

SỰ ĐỒNG BỘ HÓA CỦA HỆ THỐNG CÁC PHƯƠNG TRÌNH PHẢN ỨNG KHUẾCH TÁN FITZHUGH-NAGUMO CÓ NGHIỆM DẠNG XOẮN ỐC

• Phan Văn Long Em^(*)

Tóm tắt

Đồng bộ hóa là một hiện tượng phổ biến trong nhiều hệ thống tự nhiên và khoa học phi tuyến. Trong bài báo này, sự đồng bộ hóa được nghiên cứu đối với hệ thống mạng đầy đủ. Mỗi phần tử trong hệ được mô phỏng bằng một hệ phương trình phản ứng - khuếch tán dạng FitzHugh-Nagumo, đặc biệt mỗi hệ phương trình trong hệ thống đều có nghiệm dạng xoắn ốc. Kết quả cho thấy rằng hệ thống mạng có số lượng các phần tử càng nhiều thì sự đồng bộ hóa càng dễ, và hình dáng nghiệm xoắn ốc vẫn còn, tuy nhiên đã khác lúc đầu.

Từ khóa: Độ mạnh liên kết, hệ thống đầy đủ, nghiệm xoắn ốc, mô hình FitzHugh-Nagumo, sự đồng bộ hóa.

1. Đặt vấn đề

Mô hình FitzHugh-Nagumo (FHN) được biết là mô hình hai chiều đơn giản hóa từ hệ phương trình nổi tiếng của Hodgkin-Huxley [5], [6], [7], [8], [9], [10]. Tuy là mô hình đơn giản hơn, nhưng nó có nhiều kết quả giải tích đáng chú ý và giữ được các tính chất, ý nghĩa về mặt sinh học. Mô hình này được tạo thành từ hai phương trình của hai biến u và v . Biến đầu tiên là biến nhanh, được gọi là biến hoạt náo, nó thể hiện cho điện áp của màng tế bào. Biến thứ hai là biến chậm, nó thể hiện cho một số đại lượng vật lý phụ thuộc thời gian như độ dẫn điện của dòng ion đi ngang qua màng tế bào. Hệ phương trình FitzHugh-Nagumo được biểu diễn bởi hệ sau, sử dụng kí hiệu như trong [1], [2]:

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{du}{dt} = f(u) - v \\ \frac{dv}{dt} = au - bv + c \end{cases}, \quad (1)$$

trong đó, a, b và c là các hằng số (a và b là các số dương), $0 < \varepsilon \ll 1$ và $f(u) = -u^3 + 3u$.

Dựa trên mô hình này, bài báo tập trung nghiên cứu hệ phương trình đạo hàm riêng sau:

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{du}{dt} = \varepsilon u_t = f(u) - v + d_u \Delta u \\ \frac{dv}{dt} = v_t = au - bv + c \end{cases}, \quad (2)$$

trong đó, $u = u(x, t)$, $v = v(x, t)$, $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+$, d_u là hằng số dương, Δu là toán tử Laplace của u ,

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ là tập mở bị chặn đều và hệ thỏa mãn điều kiện Neumann trên biên (N là một số nguyên dương). Hệ phương trình này gồm hai phương trình đạo hàm riêng phi tuyến dạng parabolic, cho phép thể hiện nhiều hình dạng phong phú và hiện tượng có liên quan đến điện áp của màng tế bào về mặt sinh lý học [1], [2]. Chú ý rằng phương trình đầu tiên còn được gọi là phương trình dây cáp, mô tả sự lưu chuyển của điện thế dọc theo thân của một tế bào [5], [7]. Ở Hình 2, có hai hình ảnh tương ứng với hai nghiệm của hệ ở hai thời gian t khác nhau trong không gian được chọn $\Omega = [0; 100] \times [0; 100]$.

Hình 2(a) mô tả nghiệm $u(x_1, x_2, 0)$ của phương trình (2) ở thời điểm $t = 0$. Hình 2(b) mô tả nghiệm $u(x_1, x_2, 190)$ ở thời điểm $t = 190$, nghiệm này được gọi là nghiệm xoắn ốc hay sóng xoắn ốc. Hình ảnh có dạng xoắn ốc được thấy trong rất nhiều ứng dụng. Các sóng xoắn ốc được quan sát khi nghiên cứu điện thế của các tế bào não và tim. Ở trái tim, nếu sóng điện thế có các hình dạng này thì chức năng của tim có vấn đề, nó liên quan đến vấn đề loạn nhịp tim [9]. Ngoài ra, kết quả này cũng được tìm thấy ở tim của loài thỏ, ở vỏ não của chuột cống và ở tim của loài cừu.

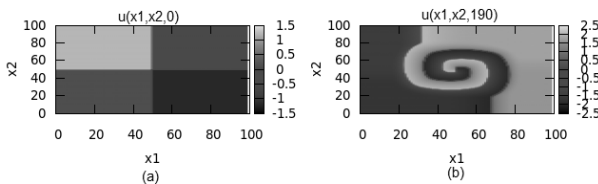
Đối với hệ phương trình (2), cùng với $a = 1, b = 0, 001, c = 0, \varepsilon = 0, 1, d_u = 0, 05$, để tạo ra được nghiệm có hình xoắn ốc thì miền Ω được chia làm bốn phần có diện tích gần như nhau. Trên mỗi miền nhỏ đó, chọn điều kiện ban đầu là các hàm hằng $(u(x, 0), v(x, 0))$, sao cho các hàm hằng này lệch pha nhau một cách đều

^(*) Trường Đại học An Giang.

đặt trên vòng tròn định mức của hệ phương trình (1). Các điều kiện ban đầu này có thể chọn như trong Hình 1 bên dưới, và bằng phương pháp số sai phân hữu hạn, nghiệm dạng xoắn ốc được tạo ra như ở Hình 2.

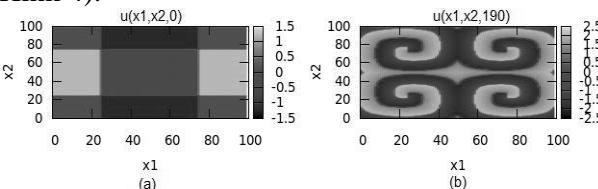
$(u(x, 0), v(x, 0)) = (0, -1)$	$(u(x, 0), v(x, 0)) = (-1, 0)$
$(u(x, 0), v(x, 0)) = (1, 0)$	$(u(x, 0), v(x, 0)) = (0, 1)$

Hình 1. Điều kiện ban đầu cho phép hệ phương trình (2) có nghiệm dạng một xoắn ốc

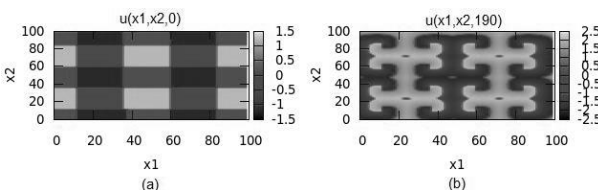


Hình 2. Nghiệm có dạng một xoắn ốc của (2) tương ứng với điều kiện ban đầu được cho ở Hình 1 (Hình (a) mô tả nghiệm $u(x_1, x_2, 0)$ của phương trình (2) ở thời điểm $t = 0$, Hình (b) mô tả nghiệm $u(x_1, x_2, 190)$ ở thời điểm $t = 190$)

Tương tự, nếu chia miền Ω thành 16 (tương ứng 64) phần bằng nhau thì nghiệm của hệ phương trình (2) sẽ có dạng 4 (tương ứng 16) xoắn ốc được minh họa bởi Hình 3 (tương ứng Hình 4).



Hình 3. Nghiệm có dạng 4 xoắn ốc của (2) (Hình (a) mô tả nghiệm $u(x_1, x_2, 0)$ của phương trình (2) ở thời điểm $t = 0$, Hình (b) mô tả nghiệm $u(x_1, x_2, 190)$ ở thời điểm $(t = 190)$)



Hình 4. Nghiệm có dạng 16 xoắn ốc của (2) (Hình (a) mô tả nghiệm $u(x_1, x_2, 0)$ của phương trình (2) ở thời điểm $t = 0$, Hình (b) mô tả nghiệm $u(x_1, x_2, 190)$ ở thời điểm $t = 190$)

Trong bộ não con người có rất nhiều tế bào, chúng liên kết với nhau tạo thành một mạng lưới tế bào. Một mạng lưới tế bào là một hệ thống các

tế bào được liên kết với nhau về mặt sinh lý học. Sự trao đổi giữa chúng chủ yếu là dựa vào các quá trình điện hóa. Bài báo này trình bày sự đồng bộ hóa của hệ thống đầy đủ các tế bào. Trong đó, mỗi tế bào được mô tả bằng một hệ phương trình đạo hàm riêng dạng FHN.

Hệ phương trình (2) được xem là mô hình của một tế bào, từ đó xây dựng được một mạng lưới tế bào gồm n hệ phương trình (2) liên kết với nhau bởi hệ sau:

$$\begin{cases} \epsilon u_{it} = f(u_i) - v_i + d_{u_i} \Delta u_{u_i} - h(u_i, u_j) \\ v_{it} = au_i - bv_i + c \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, n, i \neq j, \quad (3)$$

trong đó $(u_i, v_i), i = 1, 2, \dots, n$ được định nghĩa như phương trình (2).

Hàm số h là hàm liên kết mô tả hình thức liên kết giữa các tế bào i và j . Hình thức liên kết giữa các tế bào có hai dạng: hóa học và điện học. Bài nghiên cứu này chỉ tập trung vào dạng liên kết theo kiểu điện học, khi đó hàm liên kết là hàm tuyến tính và được cho bởi công thức sau:

$$h(u_i, u_j) = g_n \sum_{j=1}^n c_{ij} (u_i - u_j), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

Tham số g_n mô tả độ mạnh của liên kết. Các hệ số c_{ij} là các phần tử của ma trận liên kết $C_n = (c_{ij})_{n \times n}$ thỏa: $c_{ij} = 1$ nếu i và j có liên kết, $c_{ij} = 0$ nếu nếu i và j không có liên kết, trong đó $i, j = 1, 2, \dots, n, i \neq j$.

Như đã trình bày ở trên, sóng xoắn ốc có thể tìm thấy ở nhiều nơi trong thực tiễn. Đặc biệt, sự xuất hiện của chúng ở tim người là dấu hiệu của sự rối loạn nhịp tim. Nếu các tế bào trong hệ thống của quả tim cùng có sóng xoắn ốc như thế ở một thời điểm nào đó thì rõ ràng sẽ gây ảnh hưởng không nhỏ đến sự hoạt động của tim. Vì thế, việc nghiên cứu về sự đồng bộ hóa của hệ thống các tế bào là hết sức cần thiết.

2. Sự đồng bộ hóa của hệ thống đầy đủ các tế bào

Sự đồng bộ hóa là một hiện tượng vô cùng quan trọng trong tự nhiên và trong khoa học phi tuyến, đặc biệt là trong mạng lưới các hệ phương trình dao động được liên kết yếu với nhau [3], [4]. Nó có nghĩa là có cùng đặc tính ở cùng thời điểm. Do đó, đối với một mạng lưới gồm hai hệ phương trình thì sự đồng bộ hóa có nghĩa là hệ

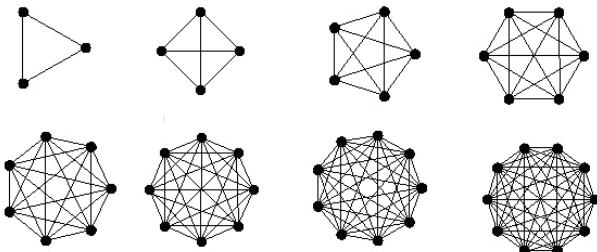
phương trình này sẽ sao chép những đặc tính của hệ phương trình kia kể từ một thời điểm nào đó. Khi đó, mạng lưới các hệ phương trình được gọi là *đồng bộ*.

Trong bài báo này, kết quả nghiên cứu được thực hiện trên hệ thống đầy đủ, nghĩa là mỗi phần tử trong hệ thống đều được liên kết với tất cả các phần tử còn lại. Ví dụ ở Hình 5 là các hệ thống đầy đủ từ 3 đến 10 phần tử được liên kết với nhau. Nhắc lại rằng, mỗi một phần tử của hệ thống là một tế bào được mô phỏng bằng một hệ phương trình phản ứng-khuếch tán dạng FHN và mỗi cạnh là đại diện cho một liên kết tế bào được mô phỏng bằng hàm số liên kết.

$$\begin{cases} \varepsilon u_{it} = f(u_i) - v_i + d_{ij} \Delta u_i - g_n \sum_{j=1, j \neq i}^n (u_i - u_j) & i = 1, 2, \dots, n. \\ v_{it} = au_i - bv_{it} + c \end{cases} \quad (5)$$

Định nghĩa 1: Đặt $S_i = (u_i, v_i), i = 1, 2, \dots, n$ và $S = (S_1, S_2, \dots, S_n)$ là một hệ thống các hệ phương trình. Hệ S được gọi là đồng bộ hóa nếu

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\|u_i - u_{i+1}\|_{L^2(\Omega)} + \|v_i - v_{i+1}\|_{L^2(\Omega)} \right) = 0.$$



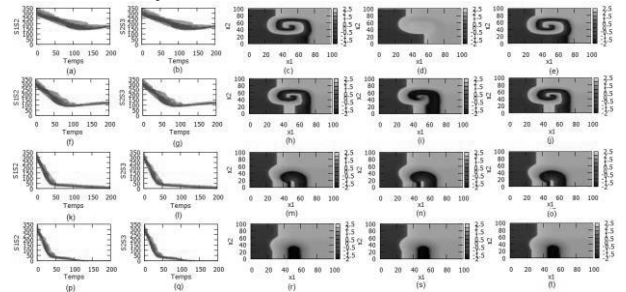
Hình 5. Hệ thống đầy đủ từ 3 đến 10 phần tử được liên kết với nhau. Mỗi một phần tử của hệ thống được mô phỏng bằng một hệ phương trình phản ứng-khuếch tán dạng FHN và mỗi cạnh là đại diện cho một liên kết được mô phỏng bằng hàm số liên kết

3. Kết quả bằng phương pháp số

Trong phần này, kết quả bài báo được thực hiện bằng phương pháp số đối với hệ (5), trong đó $n = 3, f(u) = -u^3 + 3u, a = 1, b = 0,001, c = 0, \varepsilon = 0,1, d_{ij} = 0,05, i = 1, 2, 3$. Phương pháp số này được thực hiện trên C++, với $[0; T] \times \Omega = [0; 200] \times [0; 100] \times [0; 100]$.

Kết quả được thể hiện ở Hình 6, mô tả hiện tượng đồng bộ của các nghiệm xoắn ốc của các

hệ phương trình FHN. Kết quả cho thấy sự đồng bộ hóa của hệ thống được thực hiện kể từ giá trị $g_3 = 0,025$. Các hình (a), (b), (f), (g), (k), (l), (p), (q) mô tả độ sai lệch của các cặp nghiệm $(u_1(x_1, x_2, t), u_2(x_1, x_2, t))$ và $(u_2(x_1, x_2, t), u_3(x_1, x_2, t))$, trong đó $t \in [0; T]$ và với mọi $(x_1, x_2) \in \Omega$. Ở hình (p) và (q) với $g_3 = 0,025$, kết quả cho thấy $u_1(x_1, x_2, t) \approx u_2(x_1, x_2, t)$ và $u_2(x_1, x_2, t) \approx u_3(x_1, x_2, t)$ với mọi $(x_1, x_2) \in \Omega$. Các hình (c), (d), (e), (h), (i), (j), (m), (n), (o), (r), (s), (t) mô tả các nghiệm xoắn ốc $u_i(x_1, x_2, 190), i = 1, 2, 3$, của hệ thống từ khi chưa có sự đồng bộ hóa xảy ra cho tới khi chúng có hình dạng giống nhau, nghĩa là sự đồng bộ hóa được thực hiện. Kết quả cũng cho thấy khi có sự đồng bộ hóa xảy ra thì hình dạng của các xoắn ốc đã thay đổi so với ban đầu, nhưng vẫn còn thấy được các xoắn ốc tồn tại.



Hình 6. Sự đồng bộ hóa trong hệ thống đầy đủ của 3 tế bào liên kết theo kiểu điện học. Sự đồng bộ hóa xảy ra khi $g_3 = 0,025$. Trước khi có sự đồng bộ hóa với $g_3 = 0,005$, Hình (a) mô tả độ sai lệch của u_2 đối với u_1 , với mọi $(x_1, x_2) \in \Omega$; Hình (b) mô tả độ sai lệch của u_3 đối với u_2 ; Hình (c) thể hiện nghiệm xoắn ốc $u_1(x_1, x_2, 190)$; tương tự, Hình (d) và (e) thể hiện nghiệm xoắn ốc $u_2(x_1, x_2, 190)$ và $g_3 = 0,01$ khi chúng được liên kết với nhau; kết quả được thực hiện tương tự đối với $g_3 = 0,01$ (Hình (f), (g), (h), (i), (j)), $g_3 = 0,023$ (Hình(k), (l), (m), (n), (o)) và $g_3 = 0,025$ (Hình (p), (q), (r), (s), (t)). Đối với $g_3 = 0,025$ thì hiện tượng đồng bộ hóa đã xảy ra

Bằng phương pháp số, kết quả nghiên cứu cho phép tìm được độ mạnh liên kết đủ nhỏ cần thiết để hiện tượng đồng bộ hóa xảy ra trong hệ thống mạng lưới các tế bào. Bằng cách làm tương tự như trong trường hợp $n = 3$, kết quả trong Bảng 1 dưới đây cho thấy sự thay đổi của

độ mạnh liên kết tương ứng với số lượng tế bào tăng dần từ 3 đến 20 trong hệ thống đầy đủ.

Bảng 1. Bảng giá trị của độ mạnh liên kết đủ nhỏ cần thiết để hiện tượng đồng bộ hóa xảy ra trong hệ thống đầy đủ các tế bào, tương ứng với số lượng tế bào tăng dần từ 3 đến 20

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11
g_n	0,025	0,015	0,012	0,009	0,008	0,007	0,006	0,005	0,0045
n	12	13	14	15	16	17	18	19	20
g_n	0,004	0,0038	0,0035	0,0032	0,003	0,0028	0,0026	0,0024	0,0023

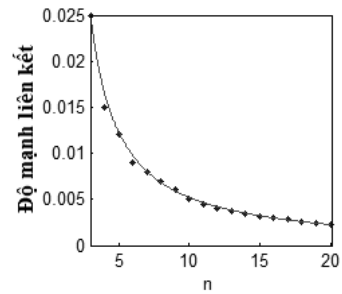
Dựa trên kết quả đạt được, có thể thấy rằng độ mạnh liên kết để sự đồng bộ hóa được thực hiện trong hệ thống đầy đủ là phụ thuộc vào số lượng tế bào trong hệ. Thật vậy, ở Hình 7, các điểm màu xanh chính là giá trị của các độ mạnh liên kết tương ứng với số lượng tế bào có trong hệ đầy đủ, đường cong màu đỏ chính là mô phỏng cho sự liên hệ này và được cho bởi công thức sau:

$$g_n = \frac{0,051}{n-1} - 0,00041, \quad (6)$$

trong đó, n là số lượng tế bào có mặt trong hệ thống đầy đủ. Như vậy, độ mạnh liên kết cần thiết cho sự đồng bộ hóa của hệ thống đầy đủ sẽ giảm dần khi số lượng tế bào có trong hệ tăng lên và tuân theo quy luật được cho bởi công thức (6).

Tài liệu tham khảo

- [1]. Ambrosio, B., & Aziz-Alaoui, M. A. (2012), "Synchronization and control of coupled reaction-diffusion systems of the FitzHugh-Nagumo-type", *Computers and Mathematics with Applications*, (64), pp. 934-943.
- [2]. Ambrosio, B., & Aziz-Alaoui, M. A. (March 2013), "Synchronization and control of a network of coupled reaction-diffusion systems of generalized FitzHugh-Nagumo type", *ESAIM: Proceedings*, Vol. 39, pp. 15-24.
- [3]. Aziz-Alaoui, M. A. (2006), "Synchronization of Chaos", *Encyclopedia of Mathematical Physics*, Elsevier, Vol. 5, pp. 213-226.
- [4]. Corson, N. (2009), *Dynamique d'un modèle neuronal, synchronisation et complexité*, Luận án Tiến sĩ, Trường Đại học Le Havre, Pháp.
- [5]. Ermentrout, G. B., & Terman, D. H. (2009), *Mathematical Foundations of Neurosciences*, Springer.
- [6]. Hodgkin, A. L., & Huxley, A. F. (1952), "A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve", *J. Physiol.*, (117), pp. 500-544.
- [7]. Izhikevich, E. M. (2007), *Dynamical Systems in Neuroscience*, The MIT Press.
- [8]. Keener, J. P., & Sneyd, J. (2009), *Mathematical Physiology*, Springer.



Hình 7. Biểu đồ độ mạnh liên kết tương ứng với số lượng tế bào trong hệ thống đầy đủ. Độ mạnh liên kết giảm dần khi số lượng tế bào tăng lên và tuân

theo quy luật $g_n = \frac{0,051}{n-1} - 0,00041$

4. Kết luận

Bài báo đã cho thấy kết quả của sự đồng bộ giữa các nghiệm dạng xoắn ốc của hệ thống đầy đủ các hệ phương trình phản ứng - khuếch tán dạng FitzHugh-Nagumo. Kết quả cho thấy các nghiệm dạng xoắn ốc đã thay đổi hình dạng khi có sự đồng bộ hóa xảy ra, tuy nhiên chúng vẫn có dạng xoắn ốc khác với ban đầu. Hơn nữa, nếu số lượng tế bào trong hệ thống tăng dần thì độ mạnh liên kết cần thiết để xảy ra sự đồng bộ hóa giảm dần. Điều đó cũng có nghĩa là càng dễ làm cho hệ thống đầy đủ đồng bộ nếu số lượng các phần tử trong hệ tăng lên. Trong bài báo tiếp theo, tác giả sẽ nghiên cứu sự đồng bộ hóa của các nghiệm xoắn ốc trong trường hợp hệ thống không đầy đủ với liên kết dạng hoá học./.

[9]. Murray, J. D. (2010), *Mathematical Biology*, Springer.

[10]. Nagumo, J., Arimoto, S., & Yoshizawa, S. (1962), “An active pulse transmission line simulating nerve axon”, *Proc. IRE.*, (50), pp. 2061-2070.

SYNCHRONIZATION IN COMPLETE NETWORKS OF REACTION-DIFFUSION EQUATIONS OF FITZHUGH-NAGUMO WITH SPIRAL SOLUTIONS

Summary

Synchronization is a ubiquitous feature in many natural systems and nonlinear science. In this paper, synchronization is studied in complete networks. Each element of the network is represented by a system of FitzHugh-Nagumo reaction-diffusion; especially every subsystem has a spiral-type solution. The result shows that those networks of greater elements synchronize more easily, and their spiral solutions are maintained, but different in forms.

Keywords: Coupling strength, complete network, spiral solution, FitzHugh-Nagumo model, synchronization.

Ngày nhận bài: 24/8/2018; Ngày nhận lại: 28/02/2019; Ngày duyệt đăng: 19/4/2019.