SẮC SỐ, ĐA THỨC TÔ MÀU VÀ TÍNH DUY NHẤT TÔ MÀU CỦA ĐỒ THỊ K_2^r

• Lê Xuân Hùng[(*)]

Tóm tắt

Một trong những vấn đề chủ yếu trong lý thuyết đồ thị là bài toán tô màu đồ thị. Đặc biệt là xác định sắc số, đa thức tô màu và nghiên cứu tính duy nhất tô màu của đồ thị. Trong bài báo này, chúng ta sẽ xác định sắc số, đa thức tô màu và nghiên cứu tính duy nhất tô màu của đồ thị r phần đầy đủ K_2^r.

Từ khóa: Đồ thị r phần đầy đủ, tô màu đỉnh (tô màu), sắc số, đa thức tô màu, đồ thị duy nhất tô màu.

1. Đặt vấn đề

Tất cả các đồ thị được nói tới trong bài báo này là những đơn đồ thị hữu hạn, vô hướng, không có khuyên và không có cạnh bội. Nếu G là một đồ thị thì $V(G)$ (hoặc V) được gọi là *tập đỉnh* và $E(G)$ (hoặc E) được gọi là *tập cạnh*. Số đỉnh (tương ứng, số cạnh) của một đồ thị được gọi là *cấp* (tương ứng, *cỡ*) của đồ thị đó.

Đồ thị $G' = (V', E')$ gọi là *đồ thị con* của đồ thị $G = (V, E)$ nếu $V' \subseteq V$ và $E' \subseteq E$. Nếu $U \subseteq V(G)$ thì đồ thị con với tập đỉnh là U, tập cạnh là tất cả các cạnh của G nối hai đỉnh của U, gọi là đồ thị con cảm sinh bởi G lên U và được ký hiệu là $G[U]$. Ngoài ra, một số khái niệm và ký hiệu khác được định nghĩa trong [4].

Đồ thị $G = (V, E)$ có cấp $|V(G)| = n$ và cỡ $|E(G)| = 0$ được gọi là *đồ thị rỗng*, ký hiệu là O_n.

Đồ thị $G = (V, E)$ có cấp $|V(G)| = n$ và cỡ $|E(G)| = \frac{n(n-1)}{2}$ được gọi là *đồ thị đầy đủ cấp n*, ký hiệu là K_n.

Đồ thị $G = (V, E)$ được gọi là *đồ thị r phần* nếu tồn tại một phân hoạch $V = V_1 \cup V_2 \cup ... \cup V_r$ sao cho đồ thị con $G[V_i]$, $i = 1, 2, ..., r$ là đồ thị rỗng, ta ký hiệu đồ thị r phần này là $(V_1 \cup V_2 \cup ... \cup V_r, E)$. Nếu trong đồ thị r phần $(V_1 \cup V_2 \cup ... \cup V_r, E)$, mỗi đỉnh của tập V_i đều kề với mọi đỉnh của tập V_j, ở đây $1 \le i, j \le r$ và $i \ne j$, thì ta gọi đồ thị này là *đồ thị r phần đầy đủ* và ký hiệu là $K_{|V_1|,|V_2|,...,|V_r|}$. Đồ thị r phần đầy đủ $K_{|V_1|,|V_2|,...,|V_r|}$ với $|V_1| = |V_2| = ... = |V_s| = s$ được ký hiệu là K_s^r. Đã có nhiều nghiên cứu về lớp đồ thị r phần đầy đủ, tiêu biểu là các kết quả nghiên cứu về tô màu cạnh và tô màu tổng thể cho lớp đồ thị này (xem [2] và [5]).

Giả sử G là một đồ thị và λ là một số nguyên dương. Một ánh xạ $f : V(G) \to \{1, 2, ..., \lambda\}$ được gọi là *λ-tô màu (λ-coloring)* của đồ thị G nếu với mỗi cặp đỉnh u, v kề nhau trong G ta luôn có $f(u) \ne f(v)$. Số λ nhỏ nhất để đồ thị G có λ-tô màu được gọi là *sắc số* của đồ thị G và được ký hiệu là $\chi(G)$. Đồ thị G được gọi là *k-sắc* nếu $\chi(G) = k$.

Hai λ-tô màu f và g của đồ thị G được gọi là khác nhau nếu tồn tại $u \in V(G)$ sao cho $f(u) \ne g(u)$. Ta ký hiệu $P(G, \lambda)$ (hoặc $P(G)$) là số tất cả các λ-tô màu khác nhau của đồ thị G. Người ta đã chứng minh được rằng với mọi đồ thị G, $P(G, \lambda)$ là một đa thức của λ. Đa thức này được gọi là *đa thức tô màu* của G. Khái niệm đa thức tô màu được đưa ra đầu tiên vào năm 1912 bởi Birkhoff (xem [3]) khi ông cố gắng tìm kiếm lời giải bài toán bốn màu. Đến nay đã thu được nhiều kết quả sâu sắc.

Hai đồ thị G và G' được gọi là *tương đương tô màu* hay *χ-tương đương* nếu $P(G, \lambda) = P(G', \lambda)$.

Đồ thị $G = (V, E)$ được gọi là đẳng cấu với đồ thị $G' = (V', E')$ nếu tồn tại song ánh $\varphi : V \to V'$ sao cho với mọi $u, v \in V$ ta có

[(*)] Trường Đại học Tài Nguyên và Môi trường Hà Nội.

$uv \in E \Leftrightarrow \varphi(u)\varphi(v) \in E'$. Ta ký hiệu hai đồ thị đẳng cấu G và G' là $G \cong G'$.

Đồ thị G được gọi là *duy nhất tô màu* hay χ *-duy nhất* nếu với mọi đồ thị G' tương đương tô màu với G ta đều có G và G' đẳng cấu với nhau. Như vậy, cấu trúc của đồ thị duy nhất tô màu G được xác định hoàn toàn bởi đa thức tô màu $P(G,\lambda)$.

Đã có nhiều kết quả nghiên cứu sâu sắc và lý thú về đa thức tô màu và tính duy nhất tô màu cho các lớp đồ thị khác nhau (xem [3], [7], [8] , [9] và [10]), đặc biệt trong thời gian gần đây đã có kết quả nghiên cứu về vấn đề này cho lớp đồ thị tách cực (xem [6]). Tuy vậy, đây vẫn là những vấn đề chưa được giải quyết triệt để, rất cần được quan tâm nghiên cứu nhiều hơn nữa. Trong bài báo này, chúng tôi sẽ xác định sắc số và đa thức tô màu của đồ thị K_s^r, và chứng minh được rằng đồ thị K_s^r là duy nhất tô màu.

2. Một số kết quả liên quan

Trước hết chúng tôi nhắc lại một số kết quả đã biết về sắc số của đồ thị đầy đủ.

Bổ đề 1 ([1]). *Đồ thị đầy đủ K_n có*

$$\chi(K_n) = n.$$

Tiếp theo là một số tính chất của đồ thị tương đương tô màu.

Bổ đề 2 ([9]). *Giả sử G và H là hai đồ thị tương đương tô màu. Khi đó*

(i) $|V(G)| = |V(H)|$;

(ii) $|E(G)| = |E(H)|$;

(iii) $\chi(G) = \chi(H)$;

(iv) G là liên thông khi và chỉ khi H là liên thông;

(v) G là 2-liên thông khi và chỉ khi H là 2-liên thông.

Tiếp theo là hai quy tắc đếm cơ bản hay được sử dụng để tính toán đa thức tô màu của một đồ thị.

Quy tắc cộng. *Nếu $A_1, A_2, ..., A_n$ là các tập hữu hạn đôi một rời nhau (tức là $A_i \cap A_j = \phi$ với mọi $i, j \in \{1,2,...,n\}, i \neq j$) thì*

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + ... + |A_n|.$$

Quy tắc nhân. *Nếu $A_1, A_2, ..., A_n$ là các tập hữu hạn bất kỳ và $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ là tích Đề các của các tập đó, thì*

$$|A_1 \times A_2 \times ... \times A_n| = |A_1||A_2|...|A_n|.$$

3. Kết quả chính

Trước hết chúng ta xác định sắc số của đồ thị r phần đầy đủ K_2^r.

Định lý 3. *Đồ thị r phần đầy đủ K_2^r có*

$$\chi\left(K_2^r\right) = r.$$

Chứng minh. Dễ dàng nhận thấy đồ thị K_2^r chứa đồ thị con K_r nên $\chi\left(K_2^r\right) \geq \chi\left(K_r\right)$. Do đó theo Bổ đề 1 ta có $\chi\left(K_2^r\right) \geq r$. Ta cần phải chứng minh $\chi\left(K_2^r\right) \leq r$.

Giả sử $V\left(K_2^r\right) = V_1 \cup V_2 \cup ... \cup V_r$ là một phân hoạch của tập đỉnh của đồ thị K_2^r. Xét ánh xạ

$$f : V\left(K_2^r\right) \to \{1,2,...,r\}$$

sao cho

$f(v) = i$ nếu $v \in V_i$ với mọi $i = 1,2,...,r$.

Khi đó rõ ràng f là r- tô màu của đồ thị $G = K_2^r$, hay $\chi\left(K_s^r\right) \leq r$. Vậy $\chi\left(K_s^r\right) = r$. ■

Tiếp theo chúng ta sẽ xác định đa thức tô màu của đồ thị K_2^r.

Định lý 4. *Đa thức tô màu của đồ thị $G = K_2^r$ là*

$$P(G,\lambda) = \lambda^2 (2\lambda - 3)^2 ... \left(r\lambda - \frac{3r(r-1)}{2} \right)^2.$$

Chứng minh. Giả sử ta có thể tô màu đồ thị $G = K_2^r$ bằng λ màu. Ta sẽ chứng minh công thức tính đa thức tô màu của đồ thị $G = K_2^r$ bằng phương pháp quy nạp theo r.

Với $r = 1$, đồ thị chỉ có đúng hai đỉnh v_1, v_2 và hai đỉnh này không kề nhau. Rõ ràng có λ cách tô đỉnh v_1 và λ cách tô đỉnh v_2. Theo Quy tắc nhân ta sẽ có λ^2 cách tô hai đỉnh v_1, v_2, hay $P(G,\lambda) = \lambda^2$.

Với $r = 2$, giả sử $V = V_1 \cup V_2$ là một phân hoạch của tập đỉnh của đồ thị $G = K_2^r$ và $V_1 = \{v_{11}, v_{12}\}, V_2 = \{v_{21}, v_{22}\}$. Ta sẽ lần lượt tô các đỉnh $v_{11}, v_{12}, v_{21}, v_{22}$. Ta nhận thấy, có λ cách tô đỉnh v_{11}, λ cách tô đỉnh v_{12}, nếu v_{11} và v_{12} được tô cùng một màu thì sẽ có $\lambda-1$ cách tô đỉnh v_{21} (tương tự, có $\lambda-1$ cách tô đỉnh v_{22}), nếu v_{11} và v_{12} được tô bởi hai màu khác nhau thì sẽ có $\lambda-2$ cách tô đỉnh v_{21} (tương tự, có $\lambda-2$ cách tô đỉnh v_{22}). Do đó theo Quy tắc cộng và Quy tắc nhân ta sẽ có $\lambda^2(\lambda-1+\lambda-2)(\lambda-1+\lambda-2)=\lambda^2(2\lambda-3)^2$ cách tô tất cả các đỉnh $v_{11}, v_{12}, v_{21}, v_{22}$, hay $P(G,\lambda)=\lambda^2(2\lambda-3)^2$.

Với $r>2$, giả sử định lý đã được chứng minh cho mọi đồ thị K_2^t với $1 \le t \le r-1$. Ta sẽ chứng minh định lý đúng với đồ thị $G = K_2^r$. Giả sử $V(K_2^r)=V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_r$ là một phân hoạch của tập đỉnh của đồ thị K_2^r. Đặt $G_1 = G - V_1$. Khi đó G_1 là đồ thị K_2^{r-1}. Để tô màu đồ thị $G=K_2^r$, ta sẽ lần lượt tô màu các đỉnh của đồ thị G_1 rồi sau đó tô các đỉnh của V_1. Theo giả thiết quy nạp, đa thức tô màu (số cách dùng λ màu để tô các đỉnh) của đồ thị G_1 là

$$P(G_1,\lambda)=\lambda^2(2\lambda-3)^2\ldots\left((r-1)\lambda-\frac{3(r-1)(r-2)}{2}\right)^2.$$

Tiếp theo ta cần tô tiếp các đỉnh của V_1. Giả sử $V_1=\{v_1,v_2\}$. Vì $\chi(K_2^{r-1})=r-1$ và $|V(K_2^{r-1})|=2r-2$ (theo Định lý 5), nên số màu đã dùng để tô các đỉnh của đồ thị K_2^{r-1} chỉ có thể là $r-1$, hoặc là $r,\ldots,$ hoặc là $2r-2$. Nếu số màu đã dùng để tô K_2^{r-1} là i ($i \in \{r-1, r, \ldots, 2r-2\}$), thì sẽ có $\lambda - i$ cách tô màu đỉnh v_1 (tương tự, cũng có $\lambda-i$ cách tô màu đỉnh v_2). Theo Quy tắc cộng và Quy tắc nhân, số cách tô màu các đỉnh của đồ thị $G=K_2^r$ là

$$\begin{aligned}P(G,\lambda)&=P(G_1,\lambda).\left(\lambda-(r-1)+\lambda-r+\ldots+\lambda-(2r-2)\right)^2\\&=P(G_1,\lambda).\left(r\lambda-(r-1+r+\ldots+(2r-2))\right)^2\\&=P(G_1,\lambda).\left(r\lambda-\frac{3}{2}r(r-1)\right)^2.\end{aligned}$$

Như vậy ta đã chứng minh được đa thức tô màu của đồ thị $G=K_2^r$ là

$$P(G,\lambda)=\lambda^2(2\lambda-3)^2\ldots\left(r\lambda-\frac{3r(r-1)}{2}\right)^2. \quad ■$$

Tiếp theo chúng ta tính số cạnh của đồ thị r phần đầy đủ $K_{n_1,n_2,\ldots,n_r}$.

Bổ đề 5. *Cho đồ thị r phần đầy đủ $G=K_{n_1,n_2,\ldots,n_r}$ với $r \ge 2$. Khi đó đồ thị G có số cạnh là*

$$|E(G)|=\sum_{1\le i<j\le r} n_i n_j.$$

Chứng minh. Giả sử $V(G)=V_1\cup V_2\cup\ldots\cup V_r$ là một phân hoạch của tập đỉnh của đồ thị $G=K_{n_1,n_2,\ldots,n_r}$ sao cho $|V_i|=n_i$ với mọi $i=1,2,\ldots,r.$ Ta sẽ chứng minh bổ đề bằng phương pháp quy nạp theo r.

Với $r=2$ thì ta có $|E(G)|=n_1n_2$. Bổ đề đúng.

Với $r>2$, giả sử bổ đề đã được chứng minh cho mọi đồ thị $K_{n_1,n_2,\ldots,n_t}$ với $1\le t\le r-1$. Ta sẽ chứng minh định lý đúng với đồ thị $G=K_{n_1,n_2,\ldots,n_r}$. Đặt $G' = G - V_r$. Khi đó G' là đồ thị $r-1$ phần đầy đủ $K_{n_1,n_2,\ldots,n_{r-1}}$. Theo giả thiết quy nạp ta có

$$|E(G')|=\sum_{1\le i<j\le r-1} n_i n_j.$$

Vì mỗi đỉnh của tập V_r đều nối với mọi đỉnh của đồ thị $G'=K_{n_1,n_2,\ldots,n_{r-1}}$ nên số cạnh của đồ thị $G=K_{n_1,n_2,\ldots,n_r}$ là

$$\begin{aligned}|E(G)|&=\sum_{1\le i<j\le r-1} n_i n_j+\sum_{i=1}^{r-1} n_i n_r\\&=\sum_{1\le i<j\le r} n_i n_j.\end{aligned}$$

Như vậy ta đã chứng minh xong công thức $|E(G)|=\sum_{1\le i<j\le r} n_i n_j$. ■

Từ Bổ đề 5 ta suy ra số cạnh của đồ thị K_2^r.

Bổ đề 6. *Số cạnh của đồ thị $G=K_2^r$ là*

$$|E(K_2^r)|=2r(r-1).$$

Chứng minh. Đồ thị K_2^r chính là đồ thị $K_{n_1,n_2,...,n_r}$ với $n_1 = n_2 = ... = n_r = 2$. Theo Bổ đề 5 ta có

$$|E(G)| = \sum_{1\le i<j\le r} n_i n_j = 2^2(1+2+..+r) = 2r(r-1).$$

Như vậy ta đã chứng minh công thức $\left|E\left(K_2^r\right)\right| = 2r(r-1)$. ■

Tiếp theo ta so sánh số cạnh của đồ thị $K_{n_1,n_2,...,n_r}$ với số cạnh của đồ thị K_2^r.

Bổ đề 7. *Cho đồ thị r phần đầy đủ $G = K_{n_1,n_2,...,n_r}$ với $r \ge 2$ và $n_1 + n_2 + ... + n_r = 2r$. Khi đó ta có*

$$|E(G)| \le 2r(r-1).$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $n_1 = n_2 = ... = n_r = 2$.

Chứng minh. Giả sử $V(G) = V_1 \cup V_2 \cup ... \cup V_r$ là một phân hoạch của tập đỉnh của đồ thị $G = K_{n_1,n_2,...,n_r}$ sao cho $|V_i| = n_i$ với mọi $i = 1,2,...,r$. Ta sẽ chứng minh bổ đề bằng phương pháp quy nạp theo r.

Với $r = 2$ thì ta có $n_1 + n_2 = 4$. Ta có

$$|E(G)| = n_1 n_2 \le \frac{1}{4}(n_1 + n_2)^2 = 4 = 2r(r-1).$$

$|E(G)| = 4$ khi và chỉ khi $n_1 = n_2 = 2$.

Với $r > 2$, giả sử bổ đề đã được chứng minh cho mọi đồ thị $K_{n_1,n_2,...,n_t}$ với $1 \le t \le r-1$ và $n_1 + n_2 + ... + n_t = 2t$. Ta sẽ chứng minh định lý đúng với đồ thị $G = K_{n_1,n_2,...,n_r}$. Ta xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: Tồn tại $i \in \{1,2,...,r\}$ sao cho $n_i = 2$.

Không mất tính tổng quát ta giả sử $n_r = 2$. Đặt $G' = G - V_r$. Khi đó G' là đồ thị $r-1$ phần đầy đủ $K_{n_1,n_2,...,n_{r-1}}$ và $n_1 + n_2 + ... + n_{r-1} = 2(r-1)$. Theo giả thiết quy nạp ta có

$$\left|E\left(G'\right)\right| \le 2(r-1)(r-2).$$

Do đó ta có

$$\begin{aligned}|E(G)| &= \left|E\left(G'\right)\right| + n_r(n_1 + n_2 + ... + n_{r-1}) \\ &\le 2(r-1)(r-2) + 4(r-1) = 2r(r-1).\end{aligned}$$

Trường hợp 2: $n_i \ne 2$ với mọi $i = 1,2,...,r$.

Trong trường hợp này thì sẽ tồn tại $i \in \{1,2,...,r\}$ sao cho $n_i = 1$ (nếu $n_i \ge 3$ với mọi $i = 1,2,...,r$ thì $n_1 + n_2 + ... + n_r \ge 3r$, trái giả thiết) và tồn tại $j \in \{1,2,...,r\}$ sao cho $n_j \ge 3$ (nếu $n_i \le 1$ với mọi $i = 1,2,...,r$ thì $n_1 + n_2 + ... + n_r \le r$, trái giả thiết). Không mất tính tổng quát ta giả sử $n_1 = 1$ và $n_2 \ge 3$. Ta xây dựng đồ thị r phần $G_1 = K_{p_1,p_2,...,p_r}$ như sau:

$p_1 = n_1 + 1 = 2, p_2 = n_2 - 1$ và $p_i = n_i$ với mọi $i = 3,4,...,r$.

Theo trường hợp 1 ta có $|E(G_1)| \le 2r(r-1)$.

Mặt khác, theo Bổ đề 5 ta có

$$\begin{aligned}|E(G_1)| &= \sum_{1\le i<j\le r} p_i p_j \\ &= \sum_{3\le i\le r} p_1 p_i + \sum_{3\le i\le r} p_2 p_i + \sum_{3\le i<j\le r} p_i p_j + p_1 p_2 \\ &= \sum_{3\le i\le r} (n_1+1) n_i + \sum_{3\le i\le r} (n_2-1) n_i + \sum_{3\le i<j\le r} n_i n_j + (n_1+1)(n_2-1) \\ &= \sum_{1\le i<j\le r} n_i n_j + n_2 - n_1 - 1 \\ &= |E(G)| + n_2 - 2 \\ &\ge |E(G)| + 1.\end{aligned}$$

Do đó $|E(G)| + 1 \le 2r(r-1)$, hay $|E(G)| < 2r(r-1)$.

Như vậy ta đã chứng minh $|E(G)| \le 2r(r-1)$. Cũng từ chứng minh trường hợp 2, ta nhận thấy rằng nếu tồn tại $i \in \{1,2,...,r\}$ sao cho $n_i = 1$ và tồn tại $j \in \{1,2,...,r\}$ sao cho $n_j \ge 3$, thì $|E(G)| < 2r(r-1)$. Do đó $|E(G)| = 2r(r-1)$ khi và chỉ khi $n_1 = n_2 = ... = n_r = 2$. ■

Cuối cùng là kết quả về tính duy nhất tô màu của đồ thị K_2^r.

Định lý 8. *Đồ thị $G = K_2^r$ là đồ thị duy nhất tô màu.*

Chứng minh. Giả sử H là đồ thị sao cho $P(G) = P(H)$ (G và H là tương đương tô màu). Ta phải chứng minh G và H đẳng cấu với nhau. Với $r = 1$, hiển nhiên G và H đẳng cấu với nhau (lúc này cả G và H đều là đồ thị rỗng có hai đỉnh). Do vậy ta chỉ xét trường hợp $r \ge 2$.

Theo (iii) của Bổ đề 2, $\chi(G) = \chi(H)$. Mà theo Định lý 5 thì $\chi\left(K_2^r\right) = r$. Do đó $\chi(H) = r$. Giả sử ta đã tô màu đồ thị H bằng các màu $1,2,...,r$. Đặt

$$V_i = \{ v \in V(H) \mid v \text{ được tô màu } i \},\ i = 1,2,...,r.$$

Khi đó các đỉnh trong mỗi tập $V_i,\ i=1,2,...,r$ sẽ không kề nhau. Do đó H là đồ thị r phần $H=\left(V_1\cup V_2\cup...\cup V_r, E(H)\right)$.

Theo (i) và (ii) của Bổ đề 2 thì $|V(G)|=|V(H)|$ và $|E(G)|=|E(H)|$. Do đó $|V(H)|=|V_1|+|V_2|+...+|V_r|=2r$ và theo Bổ đề 6 thì $|E(H)|=2r(r-1)$. Áp dụng Bổ đề 7 ta suy ra H chắc chắn phải là đồ thị $K_{|V_1|,|V_2|,...,|V_r|}$ sao cho $|V_1|=|V_2|=...=|V_r|=2$. Suy ra hai đồ thị G và H đẳng cấu với nhau.

Vậy đồ thị $G=K_2^r$ là đồ thị duy nhất tô màu. ■

4. Kết luận

Việc xác định đa thức tô màu và nghiên cứu tính duy nhất tô màu của một đồ thị luôn là vấn đề khó và lý thú trong lý thuyết đồ thị. Vấn đề này đã và đang được nghiên cứu nhiều, cho đến nay đã đạt được những kết quả cơ bản và chứng minh được tính duy nhất tô màu của một số lớp đồ thị (chẳng hạn xem [6], [7], [8], [9] và [10]). Tuy nhiên vấn đề này cho đến nay vẫn chưa có lời giải tổng quát, việc tìm kiếm thêm những lớp đồ thị duy nhất tô màu vẫn cần được quan tâm nghiên cứu nhiều hơn nữa. Với hướng tiếp cận đó, bài báo này đã nghiên cứu lớp đồ thị K_2^r, kết quả chính thu được là đã xác định được đa thức tô màu của đồ thị K_2^r, đồng thời cũng chứng minh được lớp đồ thị K_2^r là duy nhất tô màu. Hy vọng trong tương lai sẽ thu được những kết quả sâu sắc hơn./.

Tài liệu tham khảo

[1]. M. Behazad and G. Chartrand and J. Cooper (1967), "The coloring numbers of complete Graphs", *J. London Math. Soc.,* (42), p. 226-228.

[2]. J. C. Bermond (1974), "Nombre chromatique total du graph r-parti complete", *J. London Math. Soc.*, 9 (2), p. 279-285.

[3]. G. D. Birkhoff (1912), "A determinant formula for the number of ways of coloring a map", *Annals of Math*, 14 (2), p. 42-46.

[4]. B. Bollobás (1979), *Graph theory: an introductory course*, Springer – Verlag. New York, Heidelberg, Berlin.

[5]. D. G. Hoffman and C. A. Roger (1992), "The chromatic index of complete multipartite graphs", *Journal of Graph Theory*, (16), p. 159-163.

[6]. Lê Xuân Hùng (2014), "*Sắc số, đa thức tô màu và tính duy nhất tô màu của đồ thị tách cực*", Tạp chí Khoa học và Giáo dục, Trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng, số 13(04), tr. 23-27.

[7]. K. M. Koh and K. L. Teo (1990), "The search for chromatically unique graphs", *Graphs Combin.*, 6 (3), p. 259-285.

[8]. K. M. Koh and K. L. Teo (1997), "The search for chromatically unique graphs II", *Discrete Math.,* (172), p. 59-78.

[9]. R. C. Read (1968), "An introduction to chromatic polynomials", *J. Combin. Theory*, 4 (1), p. 52-71.

[10]. R. C. Read (1987), "Connectivity and chromatic uniqueness", *Ars Combin.,* (23), p. 209-218.

CHROMATIC NUMBER, CHROMATIC POLYNOMIALS AND CHROMATICALLY UNIQUE FOR K_2^r

Summary

One of the fundamental issues in graph theory is the graph-coloring problem. In particular, it is to determine the chromatic number, chromatic polynomials of graphs and to characterize chromatically unique graphs. In this paper, we determine the chromatic number, chromatic polynomials and characterize chromatically unique for K_2^r.

Keywords: Complete *r*-partite graph, vertex coloring (coloring), chromatic number, chromatic polynomials, chromatically unique graph.

Ngày nhận bài: 05/7/2017; Ngày nhận lại: 05/12/2017; Ngày duyệt đăng: 12/02/2018.