SỰ TỒN TẠI VÀ XẤP XỈ ĐIỂM BẤT ĐỘNG CỦA ÁNH XẠ ĐƠN ĐIỆU THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN (E) TRONG KHÔNG GIAN BANACH SẮP THỨ TỰ

• Phạm Ái Lam(*), Nguyễn Trung Hiếu(**)

Tóm tắt

Trong bài báo này, chúng tôi giới thiệu khái niệm ánh xạ đơn điệu thỏa mãn điều kiện (E) trong không gian Banach sắp thứ tự, thiết lập sự tồn tại và xấp xỉ điểm bất động của lớp ánh xạ này bởi dãy lặp Mann trong không gian Banach lồi đều sắp thứ tự. Các kết quả này là những mở rộng của kết quả chính trong [4], [6], [7]. Đồng thời, chúng tôi cũng xây dựng ví dụ minh họa cho kết quả đạt được.

Từ khóa: Ánh xạ đơn điệu thỏa mãn điều kiện (E), dãy lặp Mann, không gian Banach sắp thứ tự.

1. Giới thiệu

Ánh xạ không giãn và những mở rộng của ánh xạ không giãn là những khái niệm quan trọng trong lĩnh vực xấp xỉ điểm bất động bởi những dãy lặp. Với những giả thiết phù hợp, nhiều sự hội tụ của những dãy lặp khác nhau như dãy lặp Mann, dãy lặp Ishikawa, dãy lặp Halpern… cho ánh xạ không giãn đã được thiết lập. Gần đây, một số tác giả quan tâm nghiên cứu những mở rộng của ánh xạ không giãn. Năm 2011, Aoyama và Kohsaka [1] đã giới thiệu khái niệm ánh xạ α-không giãn và thiết lập một số kết quả về sự hội tụ cho ánh xạ này trong không gian Banach; Garcia-Falset và cộng sự [6] đã giới thiệu khái niệm ánh xạ thỏa mãn điều kiện (E), đồng thời nghiên cứu sự tồn tại điểm bất động của lớp ánh xạ này trong không gian Banach. Năm 2015, Bachar và Khamsi [2] đã đưa ra một cách tiếp cận khác để mở rộng khái niệm ánh xạ không giãn là trang bị thứ tự trên không gian Banach và giới thiệu khái niệm ánh xạ đơn điệu không giãn, ánh xạ nửa nhóm đơn điệu không giãn và nghiên cứu xấp xỉ điểm bất động chung của họ ánh xạ nửa nhóm đơn điệu không giãn trong không gian Banach sắp thứ tự. Sau đó, Dehaish và Khamsi [4] đã thiết lập một số kết quả về xấp xỉ điểm bất động cho ánh xạ đơn điệu không giãn bởi dãy lặp Mann trong không gian Banach sắp thứ tự; Song và cộng sự [7] đã đưa ra một số điều kiện đủ cho sự tồn tại điểm bất động và xấp xỉ điểm bất động của ánh xạ đơn điệu không giãn bởi dãy lặp Mann trong không gian Banach lồi đều sắp thứ tự. Năm 2016, Song và cộng sự [8] đã giới thiệu khái niệm ánh xạ đơn điệu α- không giãn và đạt được kết quả về sự hội tụ của dãy lặp Mann cho loại ánh xạ này với những giả thiết thích hợp trong không gian Banach lồi đều sắp thứ tự. Đến đây, một vấn đề tự nhiên được đặt ra là có thể tiếp tục mở rộng những khái niệm ánh xạ không giãn suy rộng khác từ không gian Banach sang không gian Banach sắp thứ tự, đồng thời nghiên cứu sự tồn tại và xấp xỉ điểm bất động của những lớp ánh xạ mới này trong không gian Banach sắp thứ tự. Do đó, trong bài báo này, chúng tôi đặt vấn đề xây dựng khái niệm ánh xạ đơn điệu thỏa mãn điều kiện (E) trong không gian Banach sắp thứ tự, thiết lập sự tồn tại và xấp xỉ điểm bất động của lớp ánh xạ này bởi dãy lặp Mann trong không gian Banach lồi đều sắp thứ tự. Trước hết, chúng tôi trình bày một số khái niệm và kết quả cơ bản được sử dụng trong bài báo.

Định nghĩa 1.1 ([4], Definition 2.1)**.** Cho $(X,\preceq)$ là không gian Banach sắp thứ tự, C là tập con khác rỗng trong X và $f:C\to C$ là ánh xạ. Khi đó,

(1) f được gọi là *ánh xạ đơn điệu* trong C nếu $f(u)\preceq f(v)$ với mọi $u,v\in C$ mà $u\preceq v$.

(2) f được gọi là *ánh xạ đơn điệu không giãn* trong C nếu f là ánh xạ đơn điệu và $\|f(u)-f(v)\|\le\|u-v\|$ với mọi $u,v\in C$ mà $u\preceq v$.

Xét dãy lặp Mann $\{u_n\}$ xác định bởi: $u_1\in C, u_{n+1}=a_nu_n+(1-a_n)f(u_n)$ với mọi $n\in\mathbb{N}^*$, trong đó $\{a_n\}$ là dãy trong $(0,1)$, C là tập lồi và ánh xạ f là ánh xạ từ C vào C. Một số tính chất của dãy lặp Mann cho ánh xạ đơn điệu trong không gian Banach sắp thứ tự được thiết lập như sau:

(*) Sinh viên, Trường Đại học Đồng Tháp.
(**) Trường Đại học Đồng Tháp.

Bổ đề 1.2 ([4], Lemma 3.1). *Cho* $(X,\preceq)$ *là không gian Banach sắp thứ tự,* C *là một tập con lồi đóng khác rỗng trong* X, $f:C\to C$ *là ánh xạ đơn điệu và* $\{u_n\}$ *là dãy lặp Mann thỏa mãn* $f(u_1)\preceq u_1$ *(hoặc* $u_1\preceq f(u_1)$*). Khi đó*

(1) $f(u_{n+1})\preceq f(u_n)\preceq u_{n+1}\preceq u_n$ *(hoặc* $u_n\preceq u_{n+1}\preceq f(u_n)\preceq f(u_{n+1})$*).*

(2) *Nếu dãy* $\{u_n\}$ *hội tụ yếu đến điểm* $u\in C$ *thì* $u\preceq u_n$ *(hoặc* $u_n\preceq u$*) với mọi* $n\in\mathbb{N}^*$.

Khái niệm ánh xạ thỏa mãn điều kiện (E) trong không gian Banach được giới thiệu bởi Garcia-Falset và cộng sự như sau:

Định nghĩa 1.3 ([6], Definition 2). Cho X là không gian Banach, C là tập con khác rỗng trong X và $f:C\to C$ là một ánh xạ. Khi đó, f được gọi là *ánh xạ thỏa mãn điều kiện* (E) nếu tồn tại $\mu\ge 1$ sao cho $\|u-f(v)\|\le\mu\|u-f(u)\|+\|u-v\|$ với mọi $u,v\in C$.

Trong [5], Dozo đã giới thiệu khái niệm điều kiện Opial yếu trong không gian Banach như sau:

Định nghĩa 1.4 ([5], Definition 1.1). Cho X là không gian Banach. Không gian X được gọi là *thỏa mãn điều kiện Opial yếu* nếu với mỗi $u\in X$ và với mỗi dãy $\{u_n\}$ hội tụ yếu đến u, ta có

$$\liminf_{n\to\infty}\|u_n-v\|>\liminf_{n\to\infty}\|u_n-u\|$$

với mọi $v\neq u$. (2.1)

Lưu ý rằng trong [5], Dozo đã chứng minh rằng bất đẳng thức (2.1) tương đương với $\limsup_{n\to\infty}\|u_n-v\|>\limsup_{n\to\infty}\|u_n-u\|$ với mọi $v\neq u$.

Định nghĩa 1.5 ([3], p. 46, p. 189). Cho X là không gian Banach. Khi đó

(1) Không gian X được gọi là *lồi đều* nếu với mọi $\varepsilon\in(0,2]$, tồn tại $\delta>0$ sao cho $\left\|\frac{u+v}{2}\right\|<1-\delta$ với $u,v\in X$ mà $\|u\|=\|v\|=1$ và $\|u-v\|\ge\varepsilon$.

(2) Kí hiệu X^* là tập hợp các phiếm hàm tuyến tính liên tục từ X vào $\mathbb{R}$ và X^{**} là tập hợp các phiếm hàm tuyến tính liên tục từ X^* vào $\mathbb{R}$. Xét ánh xạ chính tắc $J:X\to X^{**}$ xác định bởi $J(u)(f)=f(u)$ với $u\in X$, $f\in X^*$. Khi đó, X được gọi là *không gian Banach phản xạ* nếu $J(X)=X^{**}$.

Nhận xét 1.6 ([3], Proposition 6). *Nếu* X *là không gian Banach lồi đều thì* X *là không gian Banach phản xạ.*

Bổ đề 1.7 ([10], Theorem 2). *Với số thực* $q\ge 1$ *và* $r\ge 0$. *Không gian Banach* X *là lồi đều nếu và chỉ nếu tồn tại hàm liên tục lồi tăng nghiêm ngặt* $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ *sao cho* $\varphi(0)=0$ *và* $\|tu+(1-t)v\|^q\le t\|u\|^q+(1-t)\|v\|^q-\omega(q,t)\varphi(\|u-v\|)$ *với mọi* $u,v\in B_r(0):=\{u\in E:\|u\|\le r\}$, $\omega(q,t)=t^q(1-t)+t(1-t)^q$, $t\in[0,1]$. *Đặc biệt, với* $q=2, t=\frac{1}{2}$, *ta có*

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|^2\le\frac{1}{2}\|u\|^2+\frac{1}{2}\|v\|^2-\frac{1}{4}\varphi(\|u-v\|).$$

Bổ đề 1.8 ([9], Theorem 1.3.11). *Cho* X *là không gian Banach phản xạ,* C *là tập con lồi đóng khác rỗng của* X, $g:C\to\mathbb{R}$ *là hàm nửa liên tục dưới và* $\lim_{\|x\|\to\infty}g(x)=\infty$. *Khi đó, tồn tại* $u\in C$ *sao cho* $g(u)=\inf\{g(v):v\in C\}$.

2. Các kết quả chính

Trước hết, chúng tôi giới thiệu khái niệm ánh xạ đơn điệu thỏa mãn điều kiện (E) trong không gian Banach sắp thứ tự.

Định nghĩa 2.1. Cho $(X,\preceq)$ là không gian Banach sắp thứ tự, C là tập con khác rỗng trong X và $f:C\to C$ là ánh xạ. Khi đó, f được gọi là *ánh xạ đơn điệu thỏa mãn điều kiện* (E) nếu f là ánh xạ đơn điệu và tồn tại $\mu\ge 1$ sao cho $\|u-f(v)\|\le\mu\|u-f(u)\|+\|u-v\|$ với mọi $u,v\in C$ mà $u\preceq v$ hoặc $v\preceq u$.

Nhận xét 2.2. *Mỗi ánh xạ đơn điệu không giãn là một ánh xạ đơn điệu thỏa mãn điều kiện* (E). Thật vậy, giả sử $f:C\to C$ ánh xạ đơn điệu không giãn. Khi đó, f là ánh xạ đơn điệu và với mọi $\mu\ge 1$, $u\preceq v$ hoặc $v\preceq u$, ta có

$$\begin{aligned}\|u-f(v)\|&\le\|u-f(u)\|+\|f(u)-f(v)\|\\&\le\mu\|u-f(u)\|+\|u-v\|.\end{aligned}$$

Do đó, f là ánh xạ đơn điệu thỏa mãn điều kiện (E).

Ví dụ sau chứng tỏ rằng tồn tại ánh xạ đơn điệu thỏa mãn điều kiện (E) nhưng không là ánh xạ thỏa mãn điều kiện (E) và cũng không là ánh xạ đơn điệu không giãn.

Ví dụ 2.3. Xét $X=\mathbb{R}$ với chuẩn giá trị tuyệt đối, $C=[0,2]$ là tập con của $\mathbb{R}$ và ánh xạ $f:C\to C$ được xác định bởi $f(u)=\dfrac{u^2}{2}$ với $u\in C.$ Khi đó, f không là ánh xạ thỏa mãn điều kiện $(E).$ Thật vậy, bằng cách chọn $u=2,\ v=1$ và với $\mu\geq 1,$ ta có

$$\|u-f(v)\|=\frac{3}{2} \text{ và } \mu\|u-f(u)\|+\|u-v\|=1.$$

Do đó, f không là ánh xạ thỏa mãn điều kiện $(E).$

Trên $\mathbb{R}$ xét quan hệ thứ tự $\preceq$ như sau: $u\preceq v$ khi và chỉ khi $u\leq v$ trên $\mathbb{R}$ và $u,v\in[0,2).$ Khi đó f là ánh xạ đơn điệu thỏa mãn điều kiện (E) nhưng f không là ánh xạ đơn điệu không giãn. Thật vậy, với $u\preceq v,$ ta có $u,v\in[0,2).$ Do đó, $f(u),f(v)\in[0,2)$ và

$$f(u)-f(v)=\frac{u^2}{2}-\frac{v^2}{2}=\frac{1}{2}(u-v)(u+v)\leq 0.$$

Suy ra $f(u)\preceq f(v).$ Do đó, f là ánh xạ đơn điệu. Tiếp theo, ta chứng minh tồn tại $\mu\geq 1$ sao cho với $u\preceq v$ hoặc $v\preceq u,$ ta có $\|u-f(v)\|\leq\mu\|u-f(u)\|+\|u-v\|.$ Ta chỉ cần xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1. Với $u=0,\ v\in[0,2)$ ta có

$$\begin{aligned}\|u-f(v)\|&=\|0-\frac{v^2}{2}\|\\&=\frac{v^2}{2}\\&\leq v\\&=\|0-v\|\\&=\mu\|u-f(u)\|+\|u-v\|.\end{aligned}$$

Trường hợp 2. Với $u\in(0,2),\ v\in[0,2)$ ta có

$$\begin{aligned}\|u-f(v)\|&=\|u-v+v-f(v)\|\\&\leq\|v-f(v)\|+\|u-v\|.\end{aligned}$$

Đặt $g(v)=v-f(v)=v-\dfrac{v^2}{2}.$ Khi đó, với $t\in(0,2)$ ta có $0<g(t)\leq\dfrac{1}{2}.$ Do đó, tồn tại $\mu\geq 1$ sao cho

$$\|v-f(v)\|=\|v-\frac{v^2}{2}\|<\frac{1}{2}\leq\mu g(u)=\mu\|u-f(u)\|.$$

Suy ra

$$\|u-f(v)\|\leq\mu\|u-f(u)\|+\|u-v\| \text{ với } \mu\geq 1.$$

Từ hai trường hợp trên, ta suy ra tồn tại $\mu\geq 1$ sao cho với $u\preceq v$ hoặc $v\preceq u,$ ta có

$$\|u-f(v)\|\leq\mu\|u-f(u)\|+\|u-v\|.$$

Do đó, f là ánh xạ đơn điệu thỏa mãn điều kiện $(E).$ Tuy nhiên, f không là ánh xạ đơn điệu không giãn. Thật vậy, bằng cách chọn $u=1$ và $v=1{,}9$ ta có

$$\|f(u)-f(v)\|=1{,}305\geq 0{,}9=\|u-v\|.$$

Do đó, f không phải là ánh xạ đơn điệu không giãn. □

Kí hiệu $F(f)=\{u\in C: f(u)=u\}$ là tập hợp điểm bất động của ánh xạ $f:C\to C$ và $F_{\preceq}(f)=\{p\in F(f): p\preceq u_1\}$ với u_1 là số hạng thứ nhất trong dãy lặp Mann. Tiếp theo, chúng tôi thiết lập sự tồn tại điểm bất động của ánh xạ đơn điệu thỏa mãn điều kiện (E) trong không gian Banach lồi đều sắp thứ tự. Lưu ý rằng, trong kết quả sau, chúng ta luôn giả sử rằng thứ tự $\preceq$ và chuẩn $\|.\|$ trên X thỏa mãn điều kiện sau:

(H1): *Với $\alpha\in[0,1],$ $a\preceq b$ và $c\preceq d,$ ta có $\alpha a+(1-\alpha)c\preceq\alpha b+(1-\alpha)d.$*

(H2): *Nếu tồn tại $a,b\in X$ sao cho $a\preceq u\preceq b$ với $u\in X$ thì tồn tại $\lambda>0$ sao cho*

$$\|u\|\leq\lambda\max\{\|a\|,\|b\|\}.$$

Mệnh đề 2.4. *Cho $(X,\preceq)$ là không gian Banach lồi đều sắp thứ tự, C là tập con lồi đóng khác rỗng trong X và $f:C\to C$ là ánh xạ đơn điệu thỏa mãn điều kiện $(E),$ $\{u_n\}$ là dãy lặp Mann thỏa mãn $f(u_1)\preceq u_1,$ $\liminf\limits_{n\to\infty}\|u_n-f(u_n)\|=0$ và tồn tại $v\in C$ sao cho $v\preceq u_n$ với mọi $n\in\mathbb{N}^*.$ Khi đó, $F_{\preceq}(f)\neq\varnothing.$*

Chứng minh. Vì $\liminf\limits_{n\to\infty}\|u_n-f(u_n)\|=0$ nên tồn tại dãy con $\{u_{n(k)}\}$ của $\{u_n\}$ sao cho $\lim\limits_{k\to\infty}\|u_{n(k)}-f(u_{n(k)})\|=0.$ Hơn nữa, theo Bổ đề

1.2.(1), ta có $u_{n(k)+1} \preceq u_{n(k)} \preceq u_1$ với mọi $k \in \mathbb{N}^*$. Kết hợp với giả thiết nên $v \preceq u_{n(k)}$ với mọi $k \in \mathbb{N}^*$, ta có $\{u_{n(k)}\}$ là dãy bị chặn.

Đặt $C_k = \{z \in C : z \preceq u_{n(k)}\}$ với mọi $k \in \mathbb{N}^*$. Khi đó, C_k là tập lồi đóng khác rỗng với mọi $k \in \mathbb{N}^*$. Thật vậy, vì $v \preceq u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ nên $v \preceq u_{n(k)}$ với mọi $k \in \mathbb{N}^*$. Điều này có nghĩa là $v \in C_k$ với mọi $k \in \mathbb{N}^*$. Do đó, C_k là tập khác rỗng với mọi $k \in \mathbb{N}^*$.

Với mỗi $k \in \mathbb{N}^*$, giả sử $\{u_m^{(k)}\}$ là dãy trong C_k và $\{u_m^{(k)}\}$ hội tụ đến $u^{(k)}$. Khi đó, $u_m^{(k)} \in C$ và

$$u_m^{(k)} \preceq u_{n(k)}. \tag{2.2}$$

Do $\{u_m^{(k)}\}$ là dãy trong C, hội tụ đến $\{u^{(k)}\}$ và C là tập đóng nên $u^{(k)} \in C$. Hơn nữa, cho $m \to \infty$ trong (2.2), sử dụng Bổ đề 1.2.(2), ta được $u^{(k)} \preceq u_{n(k)}$. Do đó $u^{(k)} \in C_k$ hay C_k là tập đóng.

Tiếp theo, ta chứng minh C_k là tập lồi với mỗi $k \in \mathbb{N}^*$. Với mọi $u, v \in C_k$, $\lambda \in [0,1]$ ta cần chứng minh $\lambda u + (1-\lambda)v \in C_k$. Thật vậy, vì $u, v \in C_k$ nên $u, v \in C$. Do C là tập lồi và $u, v \in C$ nên $\lambda u + (1-\lambda)v \in C$. Do $u \preceq u_{n(k)}$ và $v \preceq u_{n(k)}$ nên theo giả thiết (H1), ta có $\lambda u + (1-\lambda)v \preceq \lambda u_{n(k)} + (1-\lambda)u_{n(k)} = u_{n(k)}$. Vậy $\lambda u + (1-\lambda)v \in C_k$ hay C_k là tập lồi.

Đặt $K = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$. Khi đó, K là một tập con lồi đóng khác rỗng trong C. Vì $v \preceq u_{n(k)} \preceq u_1$ với mọi $k \in \mathbb{N}^*$ nên theo giả thiết (H2) ta có $\{u_{n(k)}\}$ là dãy bị chặn theo chuẩn. Do đó, tồn tại hàm $g : K \to [0,\infty)$ xác định bởi $g(z) = \limsup_{k\to\infty} \| u_{n(k)} - z\|^2$ với mọi $z \in K$. Khi đó, theo Bổ đề 1.8 tồn tại $z^* \in K$ sao cho $g(z^*) = \inf g(z)$. Suy ra

$$g(z^*) \le g(z) \text{ với mọi } z \in K. \tag{2.3}$$

Hơn nữa, theo Bổ đề 1.2.(1), ta cũng có

$$z^* \preceq \ldots \preceq u_{n(k)+1} \preceq u_{n(k)} \preceq \ldots \preceq u_{n(2)} \preceq u_{n(1)} \preceq \ldots \preceq u_1$$

với mọi $k \in \mathbb{N}^*$. (2.4)

Kết hợp (2.4) với f là ánh xạ đơn điệu và sử dụng Bổ đề 1.2.(1), ta có $f(z^*) \preceq f(u_{n(k)}) \preceq u_{n(k)}$ với mọi $k \in \mathbb{N}^*$. Do đó, $f(z^*) \in K$. Khi đó, sử dụng tính lồi của K, ta có $\frac{z^* + f(z^*)}{2} \in K$. Kết hợp điều này với (2.3), ta có

$$g(z^*) \le g\left(\frac{z^* + f(z^*)}{2}\right). \tag{2.5}$$

Hơn nữa, vì f là ánh xạ đơn điệu thỏa mãn điều kiện (E) nên tồn tại $\mu \ge 1$ sao cho

$$\| u_{n(k)} - f(z^*) \| \le \mu \| u_{n(k)} - f(u_{n(k)}) \| + \| u_{n(k)} - z^* \|$$

với mọi $k \in \mathbb{N}^*$. (2.6)

Sử dụng $\lim_{k\to\infty} \| u_{n(k)} - f(u_{n(k)}) \| = 0$ nên từ (2.6), ta được

$$\limsup_{k\to\infty} \| u_{n(k)} - f(z^*) \| \le \limsup_{k\to\infty} \| u_{n(k)} - z^* \|. \tag{2.7}$$

Từ định nghĩa của $g(z)$ và (2.7), ta được

$$\begin{aligned} g(f(z^*)) &= \limsup_{k\to\infty} \| u_{n(k)} - f(z^*) \|^2 \\ &\le \limsup_{k\to\infty} \| u_{n(k)} - z^* \|^2 \\ &= g(z^*). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Hơn nữa, từ định nghĩa của $g(z)$, (2.8) và sử dụng Bổ đề 1.7, ta được

$$\begin{aligned} & g\left(\frac{z^* + f(z^*)}{2}\right) \\ &= \limsup_{k\to\infty} \left\| u_{n(k)} - \frac{z^* + f(z^*)}{2} \right\|^2 \\ &= \limsup_{k\to\infty} \left\| \frac{u_{n(k)} - z^*}{2} + \frac{u_{n(k)} - f(z^*)}{2} \right\|^2 \\ &\le \limsup_{k\to\infty} \left(\frac{1}{2} \| u_{n(k)} - z^* \|^2 + \frac{1}{2} \| u_{n(k)} - f(z^*) \|^2 - \frac{1}{4}\varphi(\|z^* - f(z^*)\|)\right) \\ &\le \frac{1}{2} g(z^*) + \frac{1}{2} g(f(z^*)) - \frac{1}{4}\varphi(\|z^* - f(z^*)\|) \\ &\le g(z^*) - \frac{1}{4}\varphi(\|z^* - f(z^*)\|). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Kết hợp (2.5) và (2.9), ta được $\frac{1}{4}\varphi(\|z^* - f(z^*)\|) \le g(z^*) - g\left(\frac{z^* + f(z^*)}{2}\right) \le 0$. Sử dụng tính chất của hàm φ, ta có

$\frac{1}{4}\varphi(\|z^* - f(z^*)\|) = 0.$ Do đó $z^* = f(z^*)$. Kết hợp điều này với (2.4), ta đươc $z^* \in F_{\preceq}(f)$ hay $F_{\preceq}(f) \neq \varnothing.$ □

Tiếp theo, chúng tôi khảo sát một số tính chất của dãy lặp Mann với ánh xạ đơn điệu thỏa mãn điều kiện (E) trong không gian Banach sắp thứ tự.

Mệnh đề 2.5. *Cho* $(X,\preceq)$ *là không gian Banach lồi đều sắp thứ tự,* C *là tập con lồi đóng khác rỗng trong* X, $f: C \to C$ *là ánh xạ đơn điệu thỏa mãn điều kiện* (E) *sao cho* $F_{\preceq}(f) \neq \varnothing$, $\{u_n\}$ *là dãy lặp Mann thỏa mãn* $f(u_1) \preceq u_1$. *Khi đó*

(1) *Dãy* $\{u_n\}$ *là bị chặn.*

(2) $\|u_{n+1} - p\| \leq \|u_n - p\|$ *và tồn tại giới hạn* $\lim_{n\to\infty}\|u_n - p\|$ *với mọi* $p \in F_{\preceq}(f)$.

(3) *Nếu* $\limsup_{n\to\infty} a_n(1-a_n) > 0$ *thì* $\liminf_{n\to\infty}\|u_n - f(u_n)\| = 0.$

(4) *Nếu* $\liminf_{n\to\infty} a_n(1-a_n) > 0$ *thì* $\lim_{n\to\infty}\|u_n - f(u_n)\| = 0.$

Chứng minh. (1) *Chứng minh rằng* $\{u_n\}$ *là dãy bị chặn.*

Theo Bổ đề 1.2.(1), ta có $u_n \preceq u_1$ với $n \in \mathbb{N}^*$ hay $\{u_n\}$ là dãy bị chặn trên bởi u_1.

Tiếp theo ta chứng minh $p \preceq u_n$ với $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in F_{\preceq}(f)$. (2.10)

Do $F_{\preceq}(f) \neq \varnothing$ nên tồn tại $p \in F_{\preceq}(f)$ sao cho $p \preceq u_1$. Do đó, (2.10) đúng với $n = 1$.

Giả sử (2.10) đúng với $n = k \geq 1$, ta có $p \preceq u_k$ ta chứng minh $p \preceq u_{k+1}$. Thật vậy, vì $p \preceq u_k$ và f là ánh xạ đơn điệu nên $p = f(p) \preceq f(u_k)$. Mặt khác, theo Bổ đề 1.2.(1), ta có $f(u_k) \preceq u_{k+1}$. Do đó, $p \preceq u_{k+1}$. Vậy $\{u_n\}$ là dãy bị chặn.

(2) *Chứng minh rằng* $\|u_{n+1} - p\| \leq \|u_n - p\|$ *và tồn tại giới hạn* $\lim_{n\to\infty}\|u_n - p\|$ *với* $p \in F_{\preceq}(f)$.

Thật vậy, với $p \in F_{\preceq}(f)$ ta có $p \preceq u_1$. Bằng lập luận tương tự như chứng minh trong (2.10), ta có $p \preceq u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Do f là ánh xạ đơn điệu thỏa mãn điều kiện (E) nên

$$\|f(u_n) - p\| = \|p - f(u_n)\| \leq \mu\|p - f(p)\| + \|u_n - p\|$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Điều này dẫn đến

$\|f(u_n) - p\| \leq \|u_n - p\|$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. (2.11)

Ta lại có

$$\begin{aligned}\|u_{n+1} - p\| &= \|a_n u_n + (1-a_n)f(u_n) - p\| \\ &= \|a_n(u_n - p) + (1-a_n)(f(u_n) - p)\| \\ &\leq a_n\|(u_n - p)\| + (1-a_n)\|(f(u_n) - p)\|.\end{aligned}$$

Kết hợp (2.11) và (2.12), ta được

$$\|u_{n+1} - p\| \leq a_n\|(u_n - p)\| + (1-a_n)\|(u_n - p)\| = \|u_n - p\|.$$

Suy ra $\{\|u_n - p\|\}$ là dãy đơn điệu giảm. Mặt khác, ta có $0 \leq \|u_n - p\|$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Do đó, tồn tại $\lim_{n\to\infty}\|u_n - p\|$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

(3) *Chứng minh rằng nếu* $\limsup_{n\to\infty} a_n(1-a_n) > 0$ *thì* $\liminf_{n\to\infty}\|u_n - f(u_n)\| = 0.$

Sử dụng Bổ đề 1.7 với $q = 2$, $t = a_n$ và sử dụng (2.12), ta có

$$\begin{aligned}\|u_{n+1} - p\|^2 &= \|a_n(u_n - p) + (1-a_n)(f(u_n) - p)\|^2 \\ &\leq a_n\|u_n - p\|^2 + (1-a_n)\|f(u_n) - p\|^2 - a_n(1-a_n)\varphi(\|u_n - f(u_n)\|) \\ &\leq a_n\|u_n - p\|^2 + (1-a_n)\|u_n - p\|^2 - a_n(1-a_n)\varphi(\|u_n - f(u_n)\|) \\ &= \|u_n - p\|^2 - a_n(1-a_n)\varphi(\|u_n - f(u_n)\|).\end{aligned}$$

Suy ra

$$a_n(1-a_n)\varphi(\|u_n - f(u_n)\|) \leq \|u_n - p\|^2 - \|u_{n+1} - p\|^2. \quad (2.13)$$

Do giới hạn $\lim_{n\to\infty}\|u_n - p\|$ tồn tại nên từ (2.13) ta có

$$\limsup_{n\to\infty} a_n(1-a_n)\varphi(\|u_n - f(u_n)\|) = 0. \quad (2.14)$$

Giả sử $\liminf_{n\to\infty}\varphi(\|u_n - f(u_n)\|) > 0$. Khi đó,

$$\limsup_{n\to\infty}[a_n(1-a_n)\varphi(\|u_n - f(u_n)\|)]\frac{1}{\liminf_{n\to\infty}\varphi(\|u_n - f(u_n)\|)}$$

$$= \limsup_{n\to\infty}[a_n(1-a_n)\varphi(\|u_n - f(u_n)\|)]\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{\varphi(\|u_n - f(u_n)\|)}$$

$$\geq \limsup_{n\to\infty}[a_n(1-a_n)\varphi(\| u_n - f(u_n)\|)]\frac{1}{\varphi(\| u_n - f(u_n)\|)}$$
$$= \limsup_{n\to\infty} a_n(1-a_n).$$

Do đó
$$(\liminf_{n\to\infty} \varphi(\| u_n - f(u_n)\|)).(\limsup_{n\to\infty} a_n(1-a_n))$$
$$\leq \limsup_{n\to\infty} a_n(1-a_n)\varphi(\| u_n - f(u_n)\|). \quad (2.15)$$

Kết hợp (2.15) và (2.14), ta được $(\liminf_{n\to\infty} \varphi(\| u_n - f(u_n)\|)).(\limsup_{n\to\infty} a_n(1-a_n)) = 0.$ Điều này mâu thuẫn với giả thiết $\limsup_{n\to\infty} a_n(1-a_n) > 0$ và $\liminf_{n\to\infty} \varphi(\| u_n - f(u_n)\|) > 0.$ Do đó $\liminf_{n\to\infty} \varphi(\| u_n - f(u_n)\|) = 0.$ Khi đó, sử dụng tính chất của hàm $\varphi,$ ta được $\liminf_{n\to\infty} \| u_n - f(u_n)\| = 0.$

(4) *Chứng minh rằng nếu* $\liminf_{n\to\infty} a_n(1-a_n) > 0$ *thì* $\lim_{n\to\infty} \| u_n - f(u_n)\| = 0.$

Do $\liminf_{n\to\infty} a_n(1-a_n) > 0$ nên $\limsup_{n\to\infty} a_n(1-a_n) > \liminf_{n\to\infty} a_n(1-a_n) > 0.$ Khi đó, theo chứng minh trong Mệnh đề 2.5.(3), ta có
$$\liminf_{n\to\infty} \| u_n - f(u_n)\| = 0. \quad (2.16)$$

Mặt khác, lập luận tương tự như trong chứng minh bất đẳng thức (2.15), ta có
$$(\liminf_{n\to\infty} a_n(1-a_n)).(\limsup_{n\to\infty} \varphi(\| u_n - f(u_n)\|))$$
$$\leq \limsup_{n\to\infty} a_n(1-a_n)\varphi(\| u_n - f(u_n)\|). \quad (2.17)$$

Kết hợp (2.17) với (2.14) và $\liminf_{n\to\infty} a_n(1-a_n) > 0,$ ta được $\limsup_{n\to\infty} \varphi(\| u_n - f(u_n)\|) = 0.$

Khi đó, sử dụng tính chất của hàm $\varphi,$ ta được $\limsup_{n\to\infty} \| u_n - f(u_n)\| = 0.$ (2.18)

Kết hợp (2.16) và (2.18), ta được $\lim_{n\to\infty}(\| u_n - f(u_n)\|) = 0.$ □

Tiếp theo, chúng tôi chứng minh một số kết quả cho sự hội tụ của dãy lặp Mann cho ánh xạ đơn điệu thỏa mãn điều kiện (E) trong không gian Banach sắp thứ tự. Trước hết, chúng tôi giới thiệu khái niệm điều kiện đơn điệu Opial yếu trong không gian Banach sắp thứ tự.

Định nghĩa 2. 6. Cho $(X,\preceq)$ là không gian Banach sắp thứ tự. Không gian X được gọi là thỏa mãn *điều kiện đơn điệu Opial yếu* nếu với mỗi $u \in X$ và với mỗi dãy $\{u_n\}$ đơn điệu tăng (hoặc đơn điệu giảm) và hội tụ yếu đến $u,$ ta có
$$\limsup_{n\to\infty} \| u_n - v\| > \limsup_{n\to\infty} \| u_n - u\|$$
với mọi $v \neq u$ mà $u_n \preceq v$ (hoặc $v \preceq u_n$) với mọi $n \in \mathbb{N}^*.$

Kết quả sau là điều kiện đủ cho sự hội tụ yếu của dãy lặp Mann về điểm bất động của ánh xạ đơn điệu thỏa mãn điều kiện (E) trong không gian Banach lồi đều sắp thứ tự.

Định lí 2.7. *Cho $(X,\preceq)$ là không gian Banach lồi đều sắp thứ tự và thỏa mãn điều kiện đơn điệu Opial yếu, C là tập con lồi đóng khác rỗng trong X, $f: C \to C$ là ánh xạ đơn điệu thỏa mãn điều kiện (E) sao cho $F_{\preceq}(f) \neq \varnothing$, $\{u_n\}$ là dãy lặp Mann thỏa mãn $f(u_1) \preceq u_1$ và $\liminf_{n\to\infty} a_n(1-a_n) > 0.$ Khi đó, dãy $\{u_n\}$ hội tụ yếu đến $p \in F_{\preceq}(f).$*

Chứng minh. Theo Mệnh đề 2.5.(1), ta có $\{u_n\}$ là dãy bị chặn. Do X là không gian Banach lồi đều nên X là không gian Banach phản xạ. Khi đó tồn tại dãy con $\{u_{n(k)}\}$ của $\{u_n\}$ sao cho $\{u_{n(k)}\}$ hội tụ yếu đến $p \in C.$ Theo Bổ đề 1.2, ta có $p \preceq u_{n(k)} \preceq u_1.$ Do f là ánh xạ đơn điệu thỏa mãn điều kiện (E) nên
$$\| u_{n(k)} - f(p)\| \leq \mu \| u_{n(k)} - f(u_{n(k)})\| + \| u_{n(k)} - p\|. \quad (2.19)$$

Vì $\liminf_{k\to\infty} a_{n(k)}(1-a_{n(k)}) > 0$ nên theo Mệnh đề 2.5.(4), ta có
$$\lim_{k\to\infty} \| u_{n(k)} - f(u_{n(k)})\| = 0. \quad (2.20)$$

Từ (2.19) và (2.20) ta có
$$\limsup_{k\to\infty} \| u_{n(k)} - f(p)\| \leq \limsup_{k\to\infty} \| u_{n(k)} - p\|. \quad (2.21)$$

Tiếp theo ta chứng minh $p = f(p).$ Giả sử $p \neq f(p).$ Vì $p \preceq u_{n(k)}$ và f là ánh xạ đơn điệu nên từ Bổ đề 1.2.(1), ta có $f(p) \preceq f(u_{n(k)}) \preceq u_{n(k)}.$ Kết hợp với $\{u_{n(k)}\}$ là dãy hội tụ yếu đến p và $(X,\preceq)$ thỏa mãn điều kiện đơn điệu Opial yếu ta có

$\limsup_{k\to\infty}\| u_{n(k)} - f(p)\| > \limsup_{k\to\infty}\| u_{n(k)} - p\|.$

Điều này mâu thuẫn với (2.21). Do đó $p = f(p)$. Mà $p \preceq u_1$. Vì vậy $p \in F_{\preceq}(f)$. Khi đó, theo Mệnh đề 2.5.(2), ta có $\lim_{n\to\infty}\| u_n - p\|$ tồn tại.

Tiếp theo ta chứng minh $\{u_n\}$ hội tụ yếu đến $p \in F_{\preceq}(f)$. Giả sử $\{u_n\}$ không hội tụ yếu đến $p \in F_{\preceq}(f)$. Khi đó tồn tại dãy con $\{u_{n(i)}\}$ hội tụ yếu đến $u \in C$ mà $p \neq u$. Lập luận tương tự như trên ta có $u \in F_{\preceq}(f)$, $u \preceq u_{n(i)}$ và tồn tại giới hạn $\lim_{n\to\infty}\| u_n - u\|$.

Vì $p \in F_{\preceq}(f)$ và f là ánh xạ đơn điệu nên theo Bổ đề 1.2.(1), ta có $p \preceq u_{n(i)}$. Do X thỏa mãn điều kiện đơn điệu Opial yếu, ta có

$$\limsup_{i\to\infty}\| u_{n(i)} - u\| < \limsup_{i\to\infty}\| u_{n(i)} - p\|. \quad (2.22)$$

Do $\lim_{n\to\infty}\| u_n - p\|$ và $\lim_{n\to\infty}\| u_n - u\|$ tồn tại nên từ (2.22) ta có

$$\lim_{n\to\infty}\| u_n - u\| < \lim_{n\to\infty}\| u_n - p\|. \quad (2.23)$$

Vì $u \in F_{\preceq}(f)$ và f là ánh xạ đơn điệu theo Bổ đề 1.2.(1), ta có $u \preceq u_{n(k)}$. Do X thỏa mãn điều kiện đơn điệu Opial yếu, ta có

$$\limsup_{k\to\infty}\| u_{n(k)} - p\| < \limsup_{k\to\infty}\| u_{n(k)} - u\|. \quad (2.24)$$

Do $\lim_{n\to\infty}\| u_n - p\|$ và $\lim_{n\to\infty}\| u_n - u\|$ tồn tại nên từ (2.24) ta có

$$\lim_{n\to\infty}\| u_n - p\| < \lim_{n\to\infty}\| u_n - u\|.$$

Điều này mâu thuẫn với (2.23). Do đó $\{u_n\}$ hội tụ yếu đến $p \in F_{\preceq}(f)$. □

Tiếp theo, chúng tôi thiết lập hai kết quả sự hội tụ của dãy lặp Mann cho ánh xạ đơn điệu thỏa mãn điều kiện (E) trong không gian Banach lồi đều sắp thứ tự.

Định lí 2.8. *Cho* $(X,\preceq)$ *là không gian Banach lồi đều sắp thứ tự,* C *là tập con compact, lồi đóng khác rỗng trong* X, $f: C \to C$ *là ánh xạ đơn điệu thỏa mãn điều kiện* (E) *sao cho* $F_{\preceq}(f) \neq \varnothing$, $\{u_n\}$ *là dãy lặp Mann thỏa mãn* $f(u_1) \preceq u_1$ *và* $\limsup_{n\to\infty} a_n(1-a_n) > 0$. *Khi đó, dãy* $\{u_n\}$ *hội tụ đến* $p \in F_{\preceq}(f)$.

Chứng minh. Vì $\limsup_{n\to\infty} a_n(1-a_n) > 0$ và $F_{\preceq}(f) \neq \varnothing$ nên theo Mệnh đề 2.5.(3), ta có $\liminf_{n\to\infty}\| u_n - f(u_n)\| = 0$. Khi đó, tồn tại dãy con $\{u_{n(k)}\}$ của $\{u_n\}$ sao cho

$$\lim_{k\to\infty}\| u_{n(k)} - f(u_{n(k)})\| = 0. \quad (2.25)$$

Do C là tập con compact nên tồn tại $\{u_{n(k(j))}\}$ là dãy con của $\{u_{n(k)}\}$ sao cho $\{u_{n(k(j))}\}$ hội tụ đến $p \in C$. Khi đó, từ Bổ đề 1.2.(2), ta có $p \preceq u_{n(k(j))} \preceq u_1$ với mọi $j \in \mathbb{N}^*$.

Hơn nữa, vì f là ánh xạ đơn điệu thỏa mãn điều kiện (E) nên

$$\| u_{n(k(j))} - f(p)\| \leq \mu \| u_{n(k(j))} - f(u_{n(k(j))})\| + \| u_{n(k(j))} - p\|. \quad (2.26)$$

Kết hợp (2.25) và (2.26), ta có $\lim_{j\to\infty}\| u_{n(k(j))} - f(p)\| = 0$ hay $\{u_{n(k(j))}\}$ hội tụ đến $f(p)$. Kết hợp điều này với kết quả $\{u_{n(k(j))}\}$ hội tụ đến p, ta có $f(p) = p$. Mà $p \preceq u_1$. Do đó $p \in F_{\preceq}(f)$. Hơn nữa, từ Mệnh đề 2.5.(2), ta có $\lim_{n\to\infty}\| u_n - p\|$ tồn tại. Kết hợp với dãy con $\{u_{n(k(j))}\}$ của $\{u_n\}$ hội tụ đến $p \in F_{\preceq}(f)$ ta được $\{u_n\}$ hội tụ đến $p \in F_{\preceq}(f)$.

Hệ quả 2.9. *Cho* $(X,\preceq)$ *là không gian Banach lồi đều sắp thứ tự,* C *là tập con compact, lồi đóng khác rỗng trong* X, $f: C \to C$ *là ánh xạ đơn điệu thỏa mãn điều kiện* (E) *sao cho* $F_{\preceq}(f) \neq \varnothing$, $\{u_n\}$ *là dãy lặp Mann thỏa mãn* $f(u_1) \preceq u_1$ *và* $\liminf_{n\to\infty} a_n(1-a_n) > 0$. *Khi đó, dãy* $\{u_n\}$ *hội tụ đến* $p \in F_{\preceq}(f)$.

Chứng minh. Vì $\liminf_{n\to\infty} a_n(1-a_n) > 0$ nên $\limsup_{n\to\infty} a_n(1-a_n) > 0$. Do đó, các giả thiết của Định lí 2.8 được thỏa mãn. Theo Định lí 2.8, dãy $\{u_n\}$ hội tụ đến $p \in F_{\preceq}(f)$. □

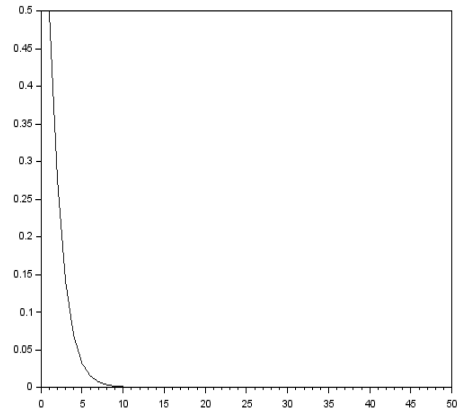
Cuối cùng, chúng tôi đưa ra ví dụ về việc ứng dụng những kết quả được thiết lập để chứng minh giới hạn của dãy số có dạng dãy lặp Mann.

Hơn nữa, ví dụ này cũng chứng tỏ rằng những kết quả được thiết lập trên áp dụng được cho ánh xạ được chỉ ra nhưng những kết quả trong [4], [6], [7] không áp dụng được.

Ví dụ 2.10. Xét dãy số $\{u_n\}$ xác định bởi $u_1 = 0.5,\quad u_{n+1} = \dfrac{n+1}{2n+3}u_n + \dfrac{n+2}{4n+6}u_n^2$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. Thật vậy, xét $X = \mathbb{R}$ với chuẩn giá trị tuyệt đối, $C = [0,2]$ là tập con của $\mathbb{R}$ và ánh xạ $f : C \to C$ được xác định bởi $f(u) = \dfrac{u^2}{2}$ với $u \in C$. Trên $\mathbb{R}$ xét quan hệ thứ tự $\preceq$ như sau: $u \preceq v$ khi và chỉ khi $u \le v$ trên $\mathbb{R}$ và $u, v \in [0,2)$. Khi đó, theo Ví dụ 2.3, ta có f là ánh xạ đơn điệu thỏa mãn điều kiện (E). Do đó, dãy $\{u_n\}$ có dạng $u_1 = 0.5$, $u_{n+1} = a_n u_n + (1-a_n) f(u_n)$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, trong đó $a_n = \dfrac{n+1}{2n+3}$. Khi đó, dãy $\{u_n\}$ thỏa mãn các giả thiết của Định lí 2.7, Định lí 2.8 và Hệ quả 2.9 và

$$F_{\preceq}(f) = \{p \in F(f) : p \preceq u_1\} = \{0\}.$$

Vì vậy, theo Định lí 2.7 hoặc Định lí 2.8 hoặc Hệ quả 2.9, ta có dãy $\{u_n\}$ hội tụ đến $p = 0 \in F_{\preceq}(f)$. Hơn nữa, bằng phần mềm Scilab-6.0.0, chúng tôi cũng minh họa dáng điệu hội tụ đến 0 của dãy $\{u_n\}$ bởi hình vẽ sau:



Hình 1

Tuy nhiên, theo Ví dụ 2.3, ta có f không là ánh xạ đơn điệu không giãn và cũng không là ánh xạ thỏa mãn điều kiện (E). Do đó, các kết quả trong [4], [6], [7] không áp dụng được cho dãy $\{u_n\}$. □

Bài báo này được hỗ trợ bởi Trường Đại học Đồng Tháp với Đề tài nghiên cứu khoa học mã số SPD2017.02.43./.

Tài liệu tham khảo

[1]. K. Aoyama and F. Kohsaka (2011), "Fixed point theorem for α-nonexpansive mapping in Banach space", *Nonlinear Anal.*, (74), p. 4387-4391.

[2]. M. Bachar and M. A. Khamsi (2015), "On common approximate fixed points of monotone nonexpansive semigroups in Banach spaces", *Fixed Point Theory Appl.*, (2015:160), p. 1-12.

[3]. B. Beauzamy (1982), *Introduction to Banach spaces and their geometry*, North-Holland, Amsterdam.

[4]. B. A. B. Dehaish and M. A. Khamsi (2015), "Mann iteration process for monotone nonexpansive mappings", *Fixed Point Theory Appl.*, (2015:177), p. 1-8.

[5]. E. L. Dozo (1973), "Multivalued nonexpansive mappings and Opial's condition", *Proc. Amer. Math. Soc.***,** 38 (2), p. 286-292.

[6]. J. Garcia-Falset, E. Llorens-Fuster, and T. Suzuki (2011), "Fixed point theory for a class of generalized nonexpansive mappings", *J. Math. Anal. Appl.*, 375 (1), p. 185-195.

[7]. Y. Song, P. Kumam, and Y. J. Cho (2016), "Fixed point theorems and iterative approximations for monotone nonexpansive mappings in ordered Banach spaces", *Fixed Point Theory Appl.*, (2016:73), p. 1-11.

[8]. Y. Song, K. Promluang, P. Kumam, and Y. J. Cho (2016), "Some convergence theorems of the Mann iteration for monotone α-nonexpansive mappings", *Appl. Math. Comput.*, (287-288), p. 74-82.

[9]. W. Takahashi (2000), *Nonlinear functional analysis: Fixed point theory and its applications*, Yokohama Publishers Inc., Yokohama.

[10]. H. K. Xu (1991), "Inequality in Banach space with applications", *Nonlinear Anal.*, (16), p. 1127-1138.

ON THE EXSITENCE AND APPROXIMATION OF FIXED POINTS OF MONOTONE MAPPINGS SATISFYING CONDITION (E) IN PARTIALLY ORDERED BANACH SPACES

Summary

In this paper, we introduce the notion of a monotone mapping satisfying condition (E) in partially ordered Banach spaces, and establish the exsitence and the approximation of fixed points of such mappings by the Mann iteration process in partially ordered uniformly convex Banach spaces. These results are the generations of the main results in [4, 6, 7]. Also, we provide examples to illustrate the obtained results.

Keywords: Monotone mapping satisfying condition (E), Mann iteration, partially ordered Banach spaces.

Ngày nhận bài: 19/01/2018; Ngày nhận lại: 05/03/2018; Ngày duyệt đăng:10/4/2018.