VẬN DỤNG PHẦN MỀM MAPLE TRONG GIẢNG DẠY CÁC NỘI DUNG TOÁN CAO CẤP THÔNG QUA MỘT SỐ BÀI TOÁN ỨNG DỤNG

• Phạm Mỹ Hạnh(*), Trần Thị Ngọc Giàu(*)

Tóm tắt

Theo xu hướng phát triển chung của khoa học và công nghệ, các phần mềm ứng dụng ngày càng được áp dụng rộng rãi trong giảng dạy và nghiên cứu khoa học. Người học không chỉ cần nắm vững kiến thức mà còn phải sử dụng thành thạo các công cụ và phần mềm tính toán để giải quyết các bài toán thực tế. Dựa trên các công cụ tính toán hiệu quả của Maple, bài viết trình bày một số ứng dụng của phần mềm này trong giảng dạy toán cao cấp về giải tích và đại số tuyến tính thông qua một số bài toán ứng dụng liên quan đến lĩnh vực kỹ thuật.

Từ khóa: Phần mềm Maple, toán cao cấp, giảng dạy toán cao cấp, bài toán kỹ thuật.

1. Đặt vấn đề

Trong quá trình học ở bậc đại học, sinh viên cần rèn luyện khả năng tự học, tự nghiên cứu. Để chiếm lĩnh tri thức, người học cần nắm vững các kiến thức được giảng viên truyền thụ, đồng thời linh động sáng tạo khi vận dụng những nội dung đã học vào giải quyết các vấn đề thực tiễn của cuộc sống. Chương trình toán bậc đại học cung cấp cho sinh viên một số kiến thức toán cao cấp về giải tích và đại số tuyến tính. Đa số kiến thức này tương đối mới và khó đối với sinh viên. Vì thế, sinh viên cần sự hỗ trợ của các công cụ tính toán, cũng như các phần mềm mô phỏng, qua đó giúp phát triển khả năng tư duy và các năng lực tính toán, mô hình hóa. Người học sử dụng máy tính điện tử và phần mềm để tạo ra các đối tượng toán học sau đó tìm tòi khám phá các thuộc tính ẩn chứa bên trong đối tượng đó. Dựa trên chuẩn đầu ra của giáo dục bậc đại học, sinh viên cần nắm vững kiến thức giải được các bài toán, hơn thế các em phải sử dụng được một số công cụ tính toán và phần mềm để giải quyết các bài toán ứng dụng thực tế.

Hiện nay có rất nhiều phần mềm hỗ trợ trong hoạt động giảng dạy và học tập toán. Theo [1, tr. 5] "Phần mềm Maple được Trường đại học tổng hợp Waterloo (Canada) và Trường đại học kỹ thuật Zurich (Thụy Sĩ) xây dựng và đưa vào sử dụng lần đầu tiên năm 1985". Đến nay phần mềm này đã phát triển đến phiên bản Maple 2018. Phần mềm Maple có giao diện khá thân thiện với người dùng và hỗ trợ hầu hết các lĩnh vực của toán học trong đó bao gồm một số nội dung toán cao cấp như: tính giới hạn; đạo hàm; tích phân; giải phương trình vi phân; vẽ đồ thị và khảo sát các hàm nhiều biến; ma trận; định thức; giải hệ phương trình... Ngoài ra, phần mềm này còn hỗ trợ người dùng trong việc lập trình tìm lời giải cho các bài toán với cấu trúc dòng lệnh đơn giản. Với các tính năng ưu việt trên, Maple thực sự là một công cụ hỗ trợ đắc lực cho giảng viên và sinh viên trong quá trình giảng dạy và học tập, đồng thời đây cũng là một trong những phần mềm ưu việt giúp giải quyết các bài toán kỹ thuật. Maple không chỉ giúp sinh viên kiểm tra lại các kết quả tính toán mà còn dùng để mô phỏng một sự vật, hiện tượng hoặc tìm lời giải cho các bài toán kỹ thuật. Bên cạnh đó người sử dụng có thể lập trình với các cấu trúc dòng lệnh đơn giản để giải quyết các tình huống có vấn đề.

Theo chương trình đại cương về toán cho các ngành kỹ thuật, sinh viên được tiếp cận một số nội dung về giải tích cổ điển và đại số tuyến tính. Các nội dung giải tích cổ điển như: giới hạn hàm số; phép tính vi phân hàm nhiều biến; phép tính tích phân; tích phân đường và tích phân mặt; phương trình vi phân tuy có nhiều ứng dụng trong thực tế nhưng đây là các nội dung tương đối mới và khó đối với sinh viên. Với thời lượng trên lớp (từ 3 đến 4 tín chỉ), sinh viên chỉ có thể nắm được một số kiến thức cơ bản và giải các bài tập từ mức độ đơn giản đến trung bình. Tương tự, đối với các nội dung đại số tuyến tính như: ma trận; định thức; hệ phương trình tuyến tính… sinh viên cũng ít có điều kiện tìm hiểu thêm về các ứng dụng thực tế của các khái niệm này.

Vì thế, trong quá trình học, sinh viên cần đến sự hỗ trợ của các phần mềm tính toán như Maple nhằm kiểm tra lại kết quả tính toán, mô phỏng những đồ thị của hàm số nhiều biến trong

(*) Trường Đại học An Giang.

không gian hoặc vẽ được các vật thể khối ba chiều và tính được thể tích của các đường, các mặt trong không gian… Ngoài ra, khi vận dụng các nội dung toán học vào các tình huống thực tế cho các bài toán kỹ thuật hoặc để tìm hiểu sâu hơn về mối quan hệ giữa toán học với các lĩnh vực trong hoạt động sản xuất, sinh viên cần sự hỗ trợ của giảng viên trong việc nêu rõ vấn đề cần giải quyết, khơi gợi lại kiến thức toán học và kiến thức chuyên ngành có liên quan, cũng như đề xuất phương pháp vận dụng kiến thức toán để tìm lời giải. Bên cạnh đó đa số những bài toán kỹ thuật cần phương tiện tính toán hiệu quả để giải quyết khối lượng lớn các dữ liệu đầu vào vì thế những phần mềm toán học như Maple sẽ hỗ trợ tích cực cho giảng viên lẫn sinh viên.

2. Vận dụng phần mềm Maple trong giảng dạy một số nội dung của Toán cao cấp

Trong mạch kiến thức về đại số tuyến tính có nhiều bài toán ứng dụng về kỹ thuật; các bài toán mô phỏng về hiện tượng trong tự nhiên. Vì thế, giảng viên có thể lồng ghép vào nội dung giảng dạy một số bài toán kỹ thuật từ các hoạt động thực tiễn cuộc sống. Dựa vào các tính năng của Maple, giảng viên có thể giúp sinh viên nâng cao khả năng tư duy, năng lực tính toán, mô phỏng và giải quyết các tình huống có vấn đề.

Bài toán 1. Nghiên cứu sự sinh sản của tằm, người ta nhận thấy mỗi con tằm sẽ đẻ 100 trứng mỗi tháng. Trong số này chỉ có 10% sống sót qua giai đoạn ấu trùng và 20% số ấu trùng này sẽ nở thành nhộng. Chỉ có 30% số nhộng lớn thành tằm. Giả sử rằng mỗi giai đoạn kéo dài trong một tháng và 40% số tằm trưởng thành 1 tháng tuổi sẽ sống cho đến tháng tiếp theo và có khả năng sinh sản. Tính số lượng tằm có được ở tháng thứ 10, biết lúc đầu có 40 con tằm [5, tr. 97].

Bài giải: Để giải quyết bài toán này, giảng viên có thể giúp sinh viên phân tích tìm mối quan hệ giữa các dữ liệu đầu vào như sau:

Giả sử w_n, x_n, y_n, z_n tương ứng là số lượng trứng, ấu trùng, nhộng và tằm trong tháng thứ n.

Khi đó w_1, x_1, y_1, z_1 và w_0, x_0, y_0, z_0 lần lượt là số lượng trứng, ấu trùng, nhộng và tằm trong tháng thứ 1 và thời điểm ban đầu. Ngoài ra, dựa vào các dữ liệu ban đầu ta lập được mối quan hệ giữa các đại lượng như sau:

$$\begin{cases} w_1 = 100z_0 \\ x_1 = 0,1w_0 \\ y_1 = 0,2x_0 \\ z_1 = 0,3y_0 + 0,4z_0 \end{cases}.$$

Mối quan hệ trên có thể được viết lại dưới dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 100 \\ 0,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,3 & 0,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix},$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} w_1 \\ x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1000 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} w_0 \\ x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}.M.A_0,$$

$$\text{với } M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1000 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Vì lúc đầu có 40 con tằm nên $A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 40 \end{bmatrix}^T$.

Thực hiện phép nhân ma trận, $A_1 = \begin{bmatrix} 4000 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}^T$ nên số tằm tháng thứ 1 sẽ là 16.

$$A_1 = \frac{1}{10}.M.A_0;\ A_2 = \frac{1}{10}.M.A_1 = \frac{1}{100}M^2.A_0 \Rightarrow$$

$$A_{10} = \left(\frac{1}{10}\right)^{10}.M^{10}.A_0.$$

Suy ra số tằm ở tháng thứ 10, khoảng 14,5 con tằm.

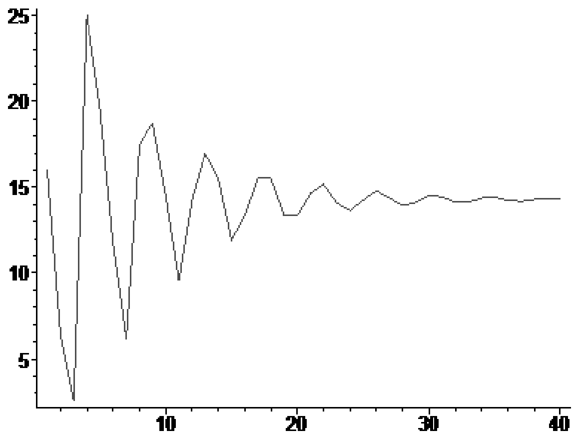
Nếu gọi u là số tằm ban đầu thì A là một hàm theo u từ đó ta có thể xây dựng hàm số biểu diễn sự biến thiên sinh sản của tằm bằng lệnh của Maple như sau:

> **with(linalg);**

> g:=(i,u) $\rightarrow$ transpose(evalm((M^i)&*A(u)));

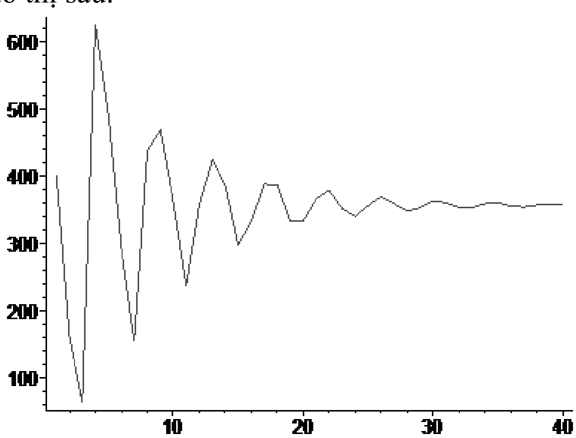
$$g := (i,u) \rightarrow \text{transpose}(\text{evalm}(`\&*`(M^i, \text{A}(u))))$$

> plot([seq([i,g(i,40)[1,4]],i=1...40)]);



Hình 1. Đồ thị minh họa sự sinh sản của tằm với điều kiện ban đầu có 40 con tằm

Dựa vào đồ thị nhận thấy, nếu chọn số lượng tằm ban đầu là 40 con thì trong những tháng đầu đến tháng thứ 30 số lượng tằm có sự biến động. Tuy nhiên từ tháng thứ 30 trở đi thì số tằm bắt đầu phát triển ổn định. Liệu số lượng tằm ban đầu có mang tính quyết định đến sự ổn định về mức sinh sản của tằm không? Kiểm tra giả định này bằng cách giả sử số lượng tằm ban đầu là 1000 con. Thực hiện tương tự như trên ta có đồ thị sau:



Hình 2. Đồ thị minh họa sự sinh sản của tằm với điều kiện ban đầu có 1000 con tằm

Qua đồ thị Hình 1 và Hình 2 nhận thấy số lượng tằm ban đầu không ảnh hưởng đến tính ổn định của sự sinh sản của tằm. Do đó, chính ma trận M mang tính quyết định.

Dùng gói lệnh của Maple về đại số tuyến tính >with(linalg); sinh viên dễ dàng tìm được đa thức đặc trưng của M là: $f(t)=t^4-\frac{2}{5}t^3-\frac{3}{5}$ và $f(t)$ có nghiệm 1, đây là một giá trị riêng của M. Kiểm tra được nếu chéo hóa ma trận M trên trường số phức thì tìm được bốn giá trị riêng phức từ đó tìm được ma trận khả nghịch P và ma trận đường chéo $D=\text{diag}(v_1,v_2,v_3,v_4)$ gồm các giá trị riêng phức v_1,v_2,v_3,v_4 của M sao cho $M=P.D.P^{-1}$. Khi đó, xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Nếu $0<\max\limits_{1\le i\le 4} v_i<1$ thì số lượng tằm sẽ giảm theo thời gian.

Trường hợp 2: Nếu $\max\limits_{1\le i\le 4} v_i=1$ thì lượng tằm sẽ phát triển đến một giai đoạn nào đó sẽ ổn định, tương ứng với trường hợp bài toán 1 khảo sát, trong đó giá trị riêng lớn nhất của M là 1.

Trường hợp 3: Nếu $\max\limits_{1\le i\le 4} v_i>1$ thì số lượng tằm sẽ liên tục tăng và bùng nổ dân số.

Riêng đối với các trường hợp 1 và 3, giảng viên cùng sinh viên có thể thay đổi dữ liệu về mối quan hệ giữa các dữ liệu đầu vào để xác định ma trận M tương ứng. Bằng công cụ tính toán của Maple, sinh viên có thể tương ứng tìm ra các giá trị riêng của M và kiểm chứng kết quả bằng đồ thị minh họa.

Bên cạnh các nội dung về đại số tuyến tính, sinh viên còn được học nhiều kiến thức về giải tích cổ điển với các nội dung về giới hạn, tích phân, phương trình vi phân. Hầu hết các nội dung này đều có nhiều ứng dụng trong các bài toán kỹ thuật và vật lý. Đối với sinh viên thuộc chuyên ngành Vật lý, Kỹ thuật môi trường… các em có thể tham khảo bài toán sau:

Bài toán 2. Một bể chứa nước phía dưới có chiều dày là 1,4 m phía trên là một lớp dầu dày 2 m. Biết rằng trọng lượng riêng của nước và dầu tương ứng là $\gamma_n=9{,}81$ KN/m^3 và $\gamma_d=8{,}39$ KN/m^3.

a) Xác định áp suất tại đáy bể là bao nhiêu? Cột áp suất tại đáy bể là bao nhiêu nếu tính theo cột nước áp suất?

b) Trong trường hợp bể chứa toàn nước. Bể có thể tích nước là $V=100$ lít. Người ta dùng dung dịch chứa g gram muối hòa tan trong 1 lít nước với vận tốc trung bình a = 2 lít/phút và khuấy đều. Giả sử đáy bể có một vòi thoát nước cũng với vận tốc là a = 2 lít/phút. Hỏi bao lâu thì nồng độ muối trong bể đạt giá trị k = 0,5 gr/lít? [5, tr. 99-103].

Bài giải: Dựa trên ví dụ này, giảng viên giúp sinh viên ôn lại một số kiến thức cơ bản về cơ học chất lỏng, đặc biệt là trường hợp áp suất thủy tinh, đồng thời làm rõ hơn mối quan hệ mật thiết giữa toán học và các bài toán kỹ thuật.

a) Nhận thấy trong bể chứa hở có áp suất trên mặt tự do bằng không và áp suất p tại độ sâu h bất kỳ được tính theo công thức: $p = \gamma .h.$

Trường hợp bể chứa nước ở phía dưới và dầu ở trên thì áp suất tại mặt phân cách của nước và dầu là: $p_{pc} = \gamma_d .h_d = 8,39 \times 2 = 16,78$ KN/m^2.

Áp suất của cột nước lên đáy bể xác định bởi: $p_n = \gamma_n .h_n = 9,81 \times 1,4 = 13,734$ KN/m^2.

Do đó, áp suất tại đáy bể là: $p = 16,78 + 13,734 = 30,541$ KN/m^2.

Ngoài ra, áp suất có thể biểu diễn tương đương với cột chất lỏng. Nếu mặt thoáng của chất lỏng chịu một áp suất p_0 nào đó, ta chỉ cần chuyển áp suất này thành cột chất lỏng tương đương $\frac{p_0}{\gamma}$ và cộng nó với giá trị h để được cột nước áp suất tổng.

Vì lượng dầu tác dụng một áp lực lên cột nước tại mặt phân cách nên cột nước áp suất mà lượng dầu tác động lên đáy bể: $h_0 = \frac{p_{pc}}{\gamma_n} = \frac{16,78}{9,81} = 1,71$ m.

Vậy cột nước áp suất tại đáy bể là: 1,71 + 1,4 = 3,11 m.

b) Giả sử $x(t)$ là lượng muối ở bể trong thời gian t, nó được xác định bằng hiệu số giữa lượng muối cho vào bể và lượng muối thoát ra khỏi bể. Khi đó $\frac{dx(t)}{dt} = ga - \frac{a}{V}x(t)$ (1) (Với dữ liệu đầu vào là $x(0) = 0$ vì lượng muối ban đầu là 0).

Đây là dạng phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 hệ số hằng. Dùng gói lệnh >with(student); để nhập và giải phương trình vi phân từ đó xác định thời gian cần thiết để lượng muối trong bể đạt nồng độ như yêu cầu của bài toán.

> diff(x(t),t)=g*a-a*x(t)/V;

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{x}(t) = g\,a - \frac{a\,\mathrm{x}(t)}{V}$$

> s:=factor(dsolve({%,x(0)=0}));

$$s := \mathrm{x}(t) = -g\,V\left(-1 + \mathrm{e}^{\left(-\frac{a\,t}{V}\right)}\right)$$

> Limit(rhs(s),t=infinity):%=simplify(value(%), assume=positive);

$$\lim_{t\to\infty} -g\,V\left(-1 + \mathrm{e}^{\left(-\frac{a\,t}{V}\right)}\right) = g\,V$$

> ss:=solve(rhs(s)=V*k,t);

$$ss := -\frac{\ln\left(\frac{g-k}{g}\right)V}{a}$$

> subs(a=2,V=100,k=1/2,g=1,ss):%=evalf(%,4);

$$50\ln(2)=34,66$$

Vậy thời gian cần thiết để nồng độ muối trong bể đạt giá trị k = 0,5 gr/lít là 34,66 phút.

Bên cạnh việc đưa ra các gói thủ tục và các câu lệnh để người dùng tham khảo và sử dụng, Maple còn cho phép lập trình để giải quyết một số bài toán đơn giản. Đối với trường hợp a) của bài toán 2, giảng viên có thể yêu cầu sinh viên xây dựng đoạn chương trình nhỏ trong Maple để tính áp suất tại một điểm trong hồ khi biết trọng lượng riêng của chất lỏng và chiều cao cột chất lỏng.

Trong quá trình học để ôn lại các kiến thức toán, sinh viên có thể thao tác và rèn luyện kỹ năng lập trình thông qua các đoạn code nhỏ. Hoạt động này không những giúp các em củng cố kiến thức mà còn nâng cao năng lực tư duy tính toán.

Bài toán 3. Hàm cosin có thể tính bằng phương pháp khai triển Taylor theo công thức:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^{12}}{12!} - ...$$

Hãy viết chương trình đầu vào là x và n để xấp xỉ hàm cos tại x bằng cách tính tổng của n số hạng đầu tiên.

Bài giải:

#Chuong trinh tinh ham cosin bang cong thuc Taylor

#Dau vao: x,n

#Dau ra: Xap xi gia tri cua $\cos x$

$cosine := proc(x,n)$

$local\ i,\ s,\ k,\ sgn;$

$s := 1;$

$k := 0;$

$sgn := 0;$
for i from 1 to n do
$s := s + sgn * x^{(k+1)} \,/\, factorial(k+1);$
$sgn := -(sgn+1);$
$k := k+1;$
od;
print("The cosine function",s);#Dau ra
end;
$cosine := proc(x,n)$
local $i, s, k,$ sgn;
$s := 1;$
$k := 0;$
sgn := 0;
for i to n do $s := s + sgn * x^{(k+1)} \,/\, factorial(k+1);$
$sgn := -(sgn+1);$ k := k+1 end do;
print("The cosine function", s)
end proc
$\text{cosine}\left(\left(\frac{\pi}{2}\right), 3\right);$

$$\text{"The cosine function"}, 1 - \frac{1}{8}\pi^2$$

cosine(0,3);

$$\text{"The cosine function"}, 1$$

3. Kết luận

Tóm lại, phần mềm Maple là một hệ thống mở, cho phép chúng ta tạo lập được những công cụ mới bổ sung cho những gì phần mềm này chưa đề cập tới. Quá trình giảng dạy và học tập toán với sự hỗ trợ của Maple sẽ không hạn chế sự năng động và sáng tạo của thầy và trò, mà luôn tạo ra nhiều cơ hội phát triển tư duy linh hoạt sáng tạo của sinh viên. Đây là một công cụ hiệu quả đối với hoạt động giảng dạy, học tập và nghiên cứu khoa học, cũng như trong quá trình tìm tòi lời giải cho các bài toán kỹ thuật. Để sử dụng phần mềm Maple hiệu quả, giảng viên và sinh viên cần tích cực nghiên cứu để sử dụng thành thạo các gói thủ tục mà phần mềm cung cấp và vận dụng linh hoạt đối với từng nội dung giảng dạy, đáp ứng nhu cầu trong việc ứng dụng Toán học vào thực tiễn./.

Tài liệu tham khảo

[1]. Phan Đức Châu (2005), *Sử dụng Maple trong toán sơ cấp và toán cao cấp*, NXB Khoa học và Kỹ thuật, tr. 5.

[2]. Phạm Huy Điển (2002), *Tính toán, lập trình và giảng dạy toán học trên Maple*, NXB Khoa học và Kỹ thuật.

[3]. Nguyễn Viết Đông, Lê Thị Thiên Hương, Nguyễn Anh Tuấn, Lê Anh Vũ (2000), *Toán cao cấp (Tập I - Tập II)*, NXB Giáo dục.

[4]. Trịnh Thanh Hải (2005), *Giáo trình sử dụng phần mềm hỗ trợ trong dạy học Toán*, Đại học Thái Nguyên.

[5]. Phạm Minh Hoàng (2004), *Maple và các bài toán ứng dụng,* NXB Khoa học và Kỹ thuật, tr. 97-103.

APPLYING MAPLE IN TEACHING ADVANCED MATHEMATICS VIA SOME APPLIED PROBLEMS

Summary

With the development of science and technology, software programs are widely used in teaching and research. Leaners should not only master knowledge but also be able to use the relevant programs to solve practical problems. Based on Maple software effectiveness, this article presents some Maple applications in teaching advanced mathematics on analysis and linear algebra via several applied problems related to technological issues.

Keywords: Maple software, advanced mathematics, teaching advanced mathematics, technological problem.

Ngày nhận bài: 19/12/2018; Ngày nhận lại: 16/01/2019; Ngày duyệt đăng:19/4/2019.