ĐẠO HÀM STUDNIARSKI SUY RỘNG VÀ ỨNG DỤNG

• Đặng Thị Bích Vân(*), Võ Đức Thịnh(**)

Tóm tắt

Trong bài báo này, chúng tôi giới thiệu và thiết lập một số tính chất của đạo hàm Studniarski suy rộng. Sau đó, chúng tôi đưa ra một số áp dụng của đạo hàm này trong việc nghiên cứu tính ổn định của ánh xạ đa trị và trong nghiên cứu điều kiện tối ưu.

Từ khóa: Đạo hàm Studniarski suy rộng, điều kiện tối ưu, ổn định.

1. Giới thiệu

Đạo hàm là một khái niệm quan trọng trong việc nghiên cứu điều kiện tối ưu. Năm 1630, Fermat đã giới thiệu khái niệm đạo hàm (theo nghĩa cổ điển) để nghiên cứu điều kiện cần cho cực trị của một hàm số bậc hai. Sau đó, nhiều tác giả đã mở rộng các khái niệm đạo hàm để nghiên cứu cực trị của các hàm số phức tạp hơn như: đạo hàm theo hướng, đạo hàm Fréchet [4], đạo hàm Studniarski [5]... Các đạo hàm này thường được gọi chung là đạo hàm suy rộng. Ngoài việc mở rộng các khái niệm đạo hàm cho ánh xạ đơn trị, việc đề xuất, mở rộng khái niệm đạo hàm cho ánh xạ đa trị cũng được quan tâm. Các đạo hàm suy rộng cho ánh xạ đa trị có thể kể đến như: đạo hàm Fréchet, đạo hàm Bouligand, đạo hàm Studniarski [1], [7], [11]. Nhiều tính chất của các đạo hàm suy rộng của ánh xạ đa trị đã được nghiên cứu. Hơn nữa, việc áp dụng các đạo hàm suy rộng này vào nghiên cứu một số bài toán tối ưu cũng được quan tâm và đạt được một số kết quả [1], [2], [3], [4], [7], [10], [11]. Một cách tiếp cận khác để nghiên cứu các đạo hàm suy rộng cho các ánh xạ đơn trị và đa trị là cách tiếp cận trên không gian đối ngẫu. Với cách tiếp cận này, nhiều loại đạo hàm suy rộng khác đã được giới thiệu như các loại đạo hàm dưới vi phân cho ánh xạ đơn trị, các loại đối đạo hàm cho ánh xạ đa trị [8], [9].

Trong bài viết này, chúng tôi giới thiệu một số loại đạo hàm suy rộng mới kiểu Studniarski và nghiên cứu một số tính chất của chúng. Áp dụng các kết quả đạt được, chúng tôi nghiên cứu tính φ-ổn định của ánh xạ đa trị. Trong trường hợp $\varphi(t)=t^m, m\in\mathbb{N}$, đạo hàm Studniarski suy rộng của chúng tôi trở về đạo hàm trên Studniarski đã biết trong [1], [7], [11]. Hơn nữa tính chất φ-ổn định trở thành tính chất ổn định bậc m được nghiên cứu trong [1].

2. Đạo hàm Studniarski suy rộng

Trong bài báo này nếu không nói gì thêm, chúng tôi giả thiết X, Y là hai không gian định chuẩn, B_Y là hình cầu đơn vị trong Y. Cho $F: X\to 2^Y$. *Miền hữu hiệu, tập đồ thị* của F được xác định như sau: $\operatorname{dom}F=\{x\in X \mid F(x)\neq\phi\}$, $\operatorname{gr}F=\{(x,y)\mid y\in F(x)\}$. Cho K là nón trong Y, ta kí hiệu $F_+(x)=F(x)+K$. Cho hàm $\varphi:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$. Khi đó φ được gọi là *tựa nhân tính* nếu $\varphi(t)>0$, với mọi $t\neq 0$ và $\varphi(ab)\le\varphi(a)\varphi(b)$, với mọi $a,b>0, ab<1$. Cho dãy số thực (t_n), ký hiệu $t_n\to 0^+$ nghĩa là $t_n\to 0$ và $t_n>0$ với mọi n.

Định nghĩa 2.1. Cho $F: X\to 2^Y$ là một ánh xạ đa trị và $(x_0,y_0)\in\operatorname{gr}F$.

(i) ([1], Định nghĩa 2.3) F được gọi là *nửa liên tục dưới* tại (x_0,y_0) nếu với mọi lân cận mở V của y_0 tồn tại lân cận mở U của x_0 sao cho với mọi $x\in U, V\cap F(x)\neq\phi$.

(ii) F được gọi là *φ-ổn định* tại (x_0,y_0) nếu tồn tại hằng số $L>0$ và lân cận mở U của x_0 sao cho với mọi $x\in U\setminus\{x_0\}$, $F(x)\subset\{y_0\}+L\varphi(\|x-x_0\|)B_Y$, trong đó B_Y là hình cầu đơn vị trong Y.

Định nghĩa 2.2 ([1], Định nghĩa 3.1). Cho $F: X\to 2^Y$ là một ánh xạ đa trị và $(x_0,y_0)\in\operatorname{gr}F$. *Đạo hàm trên Studniarski bậc m* của F tại (x_0,y_0) được định nghĩa bởi:

(*) Sinh viên, Trường Đại học Đồng Tháp.

(**) Trường Đại học Đồng Tháp.

$$\bar{D}^m F(x_0,y_0)(u)=\{v\in Y \mid \exists t_n\to 0^+,(u_n,v_n)\to(u,v)$$
$$\text{sao cho } \forall n, y_0+t_n^m v_n\in F(x_0+t_nu_n)\}.$$

Bằng cách thay t_n^m trong định nghĩa đạo hàm trên Studniarski bậc m bởi $\varphi(t_n)$ và cách xác định các dãy trong Định nghĩa 2.2, chúng tôi giới thiệu các khái niệm đạo hàm Studniarski suy rộng như sau:

Định nghĩa 2.3. Cho $F: X\to 2^Y$ là một ánh xạ đa trị và $(x_0,y_0)\in \mathrm{gr}F$. *Đạo hàm φ-Studniarski* của F tại (x_0,y_0) được định nghĩa bởi:

$$D^{\varphi}F(x_0,y_0)(u)=\{v\in Y \mid \exists t_n\to 0^+,(u_n,v_n)\to(u,v)$$
$$\text{sao cho } \forall n, y_0+\varphi(t_n)v_n\in F(x_0+t_nu_n)\}.$$

Định nghĩa 2.4. Cho $F: X\to 2^Y$ là một ánh xạ đa trị và $(x_0,y_0)\in \mathrm{gr}F$. *Đạo hàm φ-Studniarski chặt* của F tại (x_0,y_0) được định nghĩa bởi:

$$\hat{D}^{\varphi}F(x_0,y_0)(u)=\{v\in Y \mid \forall t_n\to 0^+,u_n\to u,\exists v_n\to v$$
$$\text{sao cho } \forall n, y_0+\varphi(t_n)v_n\in F(x_0+t_nu_n)\}.$$

Ví dụ 2.5. Giả sử $X=Y=\mathbb{R}$ và $F_{2n}: X\to 2^Y$, $n=1,2,3...$ được xác định bởi:

$$F_{2n}(x):=\{y\in Y: y\ge x^{2n}\},\ \forall x\in X.$$

Giả sử $(x_0,y_0)=(0,0)$ với $n=1$ chúng ta có:

$$\bar{D}^2F_2(0,0)(u)=\{v\in Y: v\ge u^2\},\ \forall u\in X.$$

Với $\varphi(t)=t^2$ ta có:

$$D^{\varphi}F_2(0,0)(u)=\{v\in\mathbb{R}\mid v\ge u^2\},\ \forall u\in X.$$
$$\hat{D}^{\varphi}F_2(0,0)(u)=\{v\in\mathbb{R}\mid v\ge u^2\},\ \forall u\in X.$$

Với $\varphi(t)=e^t$ ta có:

$$D^{\varphi}F_2(0,0)(u)=\{v\in\mathbb{R}\mid v\ge 0\}=\mathbb{R}^+,\ \forall u\in X.$$

Nhận xét 2.6. *Trong trường hợp $\varphi(t)=t^m$ thì $D^{\varphi}F$ trở thành $\bar{D}^mF$.*

Định lí 2.7. *Cho $F_i: X\to 2^Y$ là các ánh xạ đa trị và $(x_0,y_i)\in grF_i$, $i=1,2$. Khi đó với mọi $u\in X$, ta có:*

$$D^{\varphi}(F_1+F_2)(x_0,y_1+y_2)(u)\supseteq D^{\varphi}F_1(x_0,y_1)(u)+\hat{D}^{\varphi}F_2(x_0,y_2)(u).$$

Chứng minh:

Giả sử $v\in D^{\varphi}F_1(x_0,y_1)(u)+\hat{D}^{\varphi}F_2(x_0,y_2)(u)$. Khi đó tồn tại $w_1\in D^{\varphi}F_1(x_0,y_1)(u)$ và $w_2\in\hat{D}^{\varphi}F_2(x_0,y_2)(u)$ sao cho $v=w_1+w_2$. Vì $w_1\in D^{\varphi}F_1(x_0,y_1)(u)$ nên ta có từ Định nghĩa 2.3 rằng $\exists t_n\to 0^+, u_n\to u, v_n\to w_1$ sao cho

$$y_1+\varphi(t_n)v_n\in F_1(x_0+t_nu_n). \qquad (2.1)$$

Vì $w_2\in\hat{D}^{\varphi}F_2(x_0,y_2)(u)$ nên với các dãy $\bar{t}_n:=t_n\to 0^+, \bar{u}_n:=u_n\to u$. Khi đó tồn tại dãy $\bar{v}_n\to w_2$ thỏa mãn

$$y_2+\varphi(t_n)\bar{v}_n\in F_2(x_0+t_nu_n),\ \forall n. \qquad (2.2)$$

Từ (2.1) và (2.2) suy ra

$$y_1+y_2+\varphi(t_n)(v_n+\bar{v}_n)\in(F_1+F_2)(x_0+t_nu_n).$$

Do đó $v=w_1+w_2\in D^{\varphi}(F_1+F_2)(x_0,y_1+y_2)(u)$.

Vậy

$$D^{\varphi}(F_1+F_2)(x_0,y_1+y_2)(u)\supseteq D^{\varphi}F_1(x_0,y_1)(u)+\hat{D}^{\varphi}F_2(x_0,y_2)(u).\ \square$$

Ví dụ sau chỉ ra rằng nếu thay $\hat{D}^{\varphi}=D^{\varphi}$ thì Định lí 2.7 là không đúng.

Ví dụ 2.8. Giả sử $X=Y=\mathbb{R}, C=\mathbb{R}_+$ và $F_1,F_2: X\to 2^Y$ được cho bởi:

$$F_1(x)=\begin{cases}\{1\} & \text{nếu } x=\frac{1}{n}, n=1,2,3...\\ \{0\} & \text{nếu } x=0\end{cases}\quad \text{và}$$

$$F_2(x)=\begin{cases}\{0\} & \text{nếu } x=\frac{1}{n}, n=1,2,3...\\ \{1\} & \text{nếu } x=0.\end{cases}$$

Với $\varphi(t)=e^t$ ta có:

$$D^{\varphi}F_1(0,0)(0)=\{v\in\mathbb{R}\mid \exists t_n\to 0^+,(u_n,v_n)\to(u,v)$$
$$\text{sao cho } \forall n, e^{t_n}v_n\in F_1(t_nu_n)\}$$
$$=\{0,1\}.$$

$$D^{\varphi}F_2(0,1)(0)=\{v\in\mathbb{R}\mid \exists t_n\to 0^+,(u_n,v_n)\to(u,v)$$
$$\text{sao cho } \forall n, 1+e^{t_n}v_n\in F_2(t_nu_n)\}$$
$$=\{-1,0\}.$$

Mặt khác, ta có

$$(F_1+F_2)(x)=\begin{cases}\{1\} & \text{nếu } x=\frac{1}{n}, n=1,2,3...\\ \{1\} & \text{nếu } x=0.\end{cases}$$

Suy ra $D^{\varphi}(F_1+F_2)(0,1)(0)=\{0\}$.

Vậy

$D^{\varphi}F_1(x_0,y_1)(u)+D^{\varphi}F_2(x_0,y_2)(u)\not\subset D^{\varphi}(F_1+F_2)(x_0,y_1+y_2)(u).$ □

Bao hàm thức trong Định lí 2.7 là chặt. Điều này được thể hiện trong ví dụ sau đây.

Ví dụ 2.9. Giả sử $X=Y=\mathbb{R}, C=\mathbb{R}_+$ và $F_1,F_2:X\to 2^Y$ được cho bởi:

$$F_1(x)=\begin{cases}\{1\} & \text{nếu } x=\dfrac{1}{n}, n=1,2,3...\\ \{0\} & \text{nếu } x=0\end{cases}$$ và

$$F_2(x)=\begin{cases}\{0\} & \text{nếu } x=\dfrac{1}{n}, n=1,2,3...\\ \{1\} & \text{nếu } x=0.\end{cases}$$

Với $\varphi(t)=e^t$, ta có:

$$D^{\varphi}F_1(0,1)(0)=\left\{v\in\mathbb{R}\mid \exists t_n\to 0^+,(u_n,v_n)\to(u,v)\right.$$
$$\left.\text{sao cho } 1+e^{t_n}v_n\in F_1(t_nu_n)\ \forall n\right\}=\{-1,0\}.$$

$$\hat{D}^{\varphi}F_2(0,0)(0)=\left\{v\in\mathbb{R}\mid \forall t_n\to 0^+,u_n\to u,\exists \mathrm{v}_n\to v\right.$$
$$\left.\text{sao cho } e^{t_n}v_n\in F_2(t_nu_n)\ \forall n\right\}=\phi.$$

Mặt khác, ta có

$$(F_1+F_2)(x)=\begin{cases}\{1\} & \text{nếu } x=\dfrac{1}{n}, n=1,2,3...\\ \{1\} & \text{nếu } x=0.\end{cases}$$

Suy ra $D^{\varphi}(F_1+F_2)(0,1)(0)=\{0\}$. Do đó ta có:

$D^{\varphi}(F_1+F_2)(x_0,y_1+y_2)(u)\not\supseteq D^{\varphi}F_1(x_0,y_1)(u)+\hat{D}^{\varphi}F_2(x_0,y_2)(u).$ □

3. Áp dụng

Trong mục này, chúng tôi trình bày một số áp dụng của đạo hàm Studniarski suy rộng trong việc nghiên cứu tính φ-ổn định của ánh xạ đa trị và nghiên cứu điều kiện tối ưu.

Định lí 3.1. *Giả sử Y là không gian hữu hạn chiều và $\varphi:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ là hàm tựa nhân tính. Khi đó nếu ánh xạ đa trị $F:X\to 2^Y$ là nửa liên tục dưới và φ-ổn định tại $(x_0,y_0)\in \mathrm{gr}F$ thì $D^{\varphi}F(x_0,y_0)(u)\neq\phi,\forall u\in X$.*

Chứng minh: Cho $u=0$, đây là tầm thường bởi vì chúng ta luôn có $0\in D^{\varphi}F(x_0,y_0)(0)$, vì vậy giả sử $u\neq 0$ và $t_n\to 0^+$. Với mọi lân cận mở V của y_0, tồn tại lân cận mở U của x_0 sao cho với mọi $x\in U: V\cap F(x)\neq\phi$. Vì $x_0+t_nu\to x_0$ nên $x_0+t_nu\in U$ với n đủ lớn. Do đó tồn tại $\bar{y}_n\in F(x_0+t_nu)\cap V$. Bởi tính chất φ-ổn định, tồn tại $\lambda>0$ sao cho:

$$\bar{y}_n\in F(x_0+t_nu)\subseteq\{y_0\}+\lambda\varphi(\|t_nu\|)B_Y$$
$$\subset\{y_0\}+\lambda\varphi(t_n)\varphi(\|u\|)B_Y.$$

Vì vậy $\dfrac{\|\bar{y}_n-y_0\|}{\varphi(t_n)}\leq\lambda\varphi(\|u\|)$. Điều này có nghĩa là $\{(\bar{y}_n-y_0)/\varphi(t_n)\}$ là một dãy bị chặn và có một dãy con hội tụ. Bởi Định nghĩa 2.3, giới hạn của dãy con này là một phần tử của tập $D^{\varphi}F(x_0,y_0)(u)$. □

Hai ví dụ sau chứng tỏ rằng tập $D^{\varphi}F(x_0,y_0)(u)$ có thể là tập rỗng nếu giả thiết của Định lí 3.1 không đúng.

Ví dụ 3.2. Giả sử $F:\mathbb{R}\to 2^{\mathbb{R}}$ được định nghĩa bởi:

$$F_1(x)=\begin{cases}\phi & \text{nếu } x\leq -1,\\ \{x\} & \text{nếu } -1<x<0 \text{ hoặc } x>1,\\ \{x^{1/3}\} & \text{nếu } 0\leq x\leq 1\end{cases}$$

và $\varphi(t)=t^m$.

Khi đó chúng ta có $F(x)=\{x^{1/3}\}$ với $0\leq x\leq 1$, và $D^{\varphi}F(0,0)(u)=\phi$ với mọi $m\geq 1$, ở đây F là nửa liên tục dưới tại $(0,0)$ nhưng không là φ-ổn định tại $(0,0)$. Thật vậy, với mọi V mở, $0\in V$. Giả sử $(-\varepsilon,\varepsilon)\subset V$ với $\varepsilon>0$ (nào đó). Lấy $U=(-1,1)$. Khi đó với mọi $x\in U$ ta xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: $0\leq x\leq 1$. Trong trường hợp này $F(x)=\{x^{1/3}\}$. Vì $-1<x<1$ nên $-1<x^{\frac{1}{3}}<1$. Suy ra $F(x)\cap V\neq\phi$.

Trường hợp 2: $-1<x<0$. Trong trường hợp này $F(x)=x$. Suy ra $F(x)\cap V\neq\phi$.

Do đó F là nửa liên tục dưới tại $(0,0)$.

Tiếp theo ta kiểm tra tính φ-ổn định của F tại $(0,0)$. Với mọi $L\geq 0, U$ mở chứa 0, chọn $x\in\left(-\sqrt[m-1]{\dfrac{1}{L}},0\right)\cap U_{x_0}$. Khi đó $F(x)=x$

mà $0 > x > -\sqrt[m-1]{\frac{1}{L}} \Leftrightarrow \frac{1}{|x|^{m-1}} > L \Leftrightarrow x < -L|x|^m$

$\Rightarrow x \notin L|x|^m(-1,1)$. Vậy F không là φ-ổn định tại $(0,0)$. □

Ví dụ 3.3. Giả sử $F:\mathbb{R}\to 2^{\mathbb{R}}$ được định nghĩa bởi:

$$F(x)=\begin{cases}\phi & \text{nếu } x\neq 0,\\ \{0\} & \text{nếu } x=0\end{cases}$$

và $\varphi(t)=t^m$.

Rõ ràng F là φ-ổn định vì tồn tại $L=1>0$, $U=(-1,1)$ chứa 0 sao cho $\forall x\in U\setminus\{0\}$ ta có $F(x)=\phi\subset\{0\}+L\|x\|^m B_Y$. Tuy nhiên $D^{\varphi}F(0,0)(u)=\phi$ với mọi $u\neq 0$. Do đó khẳng định của Định lí 3.1 không còn đúng nữa vì F không là nửa liên tục dưới tại 0. Thật vậy , lấy $V=(-1,1)$ lân cận mở của 0, với mọi U mở chứa 0, lấy $0\neq x\in U$ ta có $F(x)=\phi$. Suy ra $V\cap F(x)=\phi$. □

Tiếp theo chúng tôi trình bày áp dụng của đạo hàm Studniarski suy rộng để nghiên cứu điều kiện cần cho nghiệm yếu địa phương của bài toán tối ưu. Chúng tôi luôn giả thiết rằng ánh xạ φ là *nửa liên tục phải* tại 0, nghĩa là: với mọi dãy $t_n\to 0^+$, ta có $\varphi(t_n)\to 0^+$.

Giả sử X,Y,Z là các không gian định chuẩn, $C\subseteq Y, D\subseteq Z$ là các nón lồi có phần trong khác rỗng và chứa 0. Cho $S\neq\phi$, $S\subset X$, $F:S\to 2^Y$ và $G:S\to 2^Z$. Xét bài toán tối ưu như sau:

$$\begin{cases}\text{Minimize } F(x)\\ x\in S, G(x)\cap(-D)\neq\phi\end{cases}. \qquad (P)$$

Ký hiệu $A:=\{x\in S: G(x)\cap(-D)\neq\phi\}$ là *tập khả thi* của bài toán (P).

Định nghĩa 3.4. Giả sử $x_0\in A$ với A là tập khả thi của bài toán (P). Điểm $(x_0,y_0)\in\mathrm{gr}F$ được gọi là một *nghiệm yếu địa phương* của (P) nếu tồn tại lân cận mở U của x_0 sao cho $(F(A\cap U)-y_0)\cap -\mathrm{int}\,C=\phi$.

Nón tiếp tuyến trong của S tại x_0 được định nghĩa như sau:

$IT_S(x_0)=\{u\in X:\exists\delta>0,\forall t\in(0,\delta),\forall u'\in B_X(u,\delta), x_0+tu'\in S\}.$

Mệnh đề 3.5 ([5], Mệnh đề 2.3). *Nếu $S\subseteq X$ là tập lồi, $x_0\in\mathrm{cl}S$ và $\mathrm{int}S\neq\phi$ thì* $IT_{\mathrm{int}S}(x_0)=\mathrm{int\,cone}(S-x_0)$.

Bổ đề 3.6. *Nếu $z_0\in -D$, $z\in -\mathrm{int\,cone}(D+z_0)$ và tồn tại $t_n\to 0^+$, $\varphi(t_n)\to 0^+$ sao cho $\frac{1}{\varphi(t_n)}(z_n-z_0)\to z$ thì $z_n\in -\mathrm{int}D$ với mọi n.*

Chứng minh: Từ $z\in -\mathrm{int\,cone}(D+z_0)$ ta có $-z\in IT_{\mathrm{int}D}(-z_0)$. Do định nghĩa của $IT_{\mathrm{int}D}(-z_0)$ chúng ta có:

$\exists\delta>0,\forall t\in(0,\delta),\forall u'\in B_X(-z,\delta), -z_0+tu'\in\mathrm{int}D.$

Từ tính chất liên tục phải tại 0 của φ và giả thiết dãy $t_n\to 0^+$, ta có $\varphi(t_n)\to 0^+$. Do đó, không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $\varphi(t_n)<\delta,\forall n\in\mathbb{N}$. Vì $\frac{1}{\varphi(t_n)}(z_n-z_0)\to z$ nên với n đủ lớn, ta có $\frac{-1}{\varphi(t_n)}(z_n-z_0)\in B(-z,\delta)$. Do đó với n đủ lớn, ta có:

$$-z_n=-z_0+\varphi(t_n)\left(-\frac{1}{\varphi(t_n)}(z_n-z_0)\right)\in\mathrm{int}D.$$

Điều này có nghĩa là $z_n\in -\mathrm{int}D$ với mọi n. Do đó chứng minh được hoàn thành. □

Định lí 3.7. *Giả sử $x_0\in\mathrm{int}S$ và $z_0\in G(x_0)\cap(-D)$. Khi đó nếu $(x_0,y_0)\in\mathrm{gr}F$ là một nghiệm yếu địa phương của (P) thì với mọi $x\in\Omega:=\mathrm{dom}D^{\varphi}(F\times G)_+(x_0,y_0,z_0)$ ta có*

$D^{\varphi}(F\times G)_+(x_0,y_0,z_0)(x)\cap -(\mathrm{int}C\times\mathrm{int\,cone}(D+z_0))=\phi.$

Chứng minh: Giả sử rằng $D^{\varphi}(F\times G)_+(x_0,y_0,z_0)(x)\cap -(\mathrm{int}C\times\mathrm{int\,cone}(D+z_0))\neq\phi.$ Khi đó tồn tại $y\in Y$ và $z\in Z$ sao cho

$$(y,z)\in D^{\varphi}(F\times G)_+(x_0,y_0,z_0)(x) \qquad (3.1)$$

và

$$(y,z)\in -(\mathrm{int}C\times\mathrm{int\,cone}(D+z_0)) \qquad (3.2)$$

Từ (3.1) tồn tại $t_n \to 0^+$, $(u_n, v_n) \to (x, (y,z))$ sao cho $(y_0, z_0) + \varphi(t_n)(v_n) \in (F \times G)_+(x_0 + t_n u_n)$. Khi đó tồn tại $(y_n, z_n) \in (F \times G)_+(x_0 + t_n u_n)$ sao cho $(y_0, z_0) + \varphi(t_n)(v_n) = (y_n, z_n)$. Điều này tương đương với

$$\frac{(y_n, z_n) - (y_0, z_0)}{\varphi(t_n)} \to (y, z). \qquad (3.3)$$

Từ (3.2) và (3.3) cho n đủ lớn ta có

$$y_n - y_0 \in -\operatorname{int} C \qquad (3.4)$$

và từ Bổ đề 3.6, ta được:

$$z_n \in -\operatorname{int} D.$$

Bởi vì $z_n \in G_+(x_0 + t_n x_n) \cap -D,\ x_0 + t_n x_n \in A \cap U$ với n đủ lớn nên từ (3.4), ta có:

$$y_n - y_0 \in (F_+(A \cap U) - y_0) \cap -\operatorname{int} C.$$

Mâu thuẫn với Định nghĩa 3.4.

Vậy

$$D^{\varphi}(F \times G)_+(x_0, y_0, z_0)(x) \cap -(\operatorname{int} C \times \operatorname{int} \operatorname{cone}(D + z_0)) = \phi. \square$$

Bài báo này được hỗ trợ bởi Trường Đại học Đồng Tháp với Đề tài nghiên cứu khoa học mã số SPD2017.02.38./.

Tài liệu tham khảo

[1]. N. L. H. Anh (2014), "Higher-order optimality conditions in set–valued optimization using Studniarski derivatives and applications to duality", *Positivity,* (18), p. 449-473.

[2]. N. L. H. Anh and P. Q. Khanh and L. T. Tung (2011), Higher-order radial derivatives and optimality conditions in nonsmooth vector optimization, *Nonlinear Anal,* (74), p. 7365-7379.

[3]. N. L. H. Anh (2016), Sensitivity analysis in constrained set-valued optimization via Studniarski derivatives, *Positivity*, (21), p. 255-272.

[4]. J. F. Bonnans and A. Shapiro (2000), Perturbation analysis of optimization problems, *Springer-Verlag*, New York.

[5]. B. Jiménez and V. Novo (2003), "Second-order necessary conditions in set constrained differentiable vecter optimization", *Math. Methods Oper. Res*, (58), p. 299-317.

[6]. P. Q. Khanh and N. D. Tuan (2008), "Variational sets of multivalued mappings and a unified study of optimality conditions", *J. Optim. Theory Appl*, (139), p. 45-67.

[7]. D. V. Luu, (2008), "Higher-order necessary and sufficient conditions for strict local Pareto minima in tems of Studniarski's derivaties", *Optimization*, (57), p. 593-605.

[8]. B. S. Mordukhovich (2005), *Variational analysis and generalized differentiation I*, Springer, Berlin.

[9]. B. S. Mordukhovich, N. M. Nam (2014), *An easy path to convex analysis and applications,* Morgan & Claypool Publishers, Willistion.

[10]. M. Studniarski (1986), "Necessary and sufficient conditions for isolated local minima of nonsmooth functions", *SIAM J. Control Optim,* (24), p. 1044-1049.

[11]. X. K. Sun and S. J. Li (2011), "Lower Studniarski derivative of the perturbation map in parametrized vertor optimization", *Optim. Lett*, (5), p. 601-614.

GENERALIZED STUDNIARSKI DERIVATIVES AND ITS APPLICATIONS

Summary

In this paper, we introduce and state some properties of generalized Studniarski derivatives. Then, we present some applications of these derivatives in studying the stability of multi-valued maps and optimality conditions.

Keywords: Generalized Studniarski derivative, optimality conditions, stability.

Ngày nhận bài: 11/01/2018; Ngày nhận lại: 19/3/2018; Ngày duyệt đăng:10/4/2018.