời câu hỏi khi lập luận, chẳng hạn: “Bài toán này cho biết những đại lượng nào?”, “Giữa các đại lượng ấy có quan hệ gì?”, “Nên dùng tính chất nào?”.

3.3. Một số biện pháp phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học cho học sinh qua dạy học nội dung Tỉ lệ thức

3.3.1. Biện pháp 1: Tạo động lực học tập và kích thích tư duy giải quyết vấn đề cho học sinh trong dạy học nội dung Tỉ lệ thức

a. Mục đích của biện pháp

Biện pháp này giúp HS hình thành hứng thú, thói quen tư duy tích cực, chủ động và sáng tạo. Nhiệm vụ của dạy học là khơi gợi sự quan tâm của HS với kiến thức mới, đồng thời đề xuất mục tiêu thực tế. Do đó, GV cần khơi dậy động lực học tập bên trong, giúp học sinh thấy được ý nghĩa và tính thiết thực của bài học, để học sinh có động lực và hứng thú với nội dung bài học. Mục đích tạo động lực là nền tảng để HS chuyển từ thụ động sang chủ động tìm kiếm kiến thức (Biểu hiện 1) và áp dụng kiến thức vào thực tiễn (Biểu hiện 2).

b. Cách thức thực hiện biện pháp

Để triển khai biện pháp này một cách hiệu quả, giáo viên có thể thực hiện thông qua các định hướng cụ thể sau:

Bước 1: Tạo tình huống kích thích tư duy

Bằng cách thiết kế tình huống xuất phát từ các bài toán thực tiễn gần gũi với HS lớp 7 hoặc từ các tình huống với các câu hỏi tại sao, bằng cách nào từ một số bài toán để tạo mâu thuẫn nhận thức cho HS.

GV đưa ra bài toán về các chủ đề trong thực tế (về chia một số thành các phần tỉ lệ) mà HS quan tâm để xây dựng chuỗi bài tập về tỉ lệ thức. Việc đặt bài toán vào những bối cảnh quen thuộc giúp HS dễ dàng hình dung vấn đề, từ đó thúc đẩy động lực thực hiện thao tác chuyển đổi ngôn ngữ đời thường sang mô hình toán học để lập luận và giải quyết.

Bước 2: Hình thành kiến thức hoặc phương pháp giải quyết

Từ tình huống được đặt ra tạo nhu cầu tư duy giải quyết, GV hình thành khái niệm mới, quy tắc mới cho HS.

Bước 3: Khuyến khích HS dự đoán và so sánh trước khi giải quyết và định hướng cách suy luận hợp lý

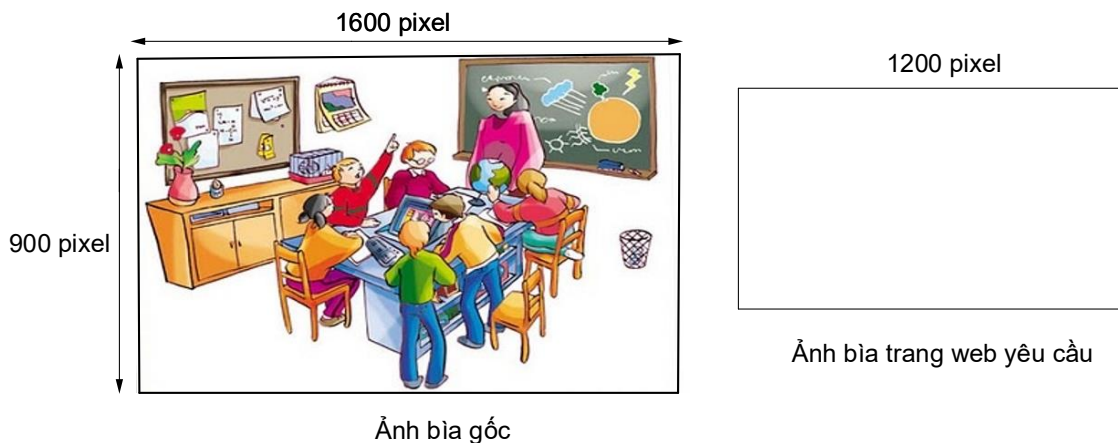
GV tạo không gian để HS đưa ra dự đoán và lập luận bảo vệ phương án giải quyết vấn đề thực tiễn. Khi đối mặt với các bài toán mang bối cảnh thực tế đời sống, HS thường có những phán đoán ban đầu dựa trên trực giác và kinh nghiệm cá nhân. GV cần khuyến khích các em trình bày những dự đoán và cách giải quyết.

c. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Tạo động lực kích thích tư duy thể hiện tính ứng dụng của toán học qua dạy học về khái niệm Tỉ lệ thức.

Bước 1: Tạo tình huống thực tế kích thích tư duy:

GV đưa ra một tình huống một nhóm HS muốn làm một video ngắn về hoạt động lớp. Ảnh bìa gốc của nhóm có kích thước chiều rộng là 1600 pixel và chiều cao là 900 pixel (tỉ lệ 16:9) (Hình 1). Tuy nhiên, trang website yêu cầu ảnh bìa chỉ được có chiều rộng tối đa là 1200 pixel. Để ảnh không bị biến dạng (méo hình), chiều cao của ảnh mới phải là bao nhiêu?



Hình 1.

Bước 2: Hình thành kiến thức hoặc phương pháp giải quyết

GV hình thành khái niệm Tỉ lệ thức cho HS, yêu cầu HS phát biểu định nghĩa.

Bước 3: Khuyến khích và hướng dẫn học sinh hoạt động tư duy và suy luận:

GV hướng dẫn HS gọi chiều cao mới là h (pixel).

GV hướng dẫn HS trả lời câu hỏi: Để hình ảnh không bị biến dạng, tỉ số giữa chiều rộng và chiều cao của ảnh mới có bằng tỉ số của ảnh cũ không?

Từ đó, HS lập tỉ lệ thức: $\frac{1600}{900} = \frac{1200}{h}$ suy ra $h = \frac{900 \cdot 1200}{1600} = 675$ pixel.

HS phải lập luận: Việc giữ nguyên tỉ số giữa chiều rộng và chiều dài là điều kiện để giữ được hình dạng ban đầu.

Phân tích cơ hội phát triển NLTD&LLTH cho học sinh: Qua tình huống điều chỉnh kích thước ảnh, HS được kích thích tư duy để tìm phương án giải quyết vấn đề thực tiễn. Qua đó, HS cần biết thực hiện thao tác phân tích dữ kiện thực tiễn, nhận biết yêu cầu giữ nguyên hình dạng để thiết lập sự tương đồng về tỉ số (Biểu hiện 1), HS lập luận hợp lý dựa trên khái niệm tỉ lệ thức để xây dựng đẳng thức $\frac{1600}{900} = \frac{1200}{h}$ (Biểu hiện 2).

3.3.2. Biện pháp 2: Luyện tập cho học sinh các thao tác tư duy cơ bản khi học các khái niệm, định lý và khi giải bài tập trong nội dung Tỉ lệ thức

a. Mục đích của biện pháp

Mục đích của biện pháp này là hình thành cho học sinh thói quen sử dụng các thao tác tư duy cơ bản như phân tích, tổng hợp, so sánh và khái quát hóa trong quá trình tiếp cận tri thức mới. Các thao tác này tạo nền tảng cho học sinh tiến hành được các hoạt động phức tạp hơn trong lập luận.

b. Cách thức thực hiện biện pháp

Bước 1: Thiết kế câu hỏi dẫn dắt từng bước

GV cần thiết kế các câu hỏi phù hợp khi dạy học khái niệm, định lý, quy tắc, hoặc giải bài tập như “Ta biết gì?”, “Cần tìm gì?”, “Có thể phân tích, biến đổi thế nào?”, “So sánh các hệ số, tỉ lệ được cho trong dữ kiện”, “Kết hợp các dữ kiện đã cho ta suy ra được gì?”. Lựa chọn các vấn đề, bài toán chứa nhiều dữ kiện để HS có cơ hội tiến hành các thao tác tư duy phân tích, so sánh và tổng hợp.

Bước 2: Rèn luyện thao tác tư duy như phân tích, tổng hợp thông qua các bài toán tích hợp nhiều dữ kiện thực tế, cho HS so sánh nhiều trường hợp để khái quát hóa rút ra quy luật

GV không yêu cầu HS giải ngay mà hướng dẫn các em thực hiện bước phân tích: bài toán cho biết những yếu tố nào, yếu tố nào chưa biết, và chúng có mối liên hệ tỉ lệ như thế nào với nhau. Sau khi chuyển được vấn đề sang ngôn ngữ toán học, HS thực hiện thao tác tổng hợp các tính chất đã học để tìm ra kết quả cuối cùng.

c. Ví dụ minh họa

Ví dụ 2. Rèn luyện thao tác phân tích và tổng hợp qua dạy học giải bài toán sau: Chuẩn bị cho hội thi trang trí không gian lớp học, nhóm Mĩ thuật cần pha 18 lít sơn màu xanh lá cây đậm từ ba màu cơ bản: vàng, xanh dương và đen. Theo công thức chuẩn, thể tích ba loại sơn này phải tuân theo tỉ lệ tương ứng là 4, 3 và 2. Hãy tính thể tích mỗi loại sơn cần dùng.

Bước 1: Thiết kế câu hỏi dẫn dắt từng bước

Để định hướng cho HS tiếp cận bài toán một cách logic, GV sử dụng hệ thống câu hỏi gợi mở, giúp các em tự xác định lộ trình giải quyết vấn đề:

Câu hỏi 1: Từ bài toán chúng ta cần xác định những đại lượng nào?

Câu hỏi 2: Dữ kiện nào cho biết tổng lượng hỗn hợp sau khi pha? Hãy biểu diễn dữ kiện đó dưới dạng toán học?

Câu hỏi 3: Mối liên hệ về tỉ lệ giữa ba loại sơn được mô tả như thế nào? Nếu gọi thể tích ba loại sơn lần lượt là x , y , z , em hãy thiết lập các tỉ số tương ứng?

Câu hỏi 4: Để tìm được x , y , z khi đã biết dãy tỉ số và tổng của chúng, em có thể vận dụng tính chất toán học nào đã học?

Bước 2: Rèn luyện thao tác tư duy phân tích và tổng hợp

Sau khi được dẫn dắt bởi các câu hỏi, GV dẫn dắt HS tiến hành thực hiện các thao tác tư duy để giải quyết bài toán:

HS thực hiện việc chia nhỏ tình huống thành hai phần chính. Phần thứ nhất là dãy tỉ số $\frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2}$. Phần thứ hai là tổng $x + y + z = 18$. Việc phân tích này giúp HS nhận diện được mô hình toán học của bài toán, từ đó có thể trình bày lời giải.

Từ tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, HS trình bày: $\frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2} = \frac{x+y+z}{4+3+2} = \frac{18}{9} = 2$.

$$\text{HS suy ra } \frac{x}{4} = 2 \Leftrightarrow x = 2.4 = 8, \quad \frac{y}{3} = 2 \Leftrightarrow y = 2.3 = 6, \quad \frac{z}{2} = 2 \Leftrightarrow z = 2.2 = 4.$$

Vậy thể tích sơn vàng là 8 lít, sơn xanh dương là 6 lít và sơn đen là 4 lít.

Phân tích cơ hội phát triển NLTD&LLTH cho học sinh: qua ví dụ này, HS có cơ hội phân tích bối cảnh để thiết lập dãy tỉ số $\frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2}$ và tổng $x + y + z = 18$; HS tổng hợp dữ kiện, sử dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau làm tiền đề logic để suy ra chính xác thể tích từng loại sơn. Sau cùng, việc trả lời các câu hỏi định hướng của giáo viên, HS giải thích rõ căn cứ toán học của từng bước giải, đảm bảo tính hợp lý của quá trình lập luận.

3.3.3. Biện pháp 3: Luyện tập cho HS sử dụng suy diễn và lập luận có căn cứ khi chứng minh định lý và giải bài tập trong nội dung Tỉ lệ thức

a. Mục đích của biện pháp

Mục đích của biện pháp này là rèn luyện cho HS thói quen và kỹ năng trình bày các bước suy luận một cách logic, có căn cứ khoa học. Biện pháp hướng tới việc giúp các em biết cách sử dụng các định nghĩa, tính chất và định lý đã học làm tiền đề cho các kết luận, từ đó biết chỉ ra các căn cứ khi chứng minh và lập luận các bài toán không quá phức tạp.

b. Cách thức thực hiện biện pháp

Bước 1: Nhận diện và phân tích các căn cứ toán học

GV hướng dẫn HS xác định các căn cứ toán học cần thiết trước khi bắt đầu giải quyết một vấn đề. Chẳng hạn, xác định được quy tắc nào, khái niệm gì được sử dụng trong các biến đổi, trong từng bước chứng minh, lập luận.

Bước 2: Xây dựng chuỗi suy luận logic theo mô hình suy diễn

GV thiết kế các tình huống dạy học yêu cầu HS phải thực hiện các bước suy luận từ cái chung đến cái riêng. HS được hướng dẫn sử dụng các cấu trúc lập luận như “Vì ... nên ...”, “Theo định nghĩa ... ta có ...”, “Từ quy tắc ... ta có ...”, “Ta có ... do ...”.

Bước 3: Tổ chức diễn giải và trình bày lời giải có căn cứ

HS được yêu cầu trình bày chi tiết các bước giải, trong đó mỗi phép biến đổi đại số hoặc mỗi khẳng định đều phải đi kèm với lý do phù hợp. GV đóng vai trò là người định hướng, khuyến khích HS tự kiểm tra tính đúng đắn của các bước lập luận.

Bước 4: Kiểm tra, đánh giá và chỉnh sửa cấu trúc lập luận

Sau khi hoàn thành bài tập, GV tổ chức cho HS thảo luận, đối chiếu lời giải giữa các cá nhân hoặc nhóm. Trọng tâm của bước này không chỉ nằm ở kết quả cuối cùng mà ở việc kiểm tra lại tính hợp lý của các luận cứ.

c. Ví dụ minh họa

Ví dụ 3. Dạy học giải bài toán sau: Một xưởng in nhận hợp đồng in 6000 quyển tập cho chiến dịch Tiếp sức đến trường. Xưởng có hai máy in với công suất khác nhau. Máy A in được 200 quyển/giờ, máy B in được 300 quyển/giờ. Quản lý xưởng muốn chia số lượng tập cho mỗi máy sao cho hai máy hoàn thành cùng lúc để kịp chuyển xe vận chuyển. Hãy lập luận để tìm số tập chia cho mỗi máy.

Bước 1: Nhận diện và phân tích các căn cứ toán học

GV hướng dẫn HS phân tích các đại lượng trong bài toán và xác định các căn cứ liên quan. HS cần xác định:

Đại lượng đã biết: Tổng số tập cần in (6000 quyển), năng suất máy A (200 quyển/giờ), năng suất máy B (300 quyển/giờ). Đại lượng cần tìm: Số quyển tập giao cho máy A và máy B. Điều kiện ràng buộc: Hai máy hoàn thành cùng lúc, tức là thời gian làm việc của hai máy bằng nhau.

Nhận diện: Công thức tính thời gian hoàn thành công việc: $t = \frac{A}{N}$ (với A là khối lượng công việc, N là năng suất); tính chất của dãy tỉ số bằng nhau.

Bước 2: Xây dựng chuỗi suy luận logic theo mô hình suy diễn

HS thiết lập mối liên hệ logic giữa các đại lượng thông qua mô hình suy diễn:

Vì mục tiêu là hai máy phải hoàn thành công việc cùng lúc, nên thời gian làm việc của máy A phải bằng thời gian làm việc của máy B.

Do công thức tính thời gian là thương của khối lượng công việc và năng suất, suy ra tỉ số giữa số tập và năng suất của máy A phải bằng tỉ số giữa số tập và năng suất của máy B.

Kết hợp với dữ kiện tổng khối lượng công việc là 6000 quyển tập, HS xây dựng được hệ thống lập luận dẫn đến mô hình dãy tỉ số bằng nhau.

Bước 3: Tổ chức diễn giải và trình bày lời giải có căn cứ

HS trình bày lời giải chi tiết, kèm theo các luận cứ xác đáng cho mỗi bước biến đổi:

Gọi x và y lần lượt là số quyển tập giao cho máy A và máy B ($x, y \in \mathbb{N}^*$).

Vì thời gian hoàn thành của hai máy là như nhau, ta có tỉ lệ thức: $\frac{x}{200} = \frac{y}{300}$.

Theo đề bài, tổng số tập là 6000 quyển nên ta có: $x + y = 6000$.

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có $\frac{x}{200} = \frac{y}{300} = \frac{x+y}{200+300} = \frac{6000}{500} = 12$.

Từ đó suy ra: $x = 200 \cdot 12 = 2400$ (quyển); $y = 300 \cdot 12 = 3600$ (quyển).

Vậy máy A in 2400 quyển và máy B in 3600 quyển.

Bước 4: Kiểm tra, đánh giá và chỉnh sửa cấu trúc lập luận

HS tiến hành kiểm tra lại tính hợp lý của kết quả và các suy luận:

Kiểm tra tính thực tiễn: $2400 + 3600 = 6000$ (đúng với tổng số tập); thời gian máy A làm là $2400 : 200 = 12$ giờ, máy B làm là $3600 : 300 = 12$ giờ (thời gian bằng nhau, thỏa mãn yêu cầu cùng lúc).

Đánh giá lập luận: Khẳng định rằng việc chia khối lượng công việc tỉ lệ thuận với năng suất khi thời gian không đổi là một lập luận có căn cứ khoa học.

Điều chỉnh: Nếu học sinh nhầm lẫn sang tỉ lệ nghịch, GV yêu cầu HS chất vấn lại: “Nếu năng suất cao hơn mà được giao ít việc hơn thì máy nào sẽ xong trước?”, từ đó giúp học sinh tự điều chỉnh cấu trúc lập luận cho đúng bản chất vấn đề.

Phân tích cơ hội phát triển NLTD&LLTH cho học sinh: Qua ví dụ này, HS phân tích điều kiện hoàn thành cùng lúc để nhận diện mối quan hệ giữa khối lượng công việc và năng suất, HS lập luận suy diễn từ thời gian bằng nhau để thiết lập tỉ lệ thức $\frac{x}{200} = \frac{y}{300}$ và tổng $x + y = 6000$. Việc áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau giúp tìm ra kết quả. Hơn nữa, học sinh tự kiểm chứng bằng cách đối chiếu thời gian thực tế và giải thích căn cứ toán học, đảm bảo tính hợp lý của các lập luận.

3.3.4. Biện pháp 4: Tập luyện cho học sinh nêu và trả lời được câu hỏi khi lập luận và giải quyết vấn đề về nội dung Tỉ lệ thức – Toán 7 trong quá trình tổ chức tranh luận

a. Mục đích của biện pháp

Mục đích là phát triển kỹ năng nêu và trả lời được câu hỏi cho HS thông qua hoạt động chất vấn, tranh luận. Biện pháp này tập trung tới Biểu hiện 3.

b. Cách thức thực hiện biện pháp

Bước 1: GV tổ chức cho HS làm việc nhóm, lựa chọn các bài toán thực tiễn, tình huống có vấn đề có thể đưa ra nhiều lời giải hoặc nhiều phương án để giải quyết, tình huống có chứa những sai sót.

GV tổ chức các hoạt động thảo luận nhóm kết hợp đóng vai người phản biện, tranh luận. Sau khi một nhóm trình bày phương án giải quyết bài toán thực tiễn, GV phân công các nhóm khác đóng vai trò người thẩm định. GV khai thác các tình huống thực tiễn có yếu tố sai số hoặc đa đáp án để tạo không gian tranh luận.

Bước 2: Tổ chức phiên tranh luận: các nhóm nhận xét lẫn nhau bằng cách đặt ra các câu hỏi, đánh giá tính đúng sai, cách thức lập luận giải quyết vấn đề của mỗi nhóm.

Hướng dẫn HS sử dụng các mẫu câu hỏi định hướng tư duy khi tiếp cận bài toán để dần hình thành kỹ năng tự chất vấn, giúp học sinh tự kiểm soát và điều chỉnh đường hướng lập luận của bản thân khi giải quyết các vấn đề thực tế phức tạp. Các nhóm cũng đưa ra các căn cứ khoa học (kiến thức trong bài học, yêu cầu của bài toán) để bảo vệ quan điểm của nhóm, hoặc trả lời câu hỏi chất vấn của các nhóm khác.

Bước 3: GV nhận xét, hướng dẫn tiêu chí đánh giá lập luận và đánh giá quá trình làm việc tranh luận của các nhóm.

GV giới thiệu các phiếu câu hỏi cần giải quyết để HS biết mình cần tập trung vào điều gì khi nghe nhóm khác trình bày. Trước khi yêu cầu HS đánh giá, GV cần thực hiện mẫu việc lập luận và tự phản biện, cũng như các tiêu chí đánh giá. GV nhận xét, đánh giá và rút ra kết luận để chốt phương án giải quyết.

c. Ví dụ minh họa

Ví dụ 4. Rèn luyện khả năng giải quyết bài toán và chất vấn qua dạy học tranh luận.

Bước 1: GV tổ chức HS sinh làm việc nhóm

GV chia lớp học thành 6 nhóm, mỗi nhóm gồm từ 5 đến 6 HS. GV giao nhiệm vụ học tập cho các nhóm nghiên cứu, thảo luận và xây dựng phương án giải quyết đối với hai tình huống toán học như sau:

Tình huống 1: Để tạo giá thể trồng nấm, HS cần trộn mùn cưa, cám gạo và bột ngô theo tỉ lệ 5 : 3 : 2. Lớp học dự định thực hiện một mẻ giá thể có tổng khối lượng là 50 kg. Hãy tính khối lượng mỗi loại nguyên liệu cần dùng theo kế hoạch. Tuy nhiên, khi chuẩn bị nguyên

liệu thực tế, HS phát hiện trong kho thực hành hiện chỉ còn đúng 12 kg cám gạo. GV yêu cầu HS thảo luận xem nhóm có thể tiếp tục làm mẻ giá thể 50 kg như dự định ban đầu hay không, và nếu không thì phải xử lý như thế nào để bảo đảm yêu cầu kĩ thuật.

Tình huống 2: GV giao bài toán cơ bản: Ba lớp 7A, 7B, 7C thu gom được tổng cộng 150 kg giấy vụn. Khối lượng giấy của ba lớp tỉ lệ với các số 4, 5, 6. Tính khối lượng giấy mỗi lớp thu gom được. Sau khi HS hoàn thành bài toán này, GV nâng cao yêu cầu: Từ cấu trúc logic và các mối quan hệ tỉ lệ đã biết, các nhóm hãy tự thiết kế một câu hỏi mới bằng cách thay đổi dữ kiện tổng khối lượng 150 kg thành một loại dữ kiện khác, sao cho bài toán mới vẫn giải được bằng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau.

Nhận xét tình huống thiết kế: hai tình huống trên không yêu cầu học sinh tính ra số kg các loại cụ thể theo tỉ lệ cho trước (không tập trung vào đáp án cụ thể), mà đây là bài toán mở, giúp học sinh nhận ra rằng khi điều kiện thực tế thay đổi, cần điều chỉnh kế hoạch nhưng vẫn phải giữ điều kiện đúng tỉ lệ đã cho ban đầu.

Các nhóm tiến hành làm việc, ghi nhận kết quả và chuẩn bị hệ thống câu hỏi phản biện để chất vấn các nhóm khác trong phiên tranh luận.

Bước 2: Tổ chức phiên tranh luận

GV điều hành phiên tranh luận giữa các nhóm HS để làm rõ bản chất toán học của từng phương án giải quyết.

Đối với tình huống 1: Nhóm 1 trình bày cách tính toán ban đầu:

Gọi x, y, z lần lượt là khối lượng mùn cưa, cám gạo và bột ngô cần dùng (đơn vị: kg; $x, y, z > 0$).

Lập dãy tỉ số bằng nhau: $\frac{x}{5} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2}$ và tổng $x + y + z = 50$.

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta được:

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2} = \frac{x + y + z}{5 + 3 + 2} = \frac{50}{10} = 5.$$

Suy ra $x = 5.5 = 25$; $y = 5.3 = 15$; $z = 5.2 = 10$.

Vậy khối lượng mùn cưa là 25 kg, cám gạo là 15 kg và bột ngô là 10 kg.

Nhóm 2 chất vấn đặt câu hỏi phản biện: Khối lượng cám gạo tính là 15 kg, nhưng thực tế trong kho chỉ còn 12 kg. Nếu nhóm bạn vẫn muốn giữ nguyên khối lượng mùn cưa là 25 kg và bột ngô là 10 kg, nhưng chỉ cho vào 12 kg cám gạo thì có đạt yêu cầu không?

Nhóm 1 trình bày thực hiện kiểm tra và lập luận giải quyết mâu thuẫn: Nếu giữ nguyên lượng mùn cưa và bột ngô mà giảm lượng cám gạo xuống 12 kg thì tỉ lệ 5 : 3 : 2 không còn hợp lý, giá thể không đạt tiêu chuẩn sinh học để nấm phát triển. Do đó, cám gạo là yếu tố giới hạn toàn bộ mẻ giá thể, nhóm không thể thực hiện mẻ 50 kg như kế hoạch.

Nhóm 2 tranh luận tiếp tục với câu hỏi: Vậy phương án điều chỉnh của nhóm bạn để giải quyết bài toán thực tế này là gì?

Nhóm trình bày đưa ra lập luận tái thiết lập bài toán: Cần phải dùng lượng cám gạo thực tế hiện có là 12 kg làm mốc cố định để tính khối lượng các nguyên liệu khác nhằm bảo đảm đúng tỉ lệ. Chỉ ra lập luận dựa trên biểu thức: $\frac{x}{5} = \frac{12}{3} = \frac{z}{2}$. Vì $\frac{12}{3} = 4$, nên ta có hệ số tỉ

lệ mới là 4. Từ đó tính được khối lượng mùn cưa cần dùng là $x = 5 \times 4 = 20$ kg, khối lượng bột ngô là $z = 2 \times 4 = 8$ kg. Tổng khối lượng mẻ giá thể thực tế nhóm thực hiện được là $20 + 12 + 8 = 40$ kg để bảo đảm tính chính xác về mặt sinh học.

Đối với tình huống 2:

Nhóm 3 trình bày bài toán mới tự thiết kế: Biết lớp 7C thu gom được nhiều hơn lớp 7A là 20 kg giấy vụn. Hãy tính khối lượng giấy của mỗi lớp.

Nhóm 4 trình bày bài toán có cấu trúc phức tạp hơn: Biết tổng khối lượng giấy của lớp 7A và 7B nhiều hơn khối lượng giấy của lớp 7C là 30 kg. Hãy tính khối lượng giấy của mỗi lớp.

Giáo viên yêu cầu các nhóm tiến hành chất vấn lẫn nhau để chứng minh tính khả thi của bài toán do nhóm mình tự đặt ra.

Nhóm 4 chất vấn Nhóm 3: Nhóm bạn dựa vào căn cứ kiến thức nào để khẳng định đề bài toán do nhóm bạn đưa ra là logic và tính toán được kết quả cụ thể cho từng lớp?

Nhóm 3 lập luận bảo vệ tính đúng đắn của bài toán:

Gọi a , b , c lần lượt là khối lượng giấy vụn thu gom được của ba lớp 7A, 7B, 7C (đơn vị: kg; $a, b, c > 0$).

Ta có dãy tỉ số bằng nhau: $\frac{a}{4} = \frac{b}{5} = \frac{c}{6}$. Dữ kiện thay thế: $a + b - c = 30$.

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta được: $\frac{a}{4} = \frac{b}{5} = \frac{c}{6} = \frac{a + b - c}{4 + 5 - 6}$.

Thay các giá trị vào biểu thức, ta được tỉ số mới là $\frac{30}{3} = 10$.

Hệ số tỉ lệ thu được là một số nguyên dương, hoàn toàn tính được kết quả cụ thể cho khối lượng giấy của từng lớp là $a = 40$ kg, $b = 50$ kg, $c = 60$ kg. Điều này chứng minh cấu trúc bài toán chúng tôi tự thiết kế là hợp lý về mặt toán học.

Bước 3: GV hướng dẫn tiêu chí đánh giá lập luận và đánh giá quá trình làm việc tranh luận của các nhóm.

GV kết thúc phiên tranh luận, định hướng HS chính xác hóa ngôn ngữ toán học và đưa ra các tiêu chí đánh giá cụ thể để các nhóm tự đối chiếu, chấm điểm lẫn nhau.

Bảng 3. Tiêu chí đánh giá lập luận và quá trình làm việc tranh luận của các nhóm

Tiêu chí	Nội dung đánh giá	Điểm tối đa	Điểm dự kiến
Tiêu chí đánh giá cấu trúc lập luận toán học	– HS thực hiện chính xác các quy tắc biến đổi đại số và áp dụng đúng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau để giải quyết.	2,0	
	– HS biết phân tích các điều kiện biên và các yếu tố giới hạn định lượng trong thực tiễn để điều chỉnh mô hình toán học phù hợp.	1,5	

Tiêu chí	Nội dung đánh giá	Điểm tối đa	Điểm dự kiến
Tiêu chí đánh giá quá trình làm việc và tranh luận	– Bài toán thiết kế phải bảo đảm tính chính xác, hợp lý và các số liệu đưa ra phải tương thích với cấu trúc của dãy tỉ số.	1,5	
	– HS biết lắng nghe, phân tích luận điểm của nhóm bạn để phát hiện các sai sót hoặc nhầm lẫn toán học và điều kiện thực tế để đặt câu hỏi chất vấn.	2,0	
	– Sử dụng ngôn ngữ toán học rõ ràng, mạch lạc, biết viện dẫn các định lý, tính chất làm căn cứ để giải thích và bảo vệ kết quả của nhóm.	1,5	
	– Phiên tranh luận diễn ra khách quan, tôn trọng ý kiến của các thành viên và tập trung vào việc tìm kiếm phương án tối ưu của vấn đề.	1,5	
Tổng		10	

Phân tích cơ hội phát triển NLTD&LLTH cho HS: Qua ví dụ, GV tạo môi trường tranh luận khoa học, HS được thực hiện các thao tác tư duy và vận dụng kiến thức vào thực tế, HS được tham gia đặt câu hỏi và trả lời trong lập luận, từ đó tạo tiền đề cho tư duy phản biện và giải quyết vấn đề liên quan. Thông qua việc đối chiếu với các tiêu chí đánh giá do GV hướng dẫn, HS có cơ hội nhìn nhận lại quá trình trình bày lập luận của bản thân và của nhóm bạn một cách khách quan.

4. Thảo luận

Các biện pháp sư phạm được đề xuất đã thể hiện tính phù hợp với nội dung Tỉ lệ thức – Toán 7. Việc tích hợp các bài toán thực tế ở biện pháp 1 và hệ thống câu hỏi gợi mở ở biện pháp 2 tạo điều kiện thuận lợi để học sinh thực hiện các thao tác tư duy cơ bản như phân tích, so sánh và khái quát hóa khi tiếp cận nội dung tỉ lệ thức. Với biện pháp 3 và biện pháp 4, việc chú trọng vào mô hình suy diễn và tổ chức hoạt động tranh luận học thuật đã giúp học sinh hình thành thói quen lập luận có luận cứ rõ ràng, từ đó phát triển khả năng tư duy phản biện và tự điều chỉnh. Tác động của các biện pháp này không chỉ nâng cao hiệu quả giải toán mà còn giúp học sinh nhận thức được vai trò ứng dụng của toán học trong đời sống.

5. Kết luận

Nghiên cứu đã hệ thống hóa cơ sở lý luận và đề xuất bốn biện pháp sư phạm cụ thể nhằm phát triển NLTD&LLTH cho học sinh lớp 7 thông qua nội dung Tỉ lệ thức, góp phần hình thành môi trường học tập tích cực, giúp học sinh được rèn luyện thao tác tư duy, biết đưa ra lập luận và phản biện phù hợp với yêu cầu giáo dục trong thời đại công nghệ số. Các biện pháp này bước đầu mang lại ý nghĩa thực tiễn đối với giáo viên trong việc đổi mới phương pháp giảng dạy, cung cấp cho GV những ý tưởng trong thiết kế các hoạt động dạy học theo hướng phát triển NLTD&LLTH. Trong tương lai, các hướng nghiên cứu tương tự có thể mở rộng phạm vi dạy học trên các chủ đề kiến thức khác của chương trình Toán trung học cơ sở.

Tài liệu tham khảo

Bộ Giáo dục và Đào tạo. (2018a). *Chương trình giáo dục phổ thông- Chương trình tổng thể* (ban hành kèm theo Thông tư số 32/2018/TT-Bộ GDĐT ngày 26/12/2018 của Bộ trưởng Bộ GDĐT).

- Bộ Giáo dục và Đào tạo. (2018b). *Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán* (ban hành kèm theo Thông tư số 32/2018/TT-Bộ GDĐT ngày 26/12/2018 của Bộ trưởng Bộ GDĐT).
- Bùi, T. N. H. (2024). *Phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học cho học sinh thông qua dạy học chương Biểu thức đại số - Toán 7*. Luận văn thạc sĩ Khoa học giáo dục, Trường Đại học Đồng Tháp.
- Đỗ, Đ. T. (Chủ biên), Lê, Đ. A., Đỗ, T. Đ., Nguyễn, S. H., Nguyễn, T. P. L., Phạm, S. N., & Phạm, Đ. Q. (2022). *Toán 7 tập một (Cánh Diều)*. Hà Nội: NXB Đại học Sư phạm.
- Nguyễn, D. H., & Phạm, T. K. N. (2023). Phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học cho học sinh lớp 7 thông qua dạy học chủ đề các đại lượng tỉ lệ. *Tạp chí Thiết bị giáo dục*, 2(297), 25-27.
- Nguyễn, T. K. N. (2024). Một số biện pháp phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học cho học sinh trong dạy học giải các bài toán chủ đề Đa thức ở trung học cơ sở. *Tạp chí Giáo dục*, 24(12), 6-10. <https://tcgd.tapchigiaoduc.edu.vn/index.php/tapchi/article/view/1999>
- Nguyễn, T. T. T. (2025). Một số biện pháp phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học cho học sinh trong dạy học chủ đề Phân số (Toán 6). *Tạp chí Giáo dục*, 36-40. <https://tcgd.tapchigiaoduc.edu.vn/index.php/tapchi/article/view/2912>
- Niss, M. (2003). *Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project*.
- OECD. (2022). *Education at a glance 2022: OECD indicators*. OECD Publishing.
- Trần, N. M. Đ., & Nguyễn, D. H. (2025). Phát triển năng lực giải quyết vấn đề toán học cho học sinh lớp 7 trong dạy học chủ đề “Đại lượng tỉ lệ”. *Tạp chí Khoa học Đại học Đồng Tháp*, 14(01S), 130-141. <https://doi.org/10.52714/dthu.14.01S.2025.1562>