SỰ ĐỒNG BỘ HÓA TRONG MẠNG LƯỚI GỒM HAI HỆ PHƯƠNG TRÌNH FITZHUGH-NAGUMO KHI CÓ DÒNG ĐIỆN KÍCH HOẠT TỪ BÊN NGOÀI

• Phan Văn Long Em(*)

Tóm tắt

Bài báo nghiên cứu điều kiện cần và đủ cho độ mạnh liên kết để xảy ra sự đồng bộ hóa của mạng lưới gồm hai phương trình FitzHugh-Nagumo (FHN) khi chịu ảnh hưởng của một tham số, cụ thể là tần số của dòng điện tác động từ bên ngoài. Bằng cách sử dụng phương pháp hàm số Lyapunov sẽ tìm được điều kiện đủ và bằng số mũ Lyapunov xuyên ngang lớn nhất sẽ tìm được điều kiện cần cho độ mạnh liên kết. Kết quả thu được cho thấy sự đồng bộ hóa xảy ra khi độ mạnh liên kết đủ lớn. Bài báo còn trình bày kết quả bằng phương pháp số để kiểm tra lại kết quả lý thuyết thu được.

Từ khóa: Độ mạnh liên kết, hệ phương trình FitzHugh-Nagumo, hàm số Lyapunov, số mũ Lyapunov xuyên ngang lớn nhất, sự đồng bộ hóa.

1. Đặt vấn đề

Sự đồng bộ hóa là một hiện tượng vô cùng quan trọng trong tự nhiên và trong khoa học phi tuyến, đặc biệt là trong mạng lưới các hệ phương trình dao động được liên kết yếu với nhau [8], [9]. Điều đó có nghĩa là các hệ phương trình sẽ có cùng đặc tính ở cùng thời điểm. Do đó, đối với một mạng lưới gồm hai hệ phương trình thì sự đồng bộ hóa có nghĩa là hệ phương trình này sẽ sao chép những đặc tính của hệ phương trình kia kể từ một thời điểm nào đó. Khi đó, mạng lưới các hệ phương trình được gọi là *đồng bộ*.

Trong bộ não con người có rất nhiều tế bào, chúng liên kết với nhau tạo thành một mạng lưới tế bào. Một mạng lưới tế bào là một hệ thống các tế bào được liên kết với nhau về mặt sinh lý học. Sự trao đổi giữa chúng chủ yếu là dựa vào các quá trình điện hóa. Bài báo này trình bày sự đồng bộ hóa của hệ thống hai tế bào liên kết tuyến tính với nhau. Trong đó, mỗi tế bào được mô tả bằng một hệ phương trình vi phân FitzHugh-Nagumo (FHN).

Năm 1952, Hodgkin và Huxley đã đưa ra một mô hình toán học bốn chiều có thể xấp xỉ được các tính chất hoạt náo của điện áp tế bào [4]. Dựa trên mô hình này, rất nhiều mô hình đơn giản hơn đã được công bố nhằm mô tả sự hoạt náo của điện áp tế bào. Năm 1962, FitzHugh R. và Nagumo J. đã công bố một mô hình mới mang tên Mô hình FitzHugh-Nagumo (FHN) được biết là mô hình hai chiều đơn giản hóa từ hệ phương trình nổi tiếng của Hodgkin-Huxley [2], [7]. Tuy là mô hình đơn giản hơn, nhưng nó có nhiều kết quả giải tích đáng chú ý và giữ được các tính chất, ý nghĩa về mặt sinh học. Mô hình này được tạo thành từ hai phương trình của hai biến u và v. Biến đầu tiên là biến nhanh, được gọi là biến hoạt náo, nó thể hiện cho điện áp của màng tế bào. Biến thứ hai là biến chậm, nó thể hiện cho một số đại lượng vật lí phụ thuộc thời gian như độ dẫn điện của dòng ion đi ngang qua màng tế bào.

Hệ phương trình FitzHugh-Nagumo được biểu diễn bởi hệ sau:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = u(u-1)(1-bu) - v + s(t), \\ \dfrac{dv}{dt} = cu, \end{cases} \tag{1}$$

trong đó, b, c là các hằng số dương, $s(t)$ là dòng điện kích hoạt từ bên ngoài được cho bởi công thức:

$$s(t) = \frac{a}{2\pi f}\cos 2\pi ft, \tag{2}$$

với a và f tương ứng là các biên độ và tần số của dòng điện kích hoạt từ bên ngoài.

Trong những năm gần đây, sự đồng bộ hóa đã được nghiên cứu rộng rãi trên nhiều lĩnh vực, nhiều hiện tượng tự nhiên cũng phản ánh sự đồng bộ hóa như sự di chuyển tạo thành từng đám mây của đàn chim, sự di chuyển của đàn cá chép trong hồ, sự di chuyển của đoàn diễu hành, sự nhận và truyền thông tin của một nhóm các tế bào… [1], [2], [7]. Chính vì thế việc nghiên cứu về sự đồng bộ hóa trong mạng lưới các tế bào là hết sức cần thiết. Để cho việc nghiên cứu trở nên dễ dàng hơn, trong bài báo này chỉ xét mạng lưới hai tế bào liên kết tuyến tính với nhau, nghiên

(*) Trường Đại học An Giang.

cứu tìm ra điều kiện cần và đủ cho sự đồng bộ hóa xảy ra trên mạng lưới đang xét.

2. Sự đồng bộ hóa trong mạng lưới gồm hai hệ phương trình FitzHugh-Nagumo

Từ hệ phương trình (1), mạng lưới hai hệ phương trình FitzHugh-Nagumo liên kết tuyến tính với nhau được biểu diễn như sau:

$$\begin{cases} \dfrac{du_1}{dt} = u_1(u_1-1)(1-bu_1) - v_1 - g(u_1-u_2) + s(t), \\ \dfrac{dv_1}{dt} = cu_1, \\ \dfrac{du_2}{dt} = u_2(u_2-1)(1-bu_2) - v_2 - g(u_2-u_1) + s(t), \\ \dfrac{dv_2}{dt} = cu_2, \end{cases} \tag{3}$$

trong đó, $u_i, v_i, i=1,2$ là các biến của tế bào thứ i và g là độ mạnh liên kết $(g>0)$.

Định nghĩa 1. *Hệ phương trình (3) được gọi là đồng bộ hóa nếu với mọi điều kiện ban đầu $u_i(0), v_i(0), i=1,2,$ ta đều có:*

$$\lim_{t\to\infty}\|u_1(t)-u_2(t)\| = 0 \text{ và } \lim_{t\to\infty}\|v_1(t)-v_2(t)\| = 0.$$

a. Điều kiện đủ cho sự đồng bộ hóa

Đặt $e_1 = u_2 - u_1, e_2 = v_2 - v_1$ là sai số đồng bộ hóa của các biến trong hệ phương trình (3). Khi đó, hệ phương trình vi phân của các sai số trên được cho bởi:

$$\begin{cases} \dfrac{de_1}{dt} = \left[-1-2g+(1+b)(u_1+u_2) - b(u_1^2+u_1u_2+u_2^2)\right]e_1 - e_2, \\ \dfrac{de_2}{dt} = ce_1. \end{cases} \tag{4}$$

Định lí 1. *Nếu độ mạnh liên kết g thỏa mãn điều kiện $g > \dfrac{M\left[(2(1+b)+3Mb\right]-1}{2}$, trong đó M là cận trên của giá trị tuyệt đối của điện thế màng tế bào, thì với mọi điều kiện ban đầu $u_i(0), v_i(0), i=1,2,$ hệ phương trình (3) sẽ đồng bộ hóa.*

Chứng minh. Chú ý rằng $(0,0)$ là điểm kì dị duy nhất của hệ phương trình (4). Chọn hàm số Lyapunov như sau:

$$E(e_1,e_2) = c\alpha e_1^2 + \alpha e_2^2,$$

trong đó, α là hằng số dương. Lấy đạo hàm theo thời gian của hàm số Lyapunov trên, ta được

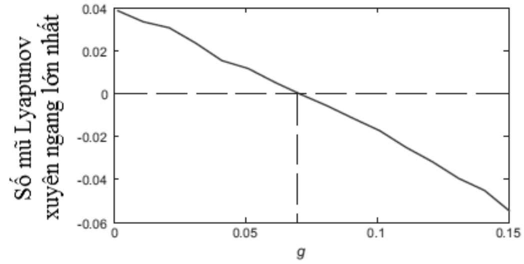
$$\begin{aligned} &\frac{dE(e_1,e_2)}{dt} \\ &= 2c\alpha e_1\frac{de_1}{dt} + 2\alpha e_2\frac{de_2}{dt} \\ &= 2\alpha\left[-1-2g+(1+b)(u_1+u_2) - b(u_1^2+u_1u_2+u_2^2)\right]e_1^2. \end{aligned} \tag{5}$$

Vì nghiệm của hệ phương trình (4) bị chặn [6], đặt cận trên là M (tức là $|u_i| \le M, i=1,2$). Nên $\dfrac{dE(e_1,e_2)}{dt} \le -2\alpha\left[1+2g-M(2(1+b)+3Mb)\right]e_1^2$. Do đó, nếu $1+2g-M(2(1+b)+3Mb)>0$ thì $\dfrac{dE(e_1,e_2)}{dt} < 0$. Đặt $\Gamma = \left\{(e_1,e_2) : \dfrac{dE(e_1,e_2)}{dt} = 0\right\}$. Từ (5), $\Gamma = \{(e_1,e_2) : e_1 = 0\}$. Trong tập bất biến Γ, ta luôn có $\dfrac{de_1}{dt} = 0$. Suy ra $e_2 = 0$. Do đó, $(0,0)$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình (4). Sử dụng Định lí LaSalle [5], ta có $(0,0)$ là điểm ổn định tiệm cận toàn cục. Định lí đã được chứng minh.

Định lí trên cung cấp điều kiện đủ để cho sự đồng bộ hóa của hệ (4), nhưng không phải là điều kiện cần. Nói cách khác, nếu độ mạnh liên kết không thỏa mãn Định lí 1 thì không có nghĩa là hệ phương trình (4) không có sự đồng bộ hóa. Thật vậy, bằng phương pháp số ta có thể kiểm tra được rằng độ mạnh liên kết không thỏa mãn điều kiện đủ nói trên, nhưng hệ phương trình (4) vẫn đồng bộ hóa (xem Hình 3).

b. Điều kiện cần cho sự đồng bộ hóa

Theo các nghiên cứu [8], [9], [10] thì điều kiện cần thiết cho sự đồng bộ hóa là số mũ Lyapunov xuyên ngang lớn nhất $\left(L_{\max}^{\perp}\right)$ nhận giá trị âm. Bằng phương pháp số, ta có thể tính được số mũ Lyapunov xuyên ngang lớn nhất được biểu diễn như trong Hình 1. Theo Hình 1, số mũ Lyapunov xuyên ngang lớn nhất nhận giá trị âm khi $g \ge 0{,}07$. Nghĩa là, nếu giá trị của độ mạnh liên kết thỏa mãn điều kiện này thì hệ phương trình (4) sẽ đồng bộ hóa.



Hình 1. Mối tương quan giữa số mũ Lyapunov xuyên ngang lớn nhất và độ mạnh liên kết (sự đồng bộ hóa xảy ra nếu $g \ge 0{,}07$, với $b=10$, $c=1$, $a=0{,}1$, $f=0{,}129$)

Có một chú ý quan trọng rằng, điều kiện cần ở trên không phải là điều kiện đủ cho sự đồng bộ hóa. Theo kết quả nghiên cứu của các bài báo [4] thì sự không đồng bộ hóa cũng có thể xảy ra ngay cả khi số mũ Lyapunov xuyên ngang lớn nhất nhận giá trị âm.

3. Mô phỏng

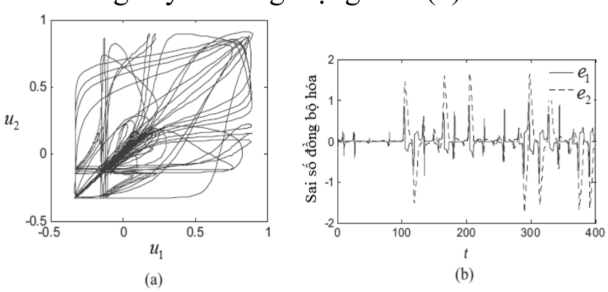
Để kiểm tra hiệu quả của các điều kiện cần và đủ nói trên, cũng như so sánh các điều kiện này, kết quả tính toán của bài báo được thực hiện trên C++ và dùng thuật toán Runge-Kutta để lấy tích phân hệ phương trình (4) với bước thời gian $\Delta t = 0,005$. Các giá trị tham số được chọn như sau:

$$b = 10, c = 1, a = 0,1, f = 0,129,$$

cùng với các điều kiện ban đầu:

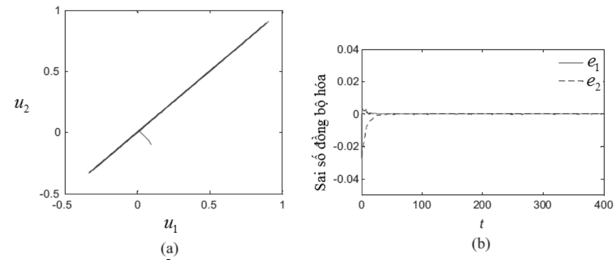
$$(u_1(0); v_1(0); u_2(0); v_2(0)) = (0,1;\ 0;\ -0,1;\ 0,1).$$

Với $g = 0,05$, cả hai điều kiện cần và đủ đều không thỏa mãn (xem Hình 2). Sự đồng bộ hóa không xảy ra trong mạng lưới (4).



Hình 2. Sự không đồng bộ hóa của hệ phương trình (4) với $g = 0,05$: (a) sự tương quan giữa u_1 và u_2, (b) sai số đồng bộ hóa $e_1 = u_2 - u_1$, $e_2 = v_2 - v_1$

Với $g = 2$, điều kiện đủ không thỏa mãn, nhưng điều kiện cần thì thỏa mãn $(L_{\max}^{\perp} = -0,2321)$. Xem Hình 3, ta thấy có sự đồng bộ hóa xảy ra trong hệ phương trình (4), nhưng điều kiện đủ thì không được thỏa mãn.



Hình 3. Sự đồng bộ hóa của hệ phương trình (4) với $g = 2$, (a) sự tương quan giữa u_1 và u_2, (b) sai số đồng bộ hóa $e_1 = u_2 - u_1$, $e_2 = v_2 - v_1$

4. Kết luận

Bài báo đã đưa ra kết quả về sự đồng bộ hóa của mạng lưới hai hệ phương trình FitzHugh-Nagumo liên kết tuyến tính với nhau. Sự đồng bộ hóa xảy ra khi độ mạnh liên kết đủ lớn. Ngoài ra, nghiên cứu còn đưa ra được điều kiện cần và đủ của độ mạnh liên kết để có thể đạt được sự đồng bộ hóa trong mạng lưới đang xét. Sự đồng bộ hóa trong mạng lưới các tế bào là rất quan trọng và thường diễn ra trong não bộ con người, đóng vai trò trong việc truyền đạt thông tin. Nghiên cứu này cung cấp một sự hiểu biết về hiện tượng đồng bộ hóa giữa hai tế bào, đặc biệt việc nghiên cứu này có thể phát triển lên bằng việc nghiên cứu sự đồng bộ hóa của một hệ thống rất nhiều tế bào liên kết với nhau./.

Tài liệu tham khảo

[1]. Braun, H. A., Wissing, H., Schäfer, K., & Hirsch, M. C. (1994), “Oscillation and noise determine signal transduction in shark multimodel sensory cells”, *Nature,* (Vol. 367), pp. 270-273.

[2]. Fitzhugh, R. (1960), “Thresholds and plateaus in the Hodgkin–Huxley nerve equations”, *J. Gen. Physiol.,* (Vol. 43), pp. 867-896.

[3]. Heagy, J. F., Carroll, T. L., & Pecora, L. M. (1995), “Desynchronization by periodic orbits”, *Phys. Rev. E.,* (Vol. 52), pp. 1253-1256.

[4]. Hodgkin, A. L., & Huxley, A. F. (1952), “A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve”, *J. Physiol.,* (Vol. 117), pp. 500-544.

[5]. Khalil, H. K. (2002), *Nonlinear Systems,* third ed., Prentice Hall, New York.

[6]. Kostova, T., Ravindran, R., Schonbek, M. (2004), “FitzHugh–Nagumo revisited: types of bifurcations, periodical forcing and stability regions by a Lyapunov functional”, *Int. J. Bifurcat. Chaos 14,* (Vol. 3), pp. 913-925.

[7]. Nagumo, J., Arimoto, S., & Yoshizawa, S. (1962), “An active pulse transmission line simulating nerve axon”, *Proc. IRE.,* (Vol. 50), pp. 2061-2070.

[8]. Pecora, L. M., & Carroll, T. L. (1998), "Master stability functions for synchronized coupled systems", *Phys. Rev. Lett.*, (Vol. 80), pp. 2109-2112.

[9]. Yanchuk, S., Maistrenko, Y., Lading, B., & Mosekilde, E. (2000), "Effects of a parameter mismatch on the synchronization of two coupled chaotic oscillators", *Int. J. Bifurcat. Chaos,* (Vol. 10), pp. 2629-2648.

[10]. Wolf, A., Swift, J. B., Swinney, H. L., & Vastano, J. A. *(*1985), "Determining Lyapunov exponents from a time series", *Physica D.,* (Vol. 16), pp. 285-317.

SYNCHRONIZATION ON THE NETWORK OF TWO FITZHUGH-NAGUMO SYSTEMS WITH THE EFFECT OF THE EXTERNAL ELECTRICAL STIMULATION

Summary

This paper investigates both necessary and sufficient conditions of the coupling strength in order to cause the synchronization of two interacting FitzHugh-Nagumo systems (FHN) with the effect of one parameter, namely the frequency of the external electrical stimulation. The Lyapunov function method is used to identify the sufficient condition, while the largest transverse Lyapunov exponent helps to find out the necessary condition of the coupling strength. The result shows that the synchronization occurs when the coupling strength is large enough. Moreover, the numerical results are presented to test the theoretical one.

Keywords: Coupling strength, FitzHugh-Nagumo system, Lyapunov function method, largest transverse Lyapunov exponent, synchronization.

Ngày nhận bài: 25/01/2019; Ngày nhận lại: 28/02/2019; Ngày duyệt đăng: 07/5/2019.